DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

NELL'ANNO **1891-92**

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1891 - 22 Novembre	1891 - 29 Novembre
» 6 Dicembre	» 13 Dicembre
» 20 Id.	» 27 Id.
1892 - 3 Gennaio	1892 - 10 Gennaio
» 17 Id	» 24 Id.
» 31 Id.	» 7 Febbraio
» 14 Febbraio	» 21 Id.
» 28 Id.	» 6 Marzo
» 13 Marzo	» 20 Id.
» 27 Id.	» 3 Aprile
» 10 Aprile	» 24 Id.
» 1 Maggio	» 8 Maggio
» 15 Id.	» 22 Id
» 29 Id.	» 12 Giugno
» 19 Giugno	» 26 Id.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI

DELLE DUE CLASSI

VOLUME VIGESIMOSETTIMO

1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1892

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Novembre 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: COSSA, Direttore della Classe, SALVADORI, BRUNO, BERRUTI, D'OVIDIO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE, PEANO e BASSO Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza del p. p. giugno, che è approvato.

Fra le molte pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia durante le ferie scorse, vengono in particolar modo segnalate le seguenti:

1° Presentate dal Socio BIZZOZERO: « *Neue Untersuchungen über die Bildung der Elemente des Blutes* »; del Dott. Pio FOÀ, Professore di Anatomia patologica nella Università di Torino;

2° Presentate dal Socio MOSSO: due Note del Socio Corrispondente Dott. A. CHAUVEAU, di cui una ha per titolo « *Sur le mécanisme des mouvements de l'iris* »: e l'altra « *Sur la fusion des sensations chromatiques perçues isolément par chacun des deux yeux* »;

3° Presentate dal Socio Segretario BASSO:

a) Un'opera in tre volumi del Socio straniero Augusto Guglielmo von HOFMANN, col titolo: « *Zur Erinnerung an vorangegangene Freunde, etc.* » (Braunschweig, 1888);

b) Un'opera in due volumi del Socio corrispondente Ernesto HAECKEL, intitolata: « *Anthropogenie oder Entwickelungsgeschichte des Menschen* » (Leipzig, 1891);

c) Una Memoria del Socio corrispondente Prof. Augusto RIGHI, intitolata: « *Ricerche sperimentali intorno a certe scintille elettriche costituite da masse luminose in moto* » (Bologna, 1891);

d) A nome del Prof. Federico SACCO, un volume del Socio corrispondente Prof. Arnould LOCARD: « *Les coquilles marines des côtes de France; description des familles, genres et espèces* » (Paris, 1892).

Il Socio BASSO legge poi un suo scritto, che sarà pubblicato negli *Atti*, in commemorazione del Socio corrispondente Guglielmo WEBER, morto a Gottinga il 23 giugno scorso, dopo una lunga vita consacrata ad importantissimi studi fisico-matematici.

Vengono ancora letti ed accolti per l'inserzione negli *Atti*, i lavori seguenti:

a) Presentata dal Socio BIZZOZERO: una seconda Nota dello stesso presentante: « *Sulle ghiandole tubulari del tubo gastroenterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa* »;

b) Presentati dal Socio FERRARIS:

1° Una nota dello stesso Socio presentante, col titolo: « *Sul metodo dei tre elettrodinamometri per la misura dell'energia dissipata per isteresi e per correnti di Foucault in un trasformatore* »; — 2° Un lavoro dell'Ing. G. PASTORE, del R. Museo Industriale in Torino, intitolato: « *Di alcuni conduttori rettilinei approssimati che si deducono dal moto ellittico piano* »;

c) Presentata dal Socio GIACOMINI una sua comunicazione che fa seguito a due altre precedenti: « *Sulle anomalie di sviluppo dell'embrione umano, trattando di una gravidanza tubarica* »;

d) Presentati dal Socio Cossa: *Studi sull'acido paramctilidratropico* », dei Dottori G. Errera e G. Baldracco;

e) Presentata dal Socio Peano una sua Nota « *Sulla formola di Taylor* »;

f) Presentate dal Socio Naccari: « *Ricerche sperimentali sulla soprafusione dell'acqua e delle soluzioni saline in movimento* », del Dott. V. Monti;

g) Presentata dal Socio Segre una Nota del Dott. Vincenzo Rejna, della R. Scuola per gl'Ingegneri di Roma: « *Sull'errore medio dei punti determinati nei problemi di Hansen e di Merck* »;

h) Presentate dal Socio Basso le « *Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno* 1892 », calcolate dall'Ing. T. Aschieri, Assistente all'Osservatorio di Torino.

Il Socio Gibelli presenta la seconda parte di un lavoro dei Dottori Prof. O. Mattirolo e L. Buscalioni « *Sulla storia di sviluppo del tegumento seminale* ». Trattandosi di uno studio destinato, come quello che lo precedette, ai volumi delle *Memorie*, il Presidente nomina una Commissione incaricata di esaminarlo e di riferirne poscia alla Classe.

Infine il Socio Camerano presenta un suo lavoro col titolo: *Ricerche intorno alla forza assoluta dei muscoli nei Crostacei decapodi* ». Questo lavoro è dalla Classe approvato per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

LETTURE

In commemorazione di **Guglielmo Weber**;

pel Socio GIUSEPPE BASSO

Nell'estate scorsa erano appena incominciate le ferie della nostra Accademia quando due vuoti dolorosi, a breve distanza l'uno dall'altro, s'aprirono nella schiera dei nostri soci corrispondenti per le sezioni di fisica e di meccanica applicata. Moriva a Gottinga la sera del 23 giugno Guglielmo Weber, chiudendo una lunga vita tutta consacrata allo studio e coronata da una ricchissima messe di allori imperituri. Spegnevasi nella notte del 6 luglio a Roma Giuseppe Pisati, vittima di un morbo crudele che troncava nella sua piena virilità un'esistenza la quale, nel campo delle ricerche fisiche, aveva dati, e più ne prometteva in avvenire, frutti importanti e copiosi.

Di entrambi questi deplorati colleghi siami concesso di fare una breve commemorazione ora che ci accingiamo ai lavori accademici del nuovo anno (1).

GUGLIELMO WEBER.

Guglielmo Weber nacque il 24 ottobre 1804 a Wittenberg da Michele Weber, professore di teologia in quella città. Nell'anno 1813, poco prima della celebre battaglia di Lipsia, le vicende della guerra franco-prussiana obbligarono la famiglia Weber ad abbandonare la casa paterna ed a riparare nella vicina Schmiedeberg donde, nell'anno 1815 essendosi la Università di Wittenberg fusa con quella di Halle, essa trasferì in quest'ultima città la sua residenza. Guglielmo Weber vi frequentò l'Istituto scolastico annesso alla Waisenhaus e, dopo alcuni anni

(1) Il cenno di commemorazione di Giuseppe Pisati verrà pubblicato nella prossima dispensa degli *Atti*.

di studio, cioè nell'inverno del 1821-22, si trovò in grado di intraprendere, in collaborazione col fratello maggiore Ernesto, una serie di indagini sperimentali sul moto ondulatorio dei liquidi, i cui risultati vennero poi raccolti in una Memoria pubblicata in Lipsia nel 1825 (1).

Questo primo lavoro, scritto con una lucidità da cui traspira, direi quasi, la freschezza giovanile, è notevole per la copia di osservazioni acute ed originali, per la singolare semplicità dei procedimenti sperimentali, per l'esattezza dei mezzi di misura. Gli Autori furono in principio indotti ad occuparsi del moto ondulatorio da un fatto puramente fortuito, cioè dalla osservazione degli increspamenti che sulla superficie libera del mercurio raccolto in un vaso vengono prodotti dalla caduta di un filo dello stesso liquido. Però, nel corso delle ricerche, la importanza scientifica dello argomento andò man mano accentuandosi ed estendendosi sempre più. E si comprende facilmente che ciò sia avvenuto, se si pensa che l'attenzione dei dotti si rivolgeva allora agli interessanti studi di Cladni sulle figure acustiche che portano il suo nome, che nell'interpretazione dei fenomeni ottici incominciavasi ad accogliere universalmente e quasi senza contrasto la teoria ondulatoria della luce chiarita dalle speculazioni teoriche di Huyghens e di Eulero ed assisa su solide basi dai lavori sperimentali di Joung, Fresnel, Arago e Frauenhofer. L'analisi matematica, prestando il suo prezioso sussidio alle ricerche, allora recenti, di Poisson, di Fourier e di Cauchy, aveva concorso ad estendere i confini della nuova dottrina ed a svelarne la fecondità meravigliosa.

Nella Memoria dei fratelli Weber, d'indole prettamente sperimentale, vengono dapprima sottoposti a minuto esame i vari modi di eccitazione delle onde liquide, ed a questo proposito viene anche studiata l'azione del vento sul moto ondoso del mare e si discute sull'influenza che strati d'olio, di etere, ecc., possono esercitare sullo smorzamento di tale moto. Si analizzano poscia i vari elementi che concorrono a determinare la forma delle onde; si espongono i metodi sperimentali per la valutazione delle creste e degli avvallamenti ondosi; si misura la ve-

1) *Wellenlehre auf Experimente gegründet, oder über die Wellen tropfbarer Flüssigkeiten mit Anwendung auf die Schall-und Lichtwellen*; von den Brüdern Ernst Heinrich Weber, Professor in Leipzig, und Wilhelm Weber, in Halle.

locità di propagazione del moto tenendo conto delle varie condizioni che possono modificarla. Offrono speciale interesse lo studio della riflessione delle onde e dei fenomeni d'interferenza che ne possono derivare, quello della diffrazione dovuta al passaggio del moto attraverso ad aperture e l'analisi delle condizioni che determinano la formazione dei vortici. È pur da notare che certi risultati delle loro esperienze sono dagli autori messi in confronto con quelli ottenuti da altri sperimentatori, quali furono il Biot ed il nostro Bidone, e che spesso essi collimano colle conseguenze che scaturiscono dalle teorie di Newton, Lagrange, Laplace, Flaugergue, Gestner, Poisson e Cauchy.

La propagazione di moti vibratorii, non solo nei liquidi, ma anche in certi solidi, come nelle corde sonore, e nei gas, come nei tubi sonori, forma pure oggetto di studio svolto in una parte della Memoria dei due Weber: ma quest'argomento, specialmente per ciò che riguarda i suoni delle canne da organo, venne poi ripreso e trattato minutamente dal solo Guglielmo in due suoi lavori pubblicati, l'uno nel 1826 in occasione della sua nomina a dottore, l'altro nell'anno seguente per l'ottenimento dell'abilitazione all'insegnamento (1). Di entrambi questi lavori, seguiti da altri su argomenti analoghi che videro poco più tardi la luce negli Annali di Poggendorf, fino ad un ultimo pubblicato nel 1866 (2), sarebbe impossibile fare in pochi cenni una analisi alquanto completa. Ricorderò solo uno dei principali risultamenti. Si sa che l'altezza del suono generato da un corpo vibrante, quale sarebbe una corda od una canna, subisce apprezzabili variazioni quando certe condizioni fisiche del corpo sonoro, come la temperatura, lo stato igrometrico, ecc., vengono a modificarsi anche di pochissimo. Può pure variare l'altezza del suono colla maggiore o minore ampiezza delle vibrazioni eccitate nel corpo sonoro. Così un diapason emette un suono fondamentale un po' più grave quando è scosso più energicamente ed all'incontro il suono fondamentale di una canna d'organo aumenta

---

(1) *Ueber die Wirksamkeit der Zungen in den Orgelpfeifen*; Halle, 1826. — *Ueber die Gesetze der Schwingungen zweier Körper, welche so mit einander verbunden sind, dass sie nur gleichzeitig und gleichmässig schwingen können*; 1827.

(2) *Theorie der durch Wasser oder andere incompressibile Flüssigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen*; Leipzig, Berichte Math. Phys., 1866.

alquanto d'altezza quando si rende maggiore l'ampiezza del moto vibratorio alla sua imboccatura. Ora Guglielmo Weber, traendo partito da ciò, riuscì a costruire una così detta *canna compensata* mediante la combinazione di una lamina vibrante speciale e di una canna d'organo, così fra loro vincolate che l'innalzamento di tono che tende a prodursi in una delle due parti dello strumento compensa esattamente l'abbassamento di tono dell'altra.

Affrettiamoci ora verso il periodo culminante della vita scientifica dell'insigne fisico tedesco. Egli, dopo tre anni d'insegnamento in Halle, dal 1828 al 1831, fu chiamato, per l'autorevole intromissione di Federico Gauss, a Gottinga in qualità di professore ordinario. Avendo dovuto dopo alcuni anni abbandonare l'ufficio per ragioni d'indole politica, si trasferì nel 1843 a Lipsia, dove salì sulla cattedra occupata fino allora da Fechner, ed infine, nell'anno 1849, potè riprendere l'antico posto a Gottinga e rimanervi fino all'ultimo.

Le relazioni di corrispondenza intellettuale, stabilitesi fra Gauss e Weber fin dall'epoca della dimora di quest'ultimo in Halle, vennero ben presto rafforzate dai vincoli di una cordiale amicizia, alla quale la scienza va debitrice di conquiste immortali che portano indissolubilmente congiunti i nomi dei due investigatori. Debbonsi dapprima menzionare gli studi sul magnetismo terrestre. È noto che l'esame sistematico degli elementi che, in dati luogo e tempo, caratterizzano l'azione magnetica della terra e più ancora le osservazioni regolari delle perturbazioni magnetiche costituirono uno dei principali argomenti a cui rivolse la sua maravigliosa operosità Alessandro Humboldt. Questo celebre naturalista aveva già, verso la fine del 1828, allogata in una sua casetta appositamente costruita in Berlino una bussola delle variazioni di Gambey e, d'accordo con altri dotti di Freiberg, Pietroburgo, Kasau e Nicolajef, dava opera a metodiche osservazioni dell'ago magnetico, le quali, insieme alle relative rappresentazioni grafiche, trovansi consegnate negli Annali di Poggendorf degli anni 1829-30. Ma ben presto intorno al primo nucleo di osservatori si raccolsero altri valenti, muniti di strumenti ben comparabili e costruiti per la maggior parte dal Gambey stesso; furono fra i primi Weber in Lipsia, Sartorius ed Encke in Gottinga. Mercè la vigorosa iniziativa di Gauss e di Weber si completò rapidamente una rete di osservatorii magnetici in regolare comunicazione fra di loro, di cui i principali

furono istituiti in Altona, Augsborgo, Berlino, Bonn, Braunschweig, Breda, Breslavia, Cassel, Copenaghen, Dublino, Friborgo, Gottinga, Greenwich, Halle, Kasau, Krakau, Lipsia, Marburgo, Monaco, Milano, Napoli, Pietroburgo ed Upsala. Il rapido sviluppo della istituzione, la quale prese il nome di *Magnetische Verein*, consigliò nel 1836 la creazione di un periodico nel quale, non solo si trovano consegnati di anno in anno i risultati delle osservazioni della Società, ma si contengono pure importanti Monografie. Le principali di queste, dovute a Weber, sono qui indicate a piè di pagina (1).

Fra i lavori fatti in comune da Gauss e da Weber nell'epoca di cui ora si tratta è pur degno di nota il collegamento telegrafico dell'Istituto fisico coll'Osservatorio astronomico, operazione che diede modo ai due eminenti ricercatori di introdurre nella allor recente invenzione del telegrafo elettromagnetico migliorie e perfezionamenti importanti. È anzi probabile che appunto in quest'occasione siansi nella mente di Weber maturati quei concetti che presero poscia corpo nelle sue numerose Memorie sulle dottrine di elettrodinamica e che costituiscono, nel loro complesso, l'opera principale della sua vita scientifica.

Era trascorso un quarto di secolo dacchè Ampère aveva fondate le basi dell'elettrodinamica scoprendo la legge che governa

---

(1) Resultaten aus den Beobachtungen des Magnetische Vereins:

1° *Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente* (1836).

2° *Beschreibung eines kleinen Apparats zur Messung des Erdmagnetismus nach absolutem Maas für Reisende* (1836).

3° *Bemerkungen über die Einrichtung und den Gebrauch des Bifilar-Magnetometers* (1837).

4° *Ueber den Einfluss der Temperatur auf den Stabmagnetismns* (1837).

5° *Ueber die Reduction der Magnetometer Beobachlungen auf absolute Declinationen* (1837).

6° *Das transportable Magnetometer* (1838).

7° *Der Inductor zum Magnetometer* (1838).

8° *Der Rotationsinductor* (1838).

9° *Beweglickeit des Magnetismus im weichen Eisen* (1838).

10° *Unipolare Induction* (1838).

11° *Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse* (1840).

12° *Ueber das electrochemische Aequivalent des Wassers* (1840).

13° *Magnetisirung des Eisens durch die Erde* (1841).

la mutua azione ponderomotrice fra due elementi di corrente elettrica e deducendone con procedimenti ingegnosi la teoria che sottopone ad un principio unico i fenomeni dell'elettricità e quelli del magnetismo. Fisici di tutti i paesi non tardarono ad apprezzare l'alto valore della teoria amperiana, ma riconobbero che la verificazione sperimentale delle sue conseguenze esigeva metodi più delicati e rigorosi di quelli che Ampère, matematico meglio che fisico, aveva indicati, ma non sempre realmente attuati. In questo campo di critica feconda, si lanciò con ardore il Weber e le sue ricerche pubblicate in una prima Memoria (1) nel 1848 non solo confermarono nei suoi punti essenziali la validità della dottrina svolta dallo scienziato francese, ma ne estesero grandemente i confini. Infatti, egli pervenne a rappresentare in una sola formola la legge amperiana delle azioni elettrodinamiche e quella di Coulomb per le azioni elettrostatiche e ciò partendo dall'ipotesi assai verosimile che la forza esercitantesi fra due masse elettriche in moto non sia soltanto funzione dei valori di queste masse e della loro distanza, ma dipenda eziandio dalle velocità dei loro spostamenti relativi. Inoltre la teoria di Weber si prestò immediatamente alla ricerca delle leggi che presiedono alla produzione dei fenomeni d'induzione elettrodinamica scoperti da Faraday, e Weber dimostrò come da questa sua teoria si deducano le equazioni generali determinanti le condizioni delle correnti indotte, sia nel caso di correnti inducenti variabili che attraversano conduttori fissi, come in quello di correnti costanti aventi la loro sede in conduttori in moto. La parte sperimentale del lavoro relativo a quest'ordine di speculazione attinge una speciale importanza da ciò che essa costituisce una completa verificazione di tutta la teoria Weberiana e consta di un enorme numero di determinazioni e di misure, per le quali venne impiegato *l'elettrodinamometro* dello stesso Autore, apparecchio ora notissimo per i continui servigi che esso presta nelle ricerche di elettrotecnica.

Gli studi di Weber finquì menzionati si collegano strettamente con altri pubblicati nello stesso periodo di tempo, fra i quali ricorderò in poche parole quello sulla repulsione diama-

---

(1) *Elektrodynamische Maasbestimmungen;* Annalen der Physik und Chemie, 1848.

gnetica (1). L'azione repellente che un polo di calamita esercita sul bismuto era già stata scoperta da Brugmans fino dall'anno 1778; tuttavia questo fatto singolare passò quasi inosservato fino a che Faraday lo sottopose a più minuta disamina, ne ricercò le leggi e tentò la costituzione di una teoria atta a fornirne la spiegazione. Quando un corpo diamagnetico si trova in un campo magnetico, esso apparisce magnetizzato per induzione, però in modo che i poli inducente ed indotto che si trovano in presenza sono sempre omonimi. Questa forma speciale d'influenza magnetica fu dimostrata da Faraday; ma Weber fece molto di più, essendo egli riuscito ad ottenere correnti d'induzione dal diamagnetismo mercè l'apparecchio galvanometrico da lui chiamato *diamagnetometro* ed a dimostrare che tali correnti hanno realmente direzione contraria a quelle che si genererebbero quando al corpo diamagnetico venisse sostituito un pezzo di ferro dolce.

A collocare il nome di Weber fra quelli dei primi elettricisti del nostro secolo basterebbero quei suoi studi, dei quali mi rimane ancora a far cenno, che lo condussero alla creazione dei sistemi d'unità elettriche assolute. Un sistema siffatto, per ciò che riguarda le unità magnetiche, era già stato elaborato da Gauss ed esposto nel 1833 nella sua classica Memoria: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* Weber si propose di risolvere la stessa questione per le varie specie di grandezze elettriche e di rendere per tal modo la loro determinazione indipendente dalla scelta degli apparecchi adoperati per istudiarle. In una sua prima Memoria pubblicata nel 1851 (2) egli dimostra che, come le unità magnetiche, anche quelle elettriche si possono far dipendere unicamente dalle unità di lunghezza, di massa e di tempo e ne stabilisce le definizioni. Escogita un ingegnoso procedimento per la misura, in unità assolute, delle resistenze elettriche, descrive le sperienze da lui instituite su certi circuiti chiusi e raggiunge lo scopo propostosi di fissare il rapporto fra l'unità assoluta di resistenza ed il campione di resistenza di Jacobi. L'applicazione del principio dello smorzamento delle oscillazioni dell'ago magnetico in vicinanza di masse

(1) *Ueber die Erregung und Wirckung des Diamagnetismus nach den Gesestzen inducirter Ströme*; Annalen der Physik und Chemie, 1848.

(2) *Messungen galvanischer Leitungswiderstände nach einem absolutem Maasse;* Annalen der Physik und Chemie, Band LXXXII, 1851.

metalliche gli permette di fissare l'unità assoluta delle forze elettromotrici e per conseguenza anche quella dell'intensità di corrente. Infine, degnissimi di attenzione sono gli ultimi paragrafi del lavoro, nei quali l'Autore discute i valori trovati da Kirchhoff per le costanti da cui dipende l'intensità delle correnti elettriche indotte e tratta della determinazione di quelle altre costanti che, dipendendo dalla scelta delle unità di misura, figurano nella espressione della legge elementare relativa alle azioni elettriche.

Qualche anno più tardi Guglielmo Weber si associò a Rodolfo Kohlrausch nello intraprendere una serie di lavori (1) che, insieme al precedente, costituiscono uno dei capisaldi su cui posa l'edificio delle dottrine elettriche moderne. Poichè l'intensità della corrente elettrica in un dato conduttore è rappresentata dalla quantità di elettricità che attraversa nell'unità di tempo una sezione del conduttore stesso, si presenta spontaneo il problema di fissare l'unità assoluta per le quantità di elettricità libera, positiva o negativa. Non sarebbe senza di ciò possibile il valutare numericamente gli effetti dell'elettricità nella condizione statica in confronto cogli effetti che essa produce allo stato di movimento, cioè sotto forma di corrente. Il metodo adoperato da Weber a tale scopo consiste essenzialmente nel paragonare l'impulso dato all'ago di un galvanometro dalla scarica di una data quantità di elettricità libera accumulata in un determinato conduttore coll'impulso dato all'ago stesso da una corrente elettrica di data intensità, la cui azione abbia durata brevissima e nota. Tutto il procedimento sperimentale, informantesi a questo principio, è condotto e svolto fino nei suoi minuti particolari con insuperabile maestria ed i risultati che ne scaturiscono, anche tenuto conto della maggior precisione che le indagini posteriori vi arrecarono, formano un vero tesoro per la scienza dell'elettricità e le sue innumerevolí applicazioni. Basti ricordare che il rapporto fra le unità elettromagnetica ed elettrostatica, così di quantità di elettricità come d'intensità di corrente, si trova espresso dallo stesso numero che dà la velocità della luce nel vuoto; fatto questo che svela un vincolo sorprendente fra i fenomeni elettromagnetici ed i fenomeni luminosi e che costituisce uno dei precipui argomenti in favore della teoria elettromagnetica della luce. Alle stesse ri-

---

(1) *Ueber die Elektricitätsmenge, welche bei galvanischen Strömen durch den Querschnitt der Kette fliesst;* Annalen der Physik und Chemie, 1856.

cerche di Weber e di Kohlrausch dobbiamo parimenti la prima conoscenza della quantità di elettricità, in unità assolute, che è necessaria per decomporre, per es., un milligramma d'acqua; mercè le stesse ricerche noi sappiamo ora valutare, per es., in chilogrammi, tanto l'attrazione che un'unità di elettricità esercita su un'altra unità di specie contraria posta all'unità di distanza, quanto la somma delle azioni meccaniche che vengono esercitate nella decomposizione di un dato elettrolito dal passaggio, sotto forma di corrente, dell'unità di elettricità attraverso di esso.

Verso il 1860 Kirchhoff aveva escogitata e resa di pubblica ragione la sua celebre teoria, rivestente il carattere di grande generalità, intorno al movimento dell'elettricità nei conduttori. Prendendo appunto le mosse dai concetti fondamentali che informano tale teoria, Weber nel 1864 elaborò una grande Memoria (1) sulle condizioni, determinabili quantitativamente, del moto di propagazione della elettricità. Trovata l'espressione della forza elettromotrice relativa così alla elettricità libera, come alla corrente elettrica per una sezione qualunque d'un filo conduttore, Weber giunge alle equazioni del movimento elettrico indipendentemente dall'uso della legge di Ohm, sulla cui esattezza, per il caso di fili sottilissimi, egli dimostra che si possono elevare dubbi. Più specialmente considera il moto elettrico avente sede in un conduttore chiuso di forma qualunque ed ottiene le equazioni che danno i valori medii della forza elettromotrice e dell'intensità della corrente. Queste equazioni assumono forme più semplici e più esplicite quando si tratta di un conduttore filiforme circolare, per il quale si possono esaminare non solo le leggi del moto elettrico a regime stazionario, ma anche quelle regolanti tale moto soggetto a variazioni dovute a cause perturbatrici qualunque. Se queste variazioni rivestono il carattere di regolare periodicità, il moto elettrico si può considerare come oscillatorio e si va propagando sotto forma di onde. Di queste onde, della loro velocità di trasmissione e della densità dell'elettricità libera che le accompagna, l'Autore intraprende l'esame, interessantissimo per la teoria delle macchine d'induzione e precursore, per qualche riguardo, ai mirabili studi sulle ondulazioni

---

(1) *Elektrodynamische Maasbestimmungen insbesondere über elektrische schwingungen; aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften;* Band VI, 1864.

elettriche compiuti in questi ultimi anni da Enrico Hertz. Volendo sottoporre al cimento della sperienza i risultati delle sue ricerche teoriche, Weber ricorre ai moti oscillatori elettrici che si possono ottenere per induzione da una calamita animata da rapidissimo moto rotatorio in presenza di un circuito chiuso. La sua teoria gli permette di esprimere per ogni istante la forza elettromotrice, l'intensità del flusso elettrico, la fase e l'amplitudine delle oscillazioni elettriche e la distribuzione dell'elettricità libera lungo il conduttore. Ora, i valori di questi elementi, che si possono determinare sperimentalmente mediante l'elettrodinamometro, collimano in modo assai soddisfacente colle previsioni teoriche.

La legge fondamentale Weberiana sull'azione reciproca delle masse elettriche fu oggetto, e lo è ancora, di interessanti discussioni per parte di vari fisici e matematici. Parve ad Helmholtz, fra gli altri, che tale legge potesse in qualche caso trovarsi in contraddizione col principio della conservazione dell'energia. Si fu per rimuovere obbiezioni di tal fatta che nel 1874 Weber pubblicò un lavoro (1), nel quale si risolvono soddisfacentemente le difficoltà che gli erano state presentate; anzi trasse da ciò l'occasione di ottenere, studiando il moto delle particelle elettriche abbandonate interamente alle loro mutue azioni, risultati di non lieve importanza per la fisica molecolare.

E questioni appunto di fisica molecolare, versanti in ispecie sulla teoria cinetica dei gas, occuparono ancora la mente di Weber per parecchio tempo; ma, in questi ultimi anni, la molto grave età impose poco a poco un termine alla sua maravigliosa fecondità intellettuale. Perciò rimangono ora, come documenti incompleti di un'attività che non si rallentò se non quasi all'ultimo, molte note e studi inediti ed in gran parte monchi. Così Guglielmo Weber scese nella tomba raccogliendo il premio serbato ai massimi promotori del progresso umano, la riconoscenza imperitura dei posteri verso la sua venerata memoria.

---

(1) *Elektrodynamische Maasbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie: Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 1874.

Sulle ghiandole tubulari del tubo gastro-enterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa;

Nota Seconda
del Socio Prof. G. BIZZOZERO

Ghiandole del retto di *mus musculus.*

La mucosa, col suo strato muscolare e col sottomucoso, forma 5 o 6 ripiegature longitudinali che obliterano quasi il lume dell'intestino. Nella mucosa stanno disposte, a palizzata, le ghiandole tubulari, separate l'una dall'altra da scarsissimo connettivo. Qua e là il loro strato è interrotto da follicoli linfatici, che arrivano fin sotto l'epitelio della superficie libera della mucosa. — Le ghiandole occupano tutto lo spessore della mucosa e sono relativamente corte, rettilinee. Terminano in basso con un fondo cieco leggermente ingrossato a clava (fig. 1ª). Il loro lume è relativamente stretto; esso si dilata leggermente tanto in corrispondenza del fondo cieco, quanto in corrispondenza dello sbocco della ghiandola alla superficie della mucosa.

Anche in queste ghiandole l'epitelio che le tappezza consta di due specie di cellule: protoplasmatiche e mucose (1).

Le *cellule protoplasmatiche* sono senza paragone le più numerose, ed hanno diversa forma e costituzione a seconda del punto in cui si considerano.

Nel fondo cieco (fig. 1ª) hanno forma di piramide tronca, colla base applicata sulla membrana propria. Il loro nucleo è rotondo o leggermente ovale, e sta nella parte basale della cellula.

(1) Per l'indurimento mi valsi tanto dell'alcool, quanto dell'acido picrico. Questo conserva meglio i contorni degli elementi. Per la colorazione colla safranina servono entrambi; l'alcool, però, dà colori più vivaci.

Subito al di sopra del fondo cieco le cellule gradatamente mutano di forma. Si vanno curvando in modo da presentare la convessità verso la superficie della mucosa, e nel tempo stesso si dispongono un po' obliquamente in rapporto all'asse del tubo ghiandolare, in modo che la loro estremità libera è ad un livello alquanto più alto che non sia l'estremità impiantata sulla membrana propria. Inoltre, questa ultima estremità non termina tronca, ma è a forma di linguetta appiattita, che si curva e va a terminare embricatamente sotto la base della cellula immediatamente sottoposta. Il nucleo mantiene la sua forma rotonda od ovale, e continua a stare nell'estremità basale dell'elemento.

Questo cambiamento di forma e di disposizione delle cellule si fa tanto più spiccato quanto più ci avviciniamo allo sbocco della ghiandola. Oltrepassato lo sbocco, le cellule costituiscono l'epitelio della superficie libera dell'intestino; e qui esse sono in numero relativamente limitato, perchè, essendo le ghiandole applicate strettamente l'una contro l'altra, la mucosa non rappresenta che le sottili trabecole di una rete, ogni maglia della quale è occupata, o, meglio, formata, da uno sbocco ghiandolare. — Sulla mucosa le cellule epiteliali, naturalmente, hanno forma di piramide, e, contrariamente a quanto si osserva nei fondi ciechi delle ghiandole, hanno la base alla estremità libera.

Oltre a questi cambiamenti di forma, le cellule protoplasmatiche ci presentano delle modificazioni, riguardanti il protoplasma e la loro superficie libera, affatto simili a quelle che abbiamo già vedute nel coniglio. Infatti, nei due terzi profondi del tubo ghiandolare il protoplasma epiteliare è assai chiaro, e, esaminato a fortissimo ingrandimento, si presenta costituito d'una sostanza omogenea, entro cui è disposto un reticolo a trabecole assai sottili, ed a maglie molto ampie. Nel terzo superficiale della ghiandola, invece, il protoplasma si fa sempre più granuloso (fig. 1ª); e quest'apparenza è data da ciò, che il reticolo si fa sempre più fitto, e la sostanza omogenea interposta, quindi, sempre più scarsa. Ciò appare chiaramente quando si esaminino a fortissimo ingrandimento dei preparati colorati con safranina acquosa, e conservati in soluzioni di zucchero. A questo modo il protoplasma delle cellule assume gradatamente l'aspetto ben conosciuto di quello delle cellule rivestenti la mucosa intestinale. — Riguardo alla estremità libera delle cellule, questa nei due terzi profondi della ghiandola appare limitata (nelle cellule viste da lato) da una

linea sottilissima; invece nel terzo superficiale comincia ad apparire un orlo striato, che va man mano ingrossando, fino a diventare pari in spessore all'orlo striato dell'epitelio della superficie libera dell'intestino, col quale direttamente si continua.

Le cellule *mucose* presentano pure notevoli modificazioni di forma e di struttura a seconda della loro posizione. Queste differenze è bene studiarle su sezioni chiuse in damar dopo indurimento coll'acido picrico e colorazione, p. es. colla vesuvina, perchè nelle sezioni chiuse in glicerina dopo colorazione con picrocarmino o safranina il muco delle cellule è fortemente rigonfiato, e quindi il diametro degli elementi è pure molto cresciuto.

Orbene, in questi preparati si vede che nel fondo cieco ghiandolare (fig. 1ª *b*) le cellule il più delle volte hanno forma di poco differente da quella delle cellule protoplasmatiche circonvicine; sono, soltanto, alquanto più larghe nel punto in cui risiede il muco, e il nucleo è spinto alla base, e dispostovi trasversalmente. Quanto più si va in su nella ghiandola, tanto più la gocciola di muco ingrossa (1), e la cellula così acquista la forma di pera; la parte ingrossata corrisponde alla superficie libera, la parte assottigliata, invece, contiene il nucleo, e va a terminare, assottigliandosi a becco, contro la membrana propria ghiandolare. Nella fig. 1ª si vede come queste cellule siano disposte obliquamente rispetto all'asse longitudinale della ghiandola, e siano curve, colla convessità rivolta verso lo sbocco ghiandolare, al pari delle cellule protoplasmatiche che le circondano; vi si vede, inoltre, come esse mutino gradatamente la loro forma fino a diventare cellule caliciformi dell'epitelio della mucosa.

Modificazioni non meno notevoli si hanno nella struttura e nelle reazioni del blocco mucoso che contengono. Nelle cellule del fondo cieco esso è rappresentato (in preparati acido picrico-vesuvina-damar) da una sostanza omogenea, attraversata da un reticolo a trabecole sottili; quella non si colora, questo si colora ben poco colla vesuvina, sicchè la cellula a mala pena si distingue dalle cellule protoplasmatiche. Andando più in su, il reticolo si va facendo più grosso e più colorabile; le cellule, così, diventano distinguibili anche a debole ingrandimento pel loro colore bruno.

---

(1) Il diametro trasverso della gocciola di muco nella cellula del fondo cieco è di 7-8 μ, in quella della metà superficiale della ghiandola di 15 μ.

Finalmente nella parte più superficiale della ghiandola e nell'epitelio della superficie libera della mucosa, i blocchi di muco appaiono sotto forma di ammassi di granuli giallo-bruni.

Riguardo, invece, alla costituzione chimica della sostanza mucosa, noterò che anche qui, come nel coniglio, si nota una graduata modificazione nel suo modo di reagire verso la safranina, modificazione di cui i due estremi sono rappresentati dalle cellule dei fondi ciechi ghiandolari da una parte, e dalle cellule della superficie della mucosa dall'altra. Infatti queste, colla safranina, ingialliscono più presto e più fortemente di quelle, e, quando siano portate nella soluzione di zucchero, meno facilmente si scolorano. Si scolorano anch'esse, però, se la soluzione di zucchero non è molto concentrata.

Le cellule *in mitosi* (fig 1[a]) sono assai numerose nelle ghiandole di cui discorriamo. Ciascuna di queste ne contiene 5-8 ed anche più, e disposte tutte nei $^{3}/_{5}$ profondi della ghiandola; sicchè la parte di questa, che è vicina allo sbocco, ne è priva, come ne è privo l'epitelio della superficie libera dell'intestino.

Se ora si tien conto di questa disposizione delle mitosi, e d'altra parte si tien conto delle suddescritte graduate modificazioni anatomiche e chimiche che presentano le due forme di cellule ghiandolari, andando dal fondo delle ghiandole alla superficie della mucosa, si dovrà concludere che anche nelle ghiandole del *mus musc.* si verificano tutte quelle condizioni, che ci fecero ammettere nel coniglio una graduata trasformazione dell' epitelio ghiandolare in epitelio della mucosa.

Nel *mus* si avrebbe la differenza, che mancano le mitosi in corrispondenza del colletto ghiandolare. Ciò si spiega facilmente. Nel coniglio l'epitelio ghiandolare è ricchissimo di cellule mucipare, sicchè, anche tenendo conto di una distruzione ed eliminazione di cellule mucose, c'è bisogno di una rapida produzione di cellule protoplasmatiche in corrispondenza dello sbocco ghiandolare, per poter ottenere quella grande prevalenza di cellule protoplasmatiche sulle cellule mucose che si osserva alla superficie libera dell'intestino. — Nel mus, invece, non si ha bisogno di questo focolaio secondario di produzione cellulare, perchè, essendo le cellule mucose scarse anche nella ghiandola, il rapporto numerico fra le due specie di cellule non si modifica gran fatto nel passaggio dall'epitelio ghiandolare a quello della superficie libera dell'intestino.

Ghiandole del retto di cane.

Non ho bisogno di dare una descrizione di queste ghiandole, perchè la loro forma e struttura vennero già esposte da KLOSE (1), ed un disegno ne fu già dato da HEIDENHAIN (2). Sono, al solito, ghiandole tubulari rivestite da due specie di cellule epiteliari: cellule mucose, fra cui stanno cellule protoplasmatiche. — Devo però notare, che nella figura di Heidenhain la parte mucosa è alquanto esagerata a spese della parte protoplasmatica. Ciò dipende dal metodo di preparazione usato: indurimento nel liquido di Müller o nell'alcool e, dopo colorazione, esame e conservazione in glicerina. Con questi liquidi le cellule mucose si gonfiano assai, e comprimono e fanno impicciolire il corpo delle cellule protoplasmatiche interposte. — Questo stesso difetto, secondo la mia esperienza, si può rimproverare all'indurimento coll'acido picrico o col sublimato. — L'indurimento, invece, col liquido di Flemming o con quello di Hermann conserva alle cellule mucose la grossezza e la forma, press'a poco, che hanno in natura; com'è facile constatare paragonando con preparati ottenuti semplicemente col dilacerare la mucosa appena tolta dall'animale, e distenderla fra i due vetrini senza alcun liquido di aggiunta. Convien notare, però, che tanto il liquido di Flemming quanto quello di Hermann non conservano alla sostanza mucosa contenuta nelle cellule quella struttura a granuli sferici e pallidi che essa ha nel tessuto fresco. Questa struttura granulare, è, del resto, delicatissima, e si perde tosto anche trattando il tessuto fresco cogli altri liquidi induranti summenzionati. Per vederla, quindi, occorre o dilacerare il tessuto fresco senza liquido di aggiunta, o dilacerarlo nel liquido di Müller, che distrugge la struttura granulare solo dopo qualche tempo.

Nella descrizione che segue io mi varrò specialmente dei preparati ottenuti coll'indurimento nel liquido di Flemming o in quello di Hermann, perchè un accurato confronto mi ha persuaso

(1) KLOSE, *Beitrag zur Kenntniss der tubulösen Darmdrüsen*. Diss.-Inaug. Breslau 1880.

(2) HEIDENHAIN, *Phys. der Absonderungsvorgänge* 1880.

che sono quelli che meglio conservano le condizioni naturali degli elementi e più evidente ne rendono la struttura. L'uno, poi, completa i risultati ottenuti coll'altro, perchè, se il primo fa spiccar meglio i contorni cellulari, l'altro mi ha permesso di ottenere delle colorazioni più brillanti, più esclusive del muco contenuto nelle cellule; il che è di molta importanza per lo studio dello sviluppo di queste ultime. Quale sostanza colorante del muco la safranina, nei pezzi induriti con questi due liquidi, non presta quei servigi che fornisce in quelli induriti coll'alcool. Colorazioni magnifiche ed esclusive del muco si ottengono, invece, tanto coll'azzurro di metilene, quanto coll'ematossilina. A quest'ultima, per la maggiore rapidità di azione, ho dato la preferenza nelle mie ricerche. I migliori miei preparati sono appunto quelli che, dopo l'indurimento in liquido di Hermann, ebbero i nuclei colorati in rosso colla safranina, ed il muco in violetto coll'ematossilina (1).

In questi preparati è facile riconoscere anche a piccolo ingrandimento i rapporti di numero fra le cellule mucose e le protoplasmatiche nei diversi punti della ghiandola. — Nel fondo cieco di questa (fig. 2ª *A*) sogliono essere relativamente numerose le mucose, di modo che fra due di esse non si osservano che una o, al più, due cellule protoplasmatiche. Questo rapporto si conserva fin verso il mezzo del tubo ghiandolare. — Nella metà superficiale della ghiandola, invece, le cellule protoplasmatiche acquistano decisamente la prevalenza, sicchè le cellule mucose riescono separate l'una dall'altra da parecchie cellule dell'altra specie (fig. 2ª *B*).

---

(1) Le sezioni di pezzi induriti successivamente in liquido di Hermann ed in alcool, vengono liberate dalla paraffina col silolo e coll'alcool assoluto, poi vengono messe per un'ora o due in una soluzione acquosa di safranina; indi si lavano in alcool assoluto per 10-15 m'', si tengono per 10 m' nell'ematossilina, si lavano di nuovo per mezzo minuto nell'acqua, e finalmente si passano rapidamente nell'alcool assoluto (ovvero dapprima nell'alcool cloridrico 1 %, poi nell'alcool assoluto), nell'olio di bergamotto, e in balsamo del Canadà. — Le sezioni devono essere assai sottili, dello spessore al più di 5 μ. Di solito sono sufficientemente rigide per poter essere trasportate direttamente da un liquido nell'altro. Se per avventura riescono troppo delicate, si possono colorare sotto il coproggetti, facendo passare sotto di questo i diversi liquidi. Se il coproggetti è sostenuto da due listerelle di carta sottilissima, disposte parallelamente all'asse più lungo del portoggetti, le correnti si stabiliscono in modo veloce e regolare, la sostituzione di un liquido all'altro riesce più completa, e quindi i preparati risultano meglio colorati.

Infine, l'epitelio della superficie libera dell'intestino è costituito quasi esclusivamente da cellule protoplasmatiche.

I caratteri morfologici delle *cellule protoplasmatiche* presentano nelle varie regioni delle ghiandole del cane quelle stesse modificazioni che abbiamo già veduto nel coniglio e nel topo.

Nel fondo cieco (fig. 2ª *A*) esse si adattano, nella forma, agli spazi lasciati liberi dalle cellule mucose, posseggono un nucleo ovale spinto all'estremità profonda del corpo cellulare, ed hanno la loro estremità libera, limitata da una linea sottile. Il protoplasma appare di poco meno granuloso di quello che non sia nelle cellule della superficie libera dell'intestino. I contorni laterali delle cellule sono poco distinti.

Venendo nelle porzioni più superficiali della ghiandola, le cellule vanno progressivamente aumentando in lunghezza e in larghezza (si paragonino gli elementi delle fig. 2ª *A* e 2ª *B* che vennero disegnate allo stesso ingrandimento), e, oltracciò, vanno acquistando i caratteri tipici della cellula adulta. Infatti, il nucleo si porta un po' più verso il mezzo della cellula, il protoplasma diventa un po' più granuloso, i contorni laterali del corpo cellulare si fanno più spiccati, e sulla linea che limita l'estremità libera dell'elemento, si forma l'orlo striato. Quest'ultimo è già ben evidente verso il mezzo della ghiandola, ed aumenta tanto più in ispessore quanto più le cellule sono vicine allo sbocco.

Anche nelle ghiandole rettali del cane, adunque, non si può parlare di un epitelio ghiandolare morfologicamente diverso da quello della superficie libera. È diverso l'epitelio del fondo cieco da quello della superficie libera; ma tra l'uno e l'altra ci sono tutti gli stadi di transizione, e questi si trovano ordinatamente disposti nel corpo stesso della ghiandola (1).

Quanto alle cellule *mucipare*, accenno appena alle loro modificazioni, perchè essenzialmente non differiscono da quelle che abbiamo conosciuto negli altri animali.

Nella figura 3ª *B* ho disegnato, ritraendole da un preparato indurito col liquido di Hermann, tre diverse forme cellulari tolte l'*a* dal fondo cieco, la *b* dal mezzo, la *c* dalle vicinanze dello sbocco della ghiandola.

Si vede che, quanto più si va verso la superficie, le cellule

---

(1) Anche fra le cellule epiteliche delle ghiandole rettali del cane si notano dei leucociti migranti, ma in numero relativamente non grande.

si gonfiano di muco. Nella stessa figura in *A* disegnai due cellule che dimostrano lo stesso fatto, ma che furon tolte da un preparato indurito in alcool, e conservato in glicerina. Il confronto cogli elementi disegnati in *B* darà un'idea del grado di intumidimento che, come già dissi, l'indurimento coll'alcool produce nelle cellule mucose.

Anche nel cane, poi, si può mettere in evidenza che, benchè in misura assai minore che nel coniglio, ha luogo una modificazione chimica graduata del muco secreto. Infatti, nei preparati colorati con ematossilina si scorge che l'intensità di colorazione del muco va leggermente aumentando quando dal cieco ghiandolare si procede verso lo sbocco (1).

Che queste modificazioni graduate di ambo le specie di cellule epiteliari accennino ad una genesi dell'epitelio della superficie dell'intestino da quello delle ghiandole viene confermato, anche nel cane, dallo studio delle *mitosi*.

Queste, nelle ghiandole rettali del cane, sono molto numerose; ogni ghiandola ne contiene parecchie. Il che si trova in rapporto colla continua e notevole desquamazione dell'epitelio. Infatti, nel muco che ricopre la superficie libera dell'intestino le cellule epiteliari cadute per desquamazione sono relativamente numerose; in una sezione di mucosa, p. es., dello spessore di 5-10 μ e della lunghezza di 7 mm. io ne contai una cinquantina. Non è facile dar numeri precisi, perchè le cellule desquamate si deformano, sì che talora non è possibile accertare la loro vera natura; e, d'altra parte, il loro numero deve variare di sicuro nei diversi animali, e nelle varie condizioni di uno stesso animale.

Orbene, anche nel cane le mitosi mancano affatto nell'epitelio della superficie libera dell'intestino. Esse stanno raggruppate nel terzo profondo delle ghiandole, e principalmente nei loro fondi ciechi. Nel terzo medio sono rare, e, a differenza di quanto osservammo nelle ghiandole del retto e del colon nel coniglio,

(1) Questa differenza di intensità di colorazione nelle diverse parti della ghiandola si osserva anche nei preparati induriti in alcool e colorati colla soluzione acquosa di safranina. — A questo riguardo si noti, che il colore giallo che, al solito, acquista con questo trattamento la sostanza mucosa, si perde quando, per conservare il preparato, s'aggiunge la soluzione acquosa di zucchero.

nel terzo superficiale non se ne trovano più. — Il focolaio più attivo di produzione cellulare è, quindi, il fondo cieco.

Riguardo alle mitosi delle ghiandole del cane c' è però un fatto che presenta un alto interesse per lo studio dello sviluppo delle cellule mucipare; ed è questo, che, a lato di numerose mitosi a corpo cellulare chiaro, protoplasmatico, non differenziato, le quali quindi, non si saprebbe se assegnare piuttosto alla serie dell'epitelio protoplasmatico, o a quella del muciparo, esistono delle mitosi meno numerose, che *contengono nel loro protoplasma della sostanza mucosa, e che, per questo loro carattere, si appalesano quali elementi di rigenerazione dell'epitelio mucoso.*

La mia attenzione su questi elementi venne primamente attratta mentre stavo esaminando delle sezioni longitudinali di ghiandole indurite nell'alcool; e l'osservazione fu confermata in altre ghiandole indurite sia in sublimato che in acido picrico. Fra gli altri elementi tappezzanti il tubulo ghiandolare io vedeva non di rado delle cellule appajate, più sottili e più corte delle cellule epiteliari comuni circonvicine.

Il sospetto che queste cellule fossero di natura mucosa, mi venne dall'osservare che il loro protoplasma era chiaro, e percorso da un sottile reticolo come quello proprio della sostanza mucosa; così come il sospetto che fossero elementi in mitosi mi nacque nel vedere: 1° che queste cellule erano sempre appajate, e così simili l'una all'altra; 2° che erano applicate l'una contro l'altra, mentre le cellule mucose adulte, in qualunque punto della ghiandola si trovino, sono sempre divise l'una dall'altra da interposte cellule protoplasmatiche; 3° che erano più piccole delle cellule mucose comuni; 4° che i loro nuclei non erano, come nelle cellule mucose, spinti all'estremo della cellula applicato contro la membrana, ma si trovavano posti alle parti laterali ed opposte delle cellule rispettive. — Perchè il sospetto diventasse certezza, però, io dovevo accertare 1° la natura mucosa della sostanza contenuta nella cellula; 2° l'esistenza delle forme corrispondenti agli altri stadi del processo cariocinetico.

La natura mucosa della sostanza venne messa fuor di dubbio dalle reazioni coloranti. Essa, infatti, precisamente come il muco delle vere cellule mucose: 1° ingialliva quando, in sezioni indurite semplicemente nell'alcool, veniva trattata con soluzione acquosa di safranina; 2° si colorava fortemente in violetto od azzurro, quando, su sezioni di pezzi induriti coi liquidi di Flemming

o di Hermann, veniva trattata con ematossilina (fig. 4ª d) o con azzurro di metilene. — Fra queste reazioni ha maggior valore quella coll'ematossilina, perchè (massime se l'indurimento venne ottenuto col liquido di Hermann, e, dopo la colorazione coll'ematossilina, la sezione venne lavata con alcool leggermente acidulato con acido cloridrico prima di chiuderla in balsamo o damar) con essa la sostanza mucosa risulta colorata intensamente, mentre ogni altra parte, ogni altro elemento della mucosa resta perfettamente incoloro.

Quanto alle varie forme rappresentanti i diversi stadi del processo cariocinetico io le trovai facilmente, e pienamente dimostrative, colla doppia colorazione esposta nella nota a pag. 19. La colorazione violetta che assumono le mitosi mucose permette di distinguerle a prima vista dalle mitosi comuni. — E qui è da notare, che per questa ricerca convengon meglio le sezioni trasversali, anzichè le sezioni longitudinali delle ghiandole. La ragione ne è la seguente: mentre le mitosi comuni sono sparse, come si disse, in tutto il terzo profondo della ghiandola, le mitosi delle cellule mucose si *trovano soltanto fra quelle cellule epiteliari che rivestono l'estremo del fondo cieco*. In una sezione longitudinale della ghiandola, quindi, il fondo cieco presenta all'osservatore una serie sola (vista di coltello) delle cellule epiteliari che lo rivestono, sicchè tra queste poche cellule di raro capita di vedere una mitosi mucosa. Quando, invece, le ghiandole vengano sezionate trasversalmente, quando cioè la mucosa venga decomposta in tante sezioni parallele alla sua superficie, le sezioni che interessano gli strati profondi e che comprendono così i fondi ciechi, ci presentano questi ultimi nella loro interezza, sicchè tutto intero o quasi intero ci appare lo strato epiteliare che li riveste.

Nella figura 4ª ho ritratto alcune delle mitosi di cellule mucose che si trovano ne' miei preparati. Vi si vedono diverse figure (*a a a'*) corrispondenti agli stadi di piastra equatoriale (vista di coltello o di fronte) e di doppio astro (*c c c' c'*) dal principio della divisione dei due gruppi di filamenti fino alla compiuta scissione della cellula. — Non ho mai osservato cellule mucose che contenessero il nucleo in mitosi allo stadio di gomitolo. Può darsi che ciò dipenda da insufficienza di osservazione; ma se considero il numero grande di preparati che ho studiato, propendo piuttosto a ritenere che ciò si debba a che, in questo primo stadio del pro-

cesso di cariocinesi, le cellule non hanno ancora fabbricato nel loro seno della sostanza mucosa, e quindi il loro corpo è ancora costituito da solo protoplasma. Occorrerebbero, però, ulteriori osservazioni per decidere la questione.

Tutti questi nuclei in mitosi stanno, come quelli delle cariocinesi comuni, più all'interno, cioè verso il lume ghiandolare, dei nuclei delle cellule in riposo.

Ho detto più sopra che le cellule gemelle presentano parecchi caratteri che le differenziano dalle cellule mucose tipiche. Fra quelle e queste, però, ci sono tutti gli stadi di passaggio. Infatti, mentre da principio le cellule gemelle sono più corte dello strato epiteliare cilindrico in cui stanno, sì che colla loro estremità profonda non arrivano a toccare la membrana ghiandolare (fig. 2ª *A*, 4ª *d*), più tardi gradatamente si allungano fino a toccare quest'ultima; i nuclei che stavano disposti lateralmente, gradatamente si spostano verso l'estremità profonda (fig. 4ª *e*) e vanno a disporsi, più o meno schiacciati, al suo apice; infine, mentre dapprima le due cellule stavano applicate l'una contro l'altra, poi, a poco a poco vengono distaccate l'una dall'altra dall'interporsi delle cellule protoplasmatiche che le circondano. È a questo modo, che da due cellule gemelle si formano due cellule mucose complete, sia per ciò che riguarda la costituzione, sia per ciò che spetta alla forma, alla grossezza, e alla disposizione in cui stanno nel tubulo ghiandolare.

La struttura filamentosa della sostanza cromatica delle mitosi mucose è poco evidente qualunque sia stato il metodo di indurimento e di colorazione adoperato. Questo però è un fatto comune a tutte le mitosi dell'epitelio intestinale; e, ad ogni modo, i nuclei mitotici delle cellule mucose sono, per l'aspetto, perfettamente simili a quelli delle mitosi comuni che loro stanno vicine. — Nella fig. 4ª *b* ho disegnato una piastra equatoriale che presenta qualche traccia del fuso acromatico. È un caso assai raro, poichè in generale, in queste ghiandole del cane, il fuso acromatico non si vede nè nelle mitosi mucose, nè nelle più belle mitosi protoplasmatiche.

Anche nel cane, adunque, la derivazione dell'epitelio dell'intestino crasso da quello delle sue ghiandole tubulari vien dimostrata: 1° dalle trasformazioni graduate che le cellule epiteliari, sia protoplasmatiche che mucose, presentano, andando dai fondi ciechi ghiandolari verso gli sbocchi ghiandolari; 2° dall'esservi

elementi in mitosi soltanto nelle ghiandole. — Nel cane, poi, merita d'esser notato: 1° che la rigenerazione epiteliare ha luogo soltanto nel fondo cieco ghiandolare, mentre nel coniglio ve ne sono due principali focolai, l'uno al fondo cieco, l'altro al colletto ghiandolare: 2° che, oltre alle mitosi comuni, vi sono delle mitosi il cui corpo contiene già sostanza mucosa, e che quindi servono di certo alla rigenerazione delle cellule cosidette caliciformi.

Queste mitosi mucose furono da me già viste nel colon del coniglio (1); ma nel cane esse sono assai più evidenti e numerose, ed anche in esso si trovano esclusivamente nel fondo cieco della ghiandola. È qui, adunque, che senza dubbio risiede il focolaio di rigenerazione delle cellule caliciformi (2).

GHIANDOLE DEL DUODENO.

Ghiandole duodenali del cane.

Per lo studio delle ghiandole tubulari del duodeno a quelle del coniglio, ho preferito le ghiandole del cane; le prime, infatti, sono assai tortuose, sicchè mal si prestano all'esame comparativo delle modificazioni che presentano gli epiteli nelle diverse porzioni del tubulo, mentre a ciò sono adatte le seconde che sono lunghe, diritte, ed impiantate verticalmente nella mucosa.

Quanto ai metodi d'indurimento, colorazione e conservazione, ho adoperato tutti quelli già citati antecedentemente; tra essi trovai specialmente utile l'indurimento col semplice alcool, che meglio d'ogni altro liquido conserva i caratteri e i contorni dell'epitelio (3), e la colorazione con picrocarmino (con conservazione in glicerina) o con safranina (con conservazione in zucchero di canna). La conservazione in resina si deve, come al solito, adoperare quando interessa lo studio delle mitosi.

(1) Bizzozero, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXIV, fig. 12 della tavola.

(2) Credo non superfluo il riferire, che nel muco che riempie il lume delle ghiandole rettali del cane sogliono trovarsi numerosissimi bacilli, che arrivano fino al fondo cieco. Di ciò mi occuperò in altro capitolo del lavoro.

(3) Nell'indurimento con alcool e conservazione in glicerina devesi naturalmente tener conto dell'ingrossamento che subiscono i blocchi di sostanza mucosa (pag. 18). Essendo, però, in queste ghiandole scarse le cellule mucose, ciò non guasta, anzi serve a rendere più evidenti le cellule stesse.

Le ghiandole (fig. 5ª) incominciano all'imbasso con un fondo cieco leggermente ingrossato, claviforme; attraversano leggermente ondulose tutto lo spessore della mucosa, tenendosi parallele fra loro, e separate l'una dall'altra da un certo intervallo occupato dallo stroma connettivo della mucosa (*d*); arrivate a poca distanza dalla superficie della mucosa si fondono di solito tra di loro, in modo che di due ghiandole (*c c*) si forma un solo largo tubulo che sbocca in corrispondenza della base dei villi intestinali. Lo stroma della mucosa è ricco di leucociti, che sono specialmente numerosi al di sotto dei fondi ciechi ghiandolari (*e*).

Il lume delle ghiandole è piuttosto ampio, specialmente in corrispondenza del fondo cieco. Esso è riempiuto da una massa che, indurita nell'alcool, ha aspetto mucoso, o, piuttosto, colloide, e pare più consistente nel fondo cieco (fig. 6ª *A*), che nella porzione superiore. In essa si osservano sempre degli ammassi di granuli, e dei leucociti i cui nuclei s'imbibiscono fortemente colle sostanze coloranti, e che sono simili a quelli che stanno nello stroma della mucosa. Al par di questi, ora contengono un solo nucleo ovale o rotondeggiante, ora 2 o 3 piccoli nuclei rotondi. Sono palesemente elementi che provengono dallo stroma, e che vengono eliminati col secreto ghiandolare. Infatti, non pochi di questi leucociti si vedono mentre stanno attraversando l'epitelio ghiandolare.

Quanto alle mitosi dell'epitelio, come è noto, esse sono molto numerose. Come, però, già ebbi occasione di notare altre volte (1), esse non sono distribuite uniformemente nel tubulo ghiandolare; sono assai numerose nella metà profonda della ghiandola, e quindi anche nel suo fondo cieco; scarse, invece, nella sua metà superficiale, quantunque alcune rare si vedano arrivare fino in immediata vicinanza dello sbocco ghiandolare.

Vediamo, ora, la struttura delle cellule epiteliari. Anche qui abbiamo delle cellule protoplasmatiche e delle cellule mucose; delle une e delle altre, adunque, dobbiamo partitamente discorrere, mettendole in rapporto colle forme epiteliari che rivestono i villi intestinali, con cui esse si trovano in non interrotta continuazione.

Supponiamo d'avere una ghiandola sezionata longitudinalmente:

Cellule protoplasmatiche. — Se noi cominciamo dal para-

(1) BIZZOZERO e VASSALE, l. c., p. 172.

gonare le cellule dei fondi ciechi con quelle dei villi, troviamo differenze abbastanza notevoli nelle dimensioni e nella struttura, tantochè potremmo dar ragione a coloro che ammettono l'epitelio delle ghiandole essere diverso da quello delle villosità. Ma se noi, incominciando il nostro studio dai fondi ciechi, ci innalziamo a poco a poco nella ghiandola fino ad arrivare al suo sbocco, e poi continuiamo sul villo, allora vediamo che in nessun punto c'è un limite netto fra una forma epiteliare e l'altra; l'epitelio si modifica per una serie graduata di forme di transizione.

Nel fondo cieco (fig. 6ª *A*) le cellule sono piuttosto lunghe, di forma piramidale, colla base rivolta alla superficie d'impianto, e l'apice tronco in corrispondenza dell'estremità libera. Il protoplasma è finamente granuloso. I nuclei stanno disposti in vicinanza della base, e contengono 2-3-4 grossi nucleoli.

Nelle cellule che stanno immediatamente più sopra, la forma è già modificata, giacchè la loro estremità libera si è fatta più larga, e molte cellule presentano la loro metà basale incurvata alquanto, e terminata con una estremità assottigliata e diretta all'imbasso (*b*); altre cellule, però, hanno anche l'estremità basale tagliata tronca (*c*).

Venendo più in su nella ghiandola (fig. 6ª *B*) fino al suo sbocco, le cellule quasi non mutano di carattere; esse sono disposte perpendicolarmente all'asse della ghiandola e quindi la loro estremità basale termina tronca, e la loro forma diventa così più regolarmente rettangolare (da quelle cellule all'infuori che sono compresse lateralmente dalle cellule mucose), i nuclei si conservano nella metà basale, e il protoplasma permane finamente granuloso. L'unico mutamento essenziale avviene nella loro estremità libera. Questa nel fondo cieco è limitata da un contorno semplice, sottile; venendo più in su, comincia ad apparire alla sua superficie libera uno straterello pallido, che a discreto ingrandimento pare omogeneo, ma a forte ingrandimento presenta una fina striatura parallela all'asse longitudinale della cellula. A metà della lunghezza della ghiandola questo strato è già ben sviluppato (fig. 6ª *B*) e la sua striatura più netta; esso ha assunto tutto l'aspetto di quell'orlo striato che è caratteristico dell'epitelio assorbente dell'intestino, e come tale si continua per tutto il resto della ghiandola.

Giunto alla base dei villi, l'epitelio si continua su di essi, mantenendo i suoi caratteri essenziali; le sole differenze consistono in ciò che (fig. 6ª *C*) le cellule si fanno un po'più strette e

più lunghe; l'orlo lucente aumenta leggermente in grossezza, e i bastoncini che lo compongono si fanno un po' più spiccati: e, infine, che il nucleo cellulare si allontana alquanto dalla base, e arriva fin verso la metà della cellula.

Come si vede, la differenza principale fra le cellule dei fondi ciechi ghiandolari e quelle dei villi sta nell'assenza e nella presenza dell'orlo lucente; ma questo non può essere un criterio differenziale fra l'epitelio ghiandolare e quello della superficie libera, perchè l'orlo lucente esiste anche nell'epitelio della ghiandola per più di metà della lunghezza di questa, e, inoltre, lo si vede originare da una modificazione che succede *gradatamente* alla estremità libera delle cellule.

Cellule mucose. — Anche queste hanno diverso aspetto a seconda del punto ove le consideriamo. Nel fondo cieco (fig. 6ª *A d*) sono piramidali, colla base rivolta alla membrana propria. La loro metà esterna è costituita dal protoplasma contenente il nucleo ovale o rotondeggiante; la metà interna, invece, è ripiena di muco attraversato dal solito reticolo. All'estremità libera le cellule sono aperte, per poter svuotare nel lume ghiandolare il loro secreto.

Un poco più in su (fig. 6ª *A*, *e*) le cellule conservano ancora, press'a poco, la stessa forma, ma il loro nucleo appare circondato da poco protoplasma, ed è spinto verso l'estremità basale della cellula.

Più in su ancora le cellule mutano affatto. Vanno gradatamente ingrossando, e tendendo così alla forma ovale o sferica (figura 6ª *B*, *a*) in modo da rappresentare un calice senza fusto e senza piede; il loro nucleo è spinto e schiacciato alla periferia, e tutto lo spazio limitato dalla membrana cellulare è occupato dal muco. In qualche caso il protoplasma appare ancora al di sotto del nucleo (fig. 6ª *B*, *b*) sotto la forma di un piccolo cono colla punta rivolta verso la membrana propria della ghiandola. Il muco contenuto nella cellula è continuo con quello raccolto nel lume della ghiandola. Il nucleo, schiacciato com'è, quando è visto di coltello appare sotto la forma di una sottilissima semiluna piuttosto omogenea e lucente, e colorata assai intensamente dai soliti coloranti nucleari; quando sia visto di piatto, invece, si presenta ancora ovale, finamente granulato, fornito di nucleoli.

Le cellule mucose arrivano fino allo sbocco ghiandolare con questi caratteri, diventando, però, sempre più grosse e distese dal muco.

Giunte sul villo, la loro forma cambia rapidamente: al pari delle cellule protoplasmatiche diventano più sottili e più lunghe (fig. 6ª C): si assottiglia specialmente la metà basale delle cellule, acquistando così l'elemento la forma di un calice fornito di fusto, ma senza piede, e nel fusto è contenuto il nucleo. Quanto a questo, esso ha seguìto in parte le modificazioni di forma della cellula, ed è diventato stretto e lungo, disposto col suo asse maggiore parallelo all'asse maggiore della cellula; si conserva però ancora fortemente colorabile e d'aspetto lucente.

Dopo quanto abbiamo visto succedere nelle ghiandole del retto e del colon del coniglio, il paragone di queste varie forme delle cellule mucose nel cane ci permette di ritenere, che esse siano dovute ad una graduata trasformazione di quelle cellule mucose piramidali che stanno nei fondi ciechi ghiandolari. E questa opinione viene confermata anche qui dal fatto, che la modificazione morfologica delle cellule procede di pari passo con una modificazione chimica del muco da esse secreto.

A questo riguardo devo notare, che il muco di queste cellule del cane non ha le stesse reazioni coloranti di quello del retto del coniglio; esso non si colora col metilverde e colla vesuvina, Si colora bensì colla safranina, ma a ciò è necessario adoperare una soluzione acquosa concentrata (1).

Con questa, come già ebbi occasione di dire precedentemente, si ottiene un differenziamento assai elegante: la sostanza fondamentale del connettivo rimane incolora, tutti i nuclei del tessuto acquistano un color giallo di vesuvina, il corpo delle cellule epiteliari, delle fibre muscolari liscie e delle cellule dei gangli di Meisner e di Auerbach diventa di color rosso fucsina, e il muco spicca per un color giallo chiaro (2).

Orbene, esaminando una sezione così colorata delle ghian-

---

(1) La sezione di mucosa, che deve essere sottilissima (intorno ai 5 μ), viene spogliata dalla paraffina colla trementina, passata in alcool assoluto, e poi trasportata con una spatolina in una goccia d'alcool (che le conserva una certa rigidità assai utile per praticare il trasporto) sul portoggetti, ove viene poi colorata sotto il coproggetti, come venne indicato a pag. 19. All'alcool si sostituisce dell'acqua, ed a questa la soluzione acquosa concentrata di safranina.

(2) Non tutte le safranine del commercio danno questo prezioso differenziamento dei varii elementi. Io l'ottenni colla safranina della fabbrica Bindschedler e Busch di Basilea. — Non ottenni, invece, alcuna colorazione del muco colla safranina *O* fornitami dal Dott. Grübler di Lipsia.

dole, è facile l'accorgersi che l'intensità di colorazione del muco varia assai; nei fondi ciechi esso è appena giallognolo rossiccio, mentre un poco più in su si fa giallo più schietto, e più in su ancora, giallo chiaro spiccatissimo. Ciò si riferisce tanto al muco contenuto nelle cellule, quanto a quello che riempie il lume ghiandolare, o sta sulla superficie dei villi intestinali.

Anche qui, adunque, come nel colon e nel retto, abbiamo una graduata modificazione chimica del secreto delle cellule mucose, che comincia nei fondi ciechi, e progredisce fino alla superficie libera dell'intestino. È nei fondi ciechi che hanno origine le più giovani cellule mucose. Le numerose scissioni per mitosi che vi hanno luogo danno origine a degli elementi cilindrici o piramidali, che hanno diverso destino: alcuni restano cellule protoplasmatiche, altri invece si trasformano in cellule mucose. I primi stadi di questa trasformazione sono difficili a vedersi, poichè i piccolissimi granuli di muco primamente prodotti vengono nascosti dalla granulosità del protoplasma in cui sono immersi. Le forme, quindi, che predominano nei fondi ciechi ci presentano di solito le cellule mucose a stadio già relativamente avanzato. Facendo, però, delle sezioni della mucosa trasversali alle ghiandole, ed estremamente sottili, e colorandole colla safranina, si riesce non di rado a vedere (in quelle sezioni che hanno colpito la ghiandola immediatamente al disopra dei fondi ciechi) delle cellule cilindriche in cui la trasformazione è appena cominciata (fig. 7ª, *a*); le cellule sono ancora per forma, nucleo, ecc. simili a cellule protoplasmatiche vicine; da queste, però, si distinguono per dei granuli di muco che, accumulandosi nella loro metà interna, hanno ridotto qui il loro protoplasma ad una semplice trabecolatura reticolare.

Il successivo mutamento di forma che avviene nelle cellule mucose è determinato principalmente dal raccogliervisi di molto muco, che fa arrotondare le cellule e schiaccia alla base di essa il nucleo e lo scarso protoplasma. Dico *principalmente*, e non completamente, perchè sulle forme delle cellule tanto protoplasmatiche che mucose deve aver influenza anche la pressione che si esercita sulle loro superficie.

Infatti, avendosi nella metà profonda del tubulo ghiandolare un'attiva moltiplicazione per mitosi, gli elementi devono comprimersi vicendevolmente, e gli elementi compressi devono tendere continuamente a spostarsi verso il punto di minor pressione, cioè

verso la superficie libera dell'intestino, dove la continua eliminazione di cellule rende libero lo spazio per le cellule sopravenienti.

Immediatamente al di sopra del fondo cieco questa pressione ha luogo prevalentemente sulle pareti laterali delle cellule, *cioè in senso perpendicolare all'asse maggiore della ghiandola*. Di ciò fa fede la forma delle cellule e dei loro nuclei; infatti, paragonando una sezione longitudinale (fig. 6ª A) di questa regione delle ghiandole con una trasversale (fig. 7ª), si vede che in questa seconda le cellule sono più strette e lunghe, ed i nuclei pure più allungati. Il che appare anche quando in una sezione longitudinale si esaminino di fronte le basi d'impianto delle cellule ghiandolari (fig, 8ª) ; queste basi hanno il loro asse più lungo parallelo all'asse principale della ghiandola.

La forma curiosa delle cellule *b* della fig. 6ª A, che è frequentissima nei fondi ciechi, e che è caratterizzata da ciò che la estremità libera dell'elemento è più alta dell'estremità basale, e che quest'ultima è curva e va a finire assottigliata sotto la base della cellula sottogiacente, trova, come è già ben noto, una facile spiegazione nello spostamento delle cellule verso lo sbocco ghiandolare ; giacchè questo può compiersi più facilmente dalla estremità libera, che da quella basale, la quale si trova applicata sulla membrana propria della ghiandola.

Prescindendo dal fondo cieco, nelle altre porzioni del tubulo ghiandolare la direzione dell'asse di maggior pressione è variabile, probabilmente in rapporto col transitorio formarsi e poi svanire, di centri di moltiplicazione cariocinetica. Si è per ciò che nei diversi tratti del tubulo ghiandolare, ora le cellule epiteliari appaiono schiacciate nel senso trasversale, come nei fondi ciechi, ora nella direzione dell'asse longitudinale della ghiandola, ora, finalmente, hanno press'a poco eguali i loro diametri trasversali.

Come ho già detto, le cellule sia protoplasmatiche che mucose della ghiandola sono in generale più corte di quelle che rivestono i villi. Credo che ciò sia in rapporto colla pressione che il muco secreto esercita sull'epitelio secretore. Questa pressione il muco racchiuso nel lume la esercita di certo sulla superficie libera delle cellule epiteliche ghiandolari; e deve tendere a raccorciarle. Mentre, quando le cellule sono giunte sui villi, la pressione esercitata dal secreto è cessata, e su di esse non agisce più che la pressione laterale che esercitano reciprocamente le une sulle

altre e che tende ad allungarle. Del resto, sulla superficie del villo la grossezza e la lunghezza di una medesima cellula (sia protoplasmatica che mucosa) varia assai, come è già noto, a seconda dello stato di contrazione di quel punto del villo su cui risiede.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1ª — Ghiandola tubulare del retto di *mus musculus* (Liquido di Kleinenberg, vesuvina, damar). Si scorgono due mitosi *a a*, e si vedono le modificazioni che presentano le cellule mucipare (*b*, *b'*, *b''*) andando dal fondo cieco verso lo sbocco della ghiandola. Si vedono anche le modificazioni graduate delle cellule protoplasmatiche, che nella porzione superficiale della ghiandola diventano più scure e granulose. Ingr. di 290 *d*.

» 2ª — Porzioni di sezioni longitudinali di ghiandole del retto di cane (Liquido di Hermann, colorazione doppia colla safranina e l'ematossilina, damar). *A* Fondo cieco. Vi si vede l'epitelio ghiandolare, e, nel lume, il muco secreto. Nell'epitelio si scorge una mitosi protoplasmatica *a*, e più sotto due cellule gemelle mucose *b*. — *B* Dal terzo superficiale della ghiandola, poco lontano dallo sbocco. Mancano le mitosi, le cellule protoplasmatiche sono più numerose che nel fondo cieco. Entrambe le forme cellulari, poi, sono più grosse, ed a contorni più netti che nel fondo cieco. — 580 *d*.

» 3ª — Ghiandole del retto di cane. Varie forme di cellule mucose. *A* Da mucosa indurita nell'alcool, e sezioni conservate in glicerina: *a* cellule del fondo cieco, *b* cellula poco lontano dallo sbocco ghiandolare. — *B* Da mucosa indurita nel liquido di Hermann, colorazione doppia con ematossilina e

Atti R. Accad. delle Sc. di Torino - Vol. XXVII

Lit. Salussolia, Torino

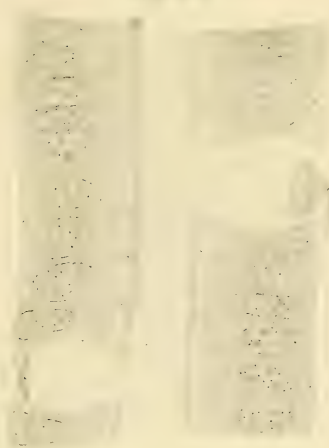
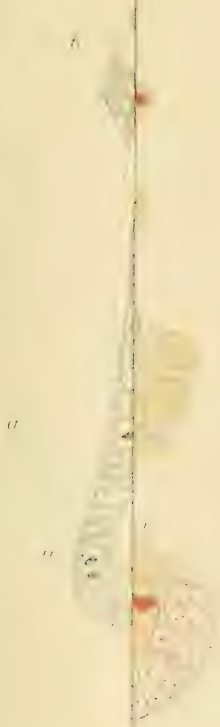
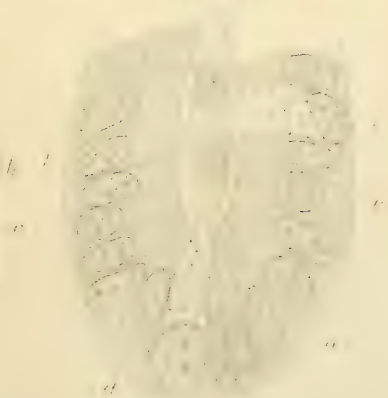



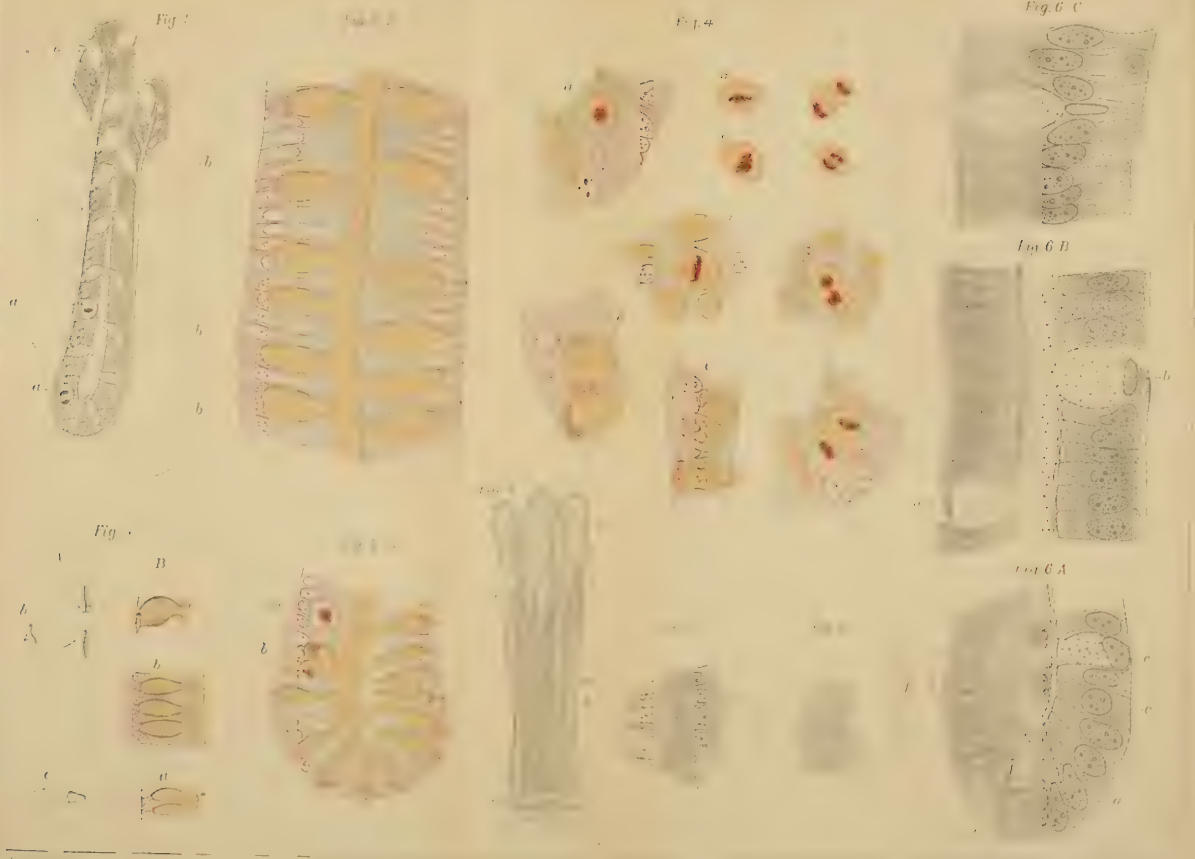
Fig. 4
Fig. 6 C
Fig. 6 B
Fig. 6 A

safranina. *a* cellula del fondo cieco, *b* cellule verso il mezzo della ghiandola, *c* cellula poco lontano dallo sbocco ghiandolare. — 400 *d*.

Fig. 4ª — Ghiandole del retto di cane; mitosi di cellule mucose (Liquido di Hermann, colorazione doppia con safranina ed ematossilina). Le figure sono ritratte in parte da sezioni trasverse, in parte da sezioni longitudinali delle ghiandole. *a a*. Piastre equatoriali. — *b* cellula con piastra equatoriale ed accenno al fuso acromatico. Nelle cellule mucose circostanti a questa non si vede il nucleo, che giaceva in un piano più basso (lo stesso fatto si nota nelle figure *a'* e *c' c'*). — *c c c' c'* diastri. — *d* cellule gemelle con nuclei laterali. — *e* cellule gemelle con nuclei che si vanno portando all'estremità profonda delle cellule rispettive. In *e* venne disegnato il fino reticolo che attraversa la sostanza mucosa; nelle figure *a b c d* per brevità venne ommesso. — 820 *d*. (Apocrom. 1,5^{mm} di Zeiss).

» 5ª — Sezione verticale di duodeno di cane. Indurimento nell'alcool. *a* villi contratti, coi loro muscoli lisci longitudinali. — *b* ghiandole tubulari. — *c c* confluenza di due ghiandole in un solo condotto sboccante alla base dei villi. — *d* tessuto linfoide fra le ghiandole. — *e* strato linfoide sotto i fondi ciechi ghiandolari. — *f* e *g* i due strati della *muscularis mucosae*. — *i* sottomucoso. — Ingr. di 25 *d*.

» 6ª — Ghiandole tubulari del duodeno di cane (Indurimento nell'alcool, picrocarmino, glicerina). *A* fondo cieco. — *B* ghiandola verso la metà della sua lunghezza. *C* epitelio del villo. Per la spiegazione veggasi il testo. Ingr. di circa 860 *d*. (Apocrom. 1,5^{mm} di Zeiss).

» 7ª — Duodeno di cane. Sezione trasversa del fondo cieco di una ghiandola tubolare (Alcool, paraffina, safranina acquosa, soluzione di zucchero). Vedi il testo. Ingr. come nella figura antecedente.

Fig. 8ª — Duodeno di cane (Alcool, picrocarmino, glicerina). Da ghiandola sezionata longitudinalmente, ed esaminata immediatamente al disopra del fondo cieco. L'obbiettivo venne aggiustato in modo da vedere le cellule protoplasmatiche in sezione ottica trasversale, sicchè l'asse maggiore delle cellule è parallelo all'asse del microscopio. *a* linea di contorno della ghiandola. — *b* cellule ghiandolari. Vedi il testo.

Sul metodo dei tre elettrodinamometri per la misura dell'energia dissipata per isteresi e per correnti di Foucault in un trasformatore;

Nota del Socio GALILEO FERRARIS

Nella seduta del 4 dicembre 1887 io aveva l'onore di leggere davanti a questa R. Accademia una mia memoria « *Sulle differenze di fase delle correnti, sul ritardo dell'induzione e sulla dissipazione di energia nei trasformatori* » (*). In quella memoria, dopo di aver discusso ed interpretato i risultati di varie serie di misure sulle differenze di fase tra le due correnti, primaria e secondaria, di un trasformatore, io prendeva in esame le relazioni esistenti tra la detta differenza di fase e la dissipazione di energia che ha luogo nel trasformatore in causa delle correnti di Foucault e dell'isteresi. Arrivavo, tra le altre cose, ai seguenti risultati:

1° La corrente secondaria presenta un ritardo di fase rispetto a quella che si avrebbe qualora non esistessero nè le correnti di Foucault, nè l'isteresi;

(*) *Memorie della Regia Accademia delle Scienze di Torino*, Serie II, Tom. XXXVIII, pag. 415-464.

2° Tale ritardo di fase è in relazione con una perdita, o dissipazione di energia, che ha luogo nel trasformatore;

3° Tra il ritardo di fase e la dissipazione di energia esiste una relazione semplice, la quale è sempre la stessa, qualunque sia la causa del ritardo e della dissipazione. Se adunque, come è il caso nel trasformatore, la dissipazione di energia è dovuta in parte alle correnti di Foucault ed in parte all'isteresi nel nucleo di ferro, il ritardo di fase rappresenta l'effetto complessivo di queste due cause;

4° Se la differenza di fase tra le due correnti primaria e secondaria viene misurata per mezzo di tre elettrodinamometri, dei quali il primo abbia entrambe le spirali, la fissa e la mobile, nel circuito primario, il secondo le abbia entrambe nel circuito secondario, ed il terzo abbia una spirale nel primario e l'altra nel secondario, si deduce dai risultati precedenti che le letture fatte sui tre elettrodinamometri sono legate da relazioni semplicissime coll'energia dissipata, e quindi anche colla totale energia spesa nella spirale primaria, col coefficieute di rendimento del trasformatore, ecc.

Nella mia memoria dimostravo tali relazioni, le discutevo minutamente, ne deducevo una serie di conseguenze, e ne facevo l'applicazione ad una serie di casi sperimentali, nei quali, variando di volta in volta il nucleo di ferro del trasformatore, facevo variare fra limiti molto estesi il ritardo di fase e la dissipazione dell'energia. E cenni assai larghi di quel mio lavoro venivano pubblicati, oltrechè nelle principali riviste periodiche di elettrotecnica, nei trattati di Fleming (*) e di Kittler (**).

Le relazioni da me dimostrate sono comprese nella formola seguente, o si derivano immediatamente da essa:

Se si rappresenta con P l'energia dissipata in $1''$ complessivamente per le correnti di Foucault e per l'isteresi,

con Q la quantità di energia svolta nello stesso tempo, cioè in $1''$, nel circuito secondario,

---

(*) J. A. Fleming, M. A., D. Sc. (Lond.), *The alternate current transformer in theory and practice* (London), Vol. I, pag. 305-324. (La formola (25') citata nel testo si trova riprodotta a pag. 319).

(**) E. Kittler, *Handbuch der Elektrotechnik*, Stuttgard, II Band. 1e Hälfte, pag. 273-294. (La formola è a pag. 276, ed una parte della discussione è a pag. 292-94).

con $\frac{\mu}{\lambda}$ il rapporto tra il coefficiente d'induzione mutuo tra le due spirali primaria e secondaria ed il coefficiente di induzione propria della spirale secondaria,

con h_1, h_3, h_2, le costanti dei tre elettrodinamometri, con α, β, γ le letture simultanee fatte sui medesimi e con a, b, c, le tre letture ridotte ad una medesima costante, ossia:

$$a = \frac{\alpha}{h_1}, \quad b = \frac{\beta}{h_3}, \quad c = \frac{\gamma}{h_2},$$

si ha

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \text{(*)} \qquad \ldots\ldots (25')$$

L'avere io misurato le differenze di fase col metodo dei tre elettrodinamometri senza sapere. e quindi senza accennare che esso era già stato indicato dal sig. Th. H. Blakesley (**) indusse questo elettricista a leggere nella *Physical Society* di Londra, il 10 marzo 1888, una nota, colla quale egli rivendicava a sè la priorità dell'idea di tale metodo di misura. E la sua nota fu riprodotta nel *Philosophical Magazine* (***) e poi in parecchie altre riviste.

La rivendicazione del Blakesley però si estendeva soltanto al metodo di misura delle differenze di fase da me ritrovato e prescelto, e non toccava, nè avrebbe potuto toccare, il corpo del mio lavoro, ossia la discussione dei risultati delle esperienze, lo studio delle relazioni tra le differenze di fase e la dissipazione di energia, la determinazione del coefficiente di rendimento del trasformatore, lo studio sperimentale degli effetti delle correnti di Foucault, ecc., risultati, relazioni, determinazioni, studii che in gran parte sono

---

(*) Formola segnata col n° (25') a pag. 437 del volume XXXVIII, serie II delle *Mem. Acc. Sc. Tor.*, ed a pag. 25 dell'estratto a parte.

(**) *The Electrician*, 2 ottobre 1885. — Giova però qui notare che non risulta che il Blakesley avesse sperimentalmente fatto uso del metodo. Egli inoltre non suggerì l'uso di tre elettrodinamometri se non nelle pubblicazioni posteriori alla mia.

(***) Serie 5ª, vol. XXV, pag. 295, aprile 1888.

appunto compendiati nella formola su esposta e nelle sue conseguenze.

Orbene, lo stesso Mr. Th. H. Blakesley, due mesi dopo di aver pubblicato la rivendicazione sovraccennata e di avere dimostrato con ciò di avere conoscenza del mio lavoro, leggeva nella stessa *Physical Society*, nella seduta del 12 maggio 1888 (*), una sua memoria col titolo: « *On magnetic lag*, » nella quale, senza alcun accenno al mio precedente lavoro, ridimostrava le stesse cose e ripresentava le stesse formole.

Di ciò io non mossi accusa all'egregio collega, al quale allora poteva servire di giustificazione il fatto che la mia memoria originale era scritta in lingua italiana. Non gli mossi accusa nemmeno più tardi, quando, e per i riassunti della mia memoria che erano comparsi numerosi in inglese ed in altre lingue sulle riviste scientifiche, e per i larghi brani di essa pubblicati nei notissimi trattati del Fleming (**) e del Kittler (***), la mia precedenza doveva essere venuta a sua cognizione. E non intendo di muovere accusa nemmeno adesso, perchè questioni personali come questa non interessano punto la scienza, ed hanno quindi agli occhi miei, anche quando mi toccano direttamente, una importanza affatto secondaria.

Ma in questi ultimi tempi il mio metodo per misurare l'energia dissipata, l'energia spesa nella spirale primaria ed il rendimento di un trasformatore ha ricevuto applicazioni sommamente importanti per opera del prof. Ayrton, di J. F. Taylor e di altri, e, ciò che più monta, il prof. Ayrton ed il sig. J. F. Taylor hanno pubblicato una memoria (****) colla quale hanno dimostrato che la formola (25'), da essi attribuita al Blakesley, è vera anche quando le correnti non sono sinusoidali ed è perciò affatto generale. Dopo tale pubblicazione anche il metodo di misura dell'energia dissipata, che io adoperai pel primo, e tutte le deduzioni che ne feci nel lavoro sovracitato, acquistano maggiore ge-

(*) Vedi: *Philosophical Magazine*, 5ª serie, vol. XXVI, pag. 34 e seguenti.

(**) Fleming, op. cit., pag. 319.

(***) Kittler, op. cit., pag. 288-94.

(****) *Proof of the generality of certain formula published for a special case by Mr. Blakesley*. By Prof. W. E. Ayrton, F. R. S., and J. F. Taylor. — *Philosophical Magazine*, april 1891, pag. 354.

neralità e maggiore importanza. E ciò mi impone il dovere di ricordare qui, come ora faccio, le suesposte date. Se ciò costituisce per me una rivendicazione di priorità, la rivendicazione però non è nè il movente nè lo scopo di questa mia nota. Lo scopo è di informare l'Accademia di un fatto che interessa un lavoro da essa accolto e pubblicato ne' suoi volumi, e di porre in sodo che il valore di tale lavoro risulta notevolmente accresciuto dopo la pubblicazione di Ayrton e Taylor.

Per mettere ora in evidenza l'identità delle formole date dal Blakesley nella sua memoria del 12 maggio 1888 con quelle che si trovano nella mia memoria del 4 dicembre 1887, basta ricordare il significato delle lettere che in esse figurano.

Blakesley denomina (*):

α_1, α_2, α_3 le letture sui tre elettrodinamometri;

A, B, C le costanti dei tre strumenti;

r_1, r_2 le resistenze della spirale primaria e del circuito secondario;

m, n, i numeri delle spire nelle due eliche primaria e secondaria;

e con queste notazioni dà le seguenti espressioni (**):

Potenza totale spesa fra i morsetti primarii del trasformatore (***)

$$= r_1 A\alpha_1 + r_2 \frac{m}{n} C\alpha_3 ;$$

potenza dissipata corrispondente al ritardo magnetico (****):

$$= r_2 \left\{ \frac{m}{n} C\alpha_3 - B\alpha_2 \right\} .$$

(*) Memoria citata: *Philosophical Magazine*, 5ª serie, vol. XXVI, luglio 1888, pag. 35.

(**) Mem. cit., pag. 39.

(***) *Total power.*

(****) *Power involved with the magnetic lag.*

Se, come nella mia memoria, si rappresenta con P l'energia dissipata in $1''$ per isteresi e per correnti di Foucault, energia corrispondente al ritardo di fase, e con Q quella svolta nel circuito secondario, si ha adunque:

$$P = r_2 \left\{ \frac{m}{n} C\alpha_3 - B\alpha_2 \right\},$$

$$Q = r_2 \; B\alpha_2 \,,$$

donde

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{n} \frac{C\alpha_3}{B\alpha_2} - 1 \,.$$

E se, adottando anche le altre notazioni della mia memoria, si pone

$$C\alpha_3 = c \,, \quad B\alpha_2 = b \,, \; \frac{m}{n} = \frac{\mu}{\lambda} \,,$$

questa formola diventa:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{c}{b} - 1 = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \right),$$

si riduce cioè alla $(25')$ sovraricordata.

Sulla formula di Taylor;

Nota del Socio Prof. GIUSEPPE PEANO.

La formula di Taylor, che si può considerare come fondamentale del calcolo infinitesimale, si enunciò, fin dopo Lagrange, sotto la forma:

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\text{ etc.}$$

senza alcuna preoccupazione sul significato preciso di questa eguaglianza.

Ma dopo la distinzione accurata delle serie in convergenti e divergenti, nel corrente secolo la si ritiene valida solo quando la serie del secondo membro è convergente, ed ha per somma il primo. E poichè la serie scritta può essere divergente per alcuni, e anche per tutti i valori di h, ovvero essere convergente e non aver per somma il primo membro, ne viene di conseguenza che la formula perde ogni valore teorico, ed in ogni caso pratico bisogna esaminare se la formula sia vera o non.

Ma la stessa formula si può interpretare in un altro modo, indipendentemente dalla convergenza delle serie, e allora la formula suddetta sussiste qualunque sia la funzione $f(x)$, purchè avente le derivate che si scrivono. Oggetto di questa Nota è appunto questa nuova interpretazione. Dico nuova, perchè in nessun libro (ch'io sappia) è esplicitamente enunciata; però essa è estremamente affine a ciò che scrissero tutti gli autori, studiando le serie senza preoccuparsi della loro convergenza; ed anzi in certi punti non faccio che rienunciare, leggittimandole, le loro proposizioni.

Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x. Suppongasi che col tendere di x a zero, $f(x)$ tenda ad un limite a_0.

Se $f(x)$ è continua, sarà $a_0 = f(0)$. Allora $f(x) - a_0$ è una quantità infinitesima con x; la si divida per x, e si passi al limite facendo tendere x a zero. Si supponga che questo limite sia determinato e chiamiamolo a_1:

$$\lim \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1 \ .$$

Allora la differenza $\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1$ è infinitesima con x; dividiamola per x, e passiamo al limite, e sia

$$\lim \frac{\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1}{x} = \lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = a_2 \ .$$

e analogamente sia

$$\lim \frac{\frac{\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1}{x} - a_2}{x} = \lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^3} = a_3$$

e così via.

Con questo processo, data la funzione $f(x)$, deduciamo una successione di quantità reali $a_0, a_1, a_2, \ldots$, la quale può continuare indefinitamente (cosa che avviene nei casi più comuni) ovvero arrestarsi quando uno di quei quozienti non ha più un limite determinato e finito.

Noi converremo di scrivere:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \text{ecc.} \qquad \ldots (1)$$

per indicare che

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{n-1} x^{n-1}}{x_n} = a_n \ . \qquad \ldots (2)$$

Adunque il significato del segno $=$ nella (1) non è quello che la serie del secondo membro sia convergente ed abbia per

somma $f(x)$, ma quello espresso dalla formula (2). Questa formula si può pure scrivere sotto le forme:

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n}{x^n} = 0 \ , \quad \ldots(3)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a^n x^n + \alpha x^n \ , \text{ ove } \lim_{x=0} \alpha = 0 \ . \quad \ldots(4)$$

e si può anche enunciare così: l'eguaglianza (1) sta per indicare che la differenza fra $f(x)$ e il polinomio $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ è infinitesima con x, d'ordine superiore all'n^{mo}.

Se $f(x)$ è sviluppabile in serie secondo le potenze ascendenti di x, fino al termine di grado n, secondo la formula (1), il che significa se esistono le quantità determinate e finite $a_0 \, a_1 \ldots a_n$ che soddisfano alla condizione (2), allora, come è facile a vedere, si avrà:

$$\lim f(x) = a_0$$

$$\lim \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1$$

$$\lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = a_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\lim \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{n-2} x^{n-2}}{x^{n-1}} = a_{n-1} \ ,$$

ossia la (2) ha per conseguenza tutte quelle che da essa si deducono leggendo al posto di n, uno qualunque dei numeri di esso minori.

Diamo ora alcuni teoremi sulle operazioni su questi sviluppi.

Teorema I. — *Se*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \text{ecc.} \ ,$$

e

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b^n x^n + \text{ecc.} \ ,$$

sarà

$$f(x) + \varphi(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \ldots + (a_n + b_n) x^n + \text{ecc.}$$

Infatti scritto $f(x)$ sotto la forma $a_0+\ldots+a_n x^n+\alpha x^n$, e $\varphi(x)$ sotto la $b_0+\ldots+b_n x^n+\beta x^n$, sommando sarà $f(x)+\varphi(x)= =(a_0+b_0)+\ldots+(a_n+b_n)x^n+\gamma x^n$, ove si è fatto $\gamma=\alpha+\beta$; e poichè α e β sono infinitesimi con x, anche γ è infinitesimo con x, ossia sussiste la formula a dimostrarsi.

Teorema II. — *Nella stessa ipotesi sarà:*

$$f(x)\times\varphi(x)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n+\text{ecc.}$$

Dimostrazione analoga.

Teorema III. — *Se*

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\text{ecc.},$$

e

$$\psi(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\text{ecc.},$$

e, supposto a_0 *non nullo, si ricavano le* $b_0 b_1 \ldots b_n$ *dalle equazioni:*

$$a_0b_0=c_0\,,\quad a_0b_1+a_1b_0=c_1\,,\quad\ldots\,,\quad a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0=c_n\,,$$

si avrà:

$$\frac{\psi(x)}{f(x)}=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\text{ecc.}$$

Se l'espressione $f(x+h)$ si può sviluppare secondo le potenze di h, nel significato definito, e si ha:

$$f(x+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\text{ecc.},$$

sarà $a_0=\lim\limits_{h=0} f(x+h)$; quindi se $f(x)$ è continua pel valore considerato di x, sarà $a_0=f(x)$.

In questa ipotesi sarà $a_1=\lim\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; quindi $f(x)$ ha derivata pel valore considerato, e questa vale a_1.

Teorema IV. — *Se la derivata* $f'(x+h)$ *si può sviluppare in serie secondo le potenze di* h *fino al termine di grado* n, *cioè:*

$$f'(x+h)=f'(x)+a_1h+a_2h^2+\ldots+a_nh^n+\text{ecc.},$$

sarà

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+a_1\frac{h^2}{2}+a_2\frac{h_3}{3}+\ldots+a_n\frac{h^{n+1}}{n+1}+\text{ecc.}$$

Infatti completando il polinomio del secondo membro con αh^n, ed integrando, rispetto h, si avrà

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\ldots+a_n\frac{h^{n+1}}{n+1}+\int_0^h \alpha h_n\, dh\ .$$

Ma l'ultimo termine si può scrivere $\beta\int_0^h h^n dh=\beta\frac{h^{n+1}}{n+1}$, ove β è uno dei valori di α nell'intervallo da 0 ad h; e poichè α è infinitesimo, lo è pure β.

Teorema V. — *Se* f(x) *ha le successive derivate, fino all'*n^{ma}. *pel valore considerato di* x, *si ha:*

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^n(x)+\text{ecc.}$$

Infatti, per ipotesi, si ha:

$$\lim\frac{f^{n-1}(x+h)-f^{n-1}(x)}{h}=f^{(n)}(x)$$

ossia

$$f^{(n-1)}(x+h)=f^{(n-1)}(x)+hf^{(n)}(x)+\text{ecc.}$$

integrando rispetto h. vale a dire applicando il teorema precedente, si ha:

$$f^{(n-2)}(x+h)=f^{(n-2)}(x)+hf^{(n-1)}(x)+\frac{h^2}{2}f^{(n)}(x)+\text{ecc}\ ,$$

e integrando ancora $n-2$ altre volte si ha la formula cercata.

Questo ultimo teorema fu già da me dato nel *Mathesis*, t. IX, p. 110.

Così restano interpretate alcune formule e legittimati alcuni passaggi affatto comuni nei Matematici dei secoli scorsi.

Si osservi però che dal fatto che $f(x+h)$ è sviluppabile secondo le potenze di h,

$$f(x+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\ldots+a_nh^n+\text{ecc.}$$

non ne deriva la sua continuità. Così $f(x)$ può essere, come già si è osservato, discontinua pel valore considerato di x, se $f(x+h)$ tende ad un limite diverso da $f(x)$ col tendere di h a zero. Supposta la continuità di $f(x)$, pel valore considerato di x, non ne viene la sua continuità nelle vicinanze di esso Così se indichiamo con $E(z)$ il massimo intero contenuto in z, e poniamo $\theta(z)=z-E(z)$, allora la funzione

$$f(x)=x^{n+1}\,\theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

ove si convenga di attribuirle il valore 0 per $x=0$, è continua per $x=0$, sviluppabile secondo le potenze di x fino al termine di grado n (e tutti i coefficienti sono nulli), ma essa è discontinua in ogni intorno del valore 0. La funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}\theta\left(\frac{1}{x}\right)$, cui si attribuisca il valore 0 per $x=0$, è sviluppabile indefinitamente, e tutti i coefficienti sono nulli; però essa è discontinua in ogni intorno di 0.

Se $f(x+h)$ è sviluppabile secondo le potenze di h, ed è continua pel valore considerato di x, cioè se

$$f(x+h)=f(x)+a_1 h+a_2 h^2+\text{ecc.},$$

ne viene di conseguenza, come già si è detto, che $a_1=f'(x)$; quindi la definizione data da Lagrange, che $f'(x)$ è il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$ secondo le potenze di h, coincide colla attuale. Ma non ne viene di conseguenza che anche $f'(x+h)$ sia sviluppabile in serie, e si abbia $f'(x+h)=f'(x)+2a_2h+\text{ecc.}$ Basta considerare i due esempi precedenti, in cui $f(x)$ è sviluppabile in serie, ma, essendo discontinua nelle vicinanze di 0, non ha, in quelle vicinanze, derivata. Quindi ancora, dal fatto che

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x)+a_2 h^2+\text{ecc.},$$

non ne deriva come conseguenza che a_2 sia eguale a $\frac{f''(x)}{2}$; poichè può la funzione mancare di derivata prima nelle vicinanze del valore considerato di x, e quindi non avere per quel valore di x derivata seconda.

Pertanto i teoremi I, II e III che dànno i cofficienti dello

sviluppo d'una somma, d'un prodotto, d'un quoziente di due funzioni, mediante i coefficienti di queste funzioni, supposta l'esistenza delle derivate, permettono di trovare, e per una via alquanto più semplice dell' ordinaria, le derivate successive d' un prodotto e d'un quoziente. Queste regole però sono alquanto più generali delle regole di derivazione, potendo ancora sussistere quando mancano le derivate.

Gli infinitesimi che compaiono nello sviluppo di

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

sono essi variabili o costanti? La risposta a questa questione di attualità dipende dal punto di vista da cui le consideriamo.

Possiamo considerare *la quantità* $a_n x^n$, cioè *il valore* che assume la funzione $a_n x^n$ quando ad x si attribuisca un valore qualunque; e questo valore è un numero variabile ed infinitesimo con x; così si ha un infinitesimo variabile.

Oppure possiamo considerare *la funzione* indicata con $a_n x^n$, ossia l'operazione per cui ad ogni numero si fa corrispondere la sua potenza n^a moltiplicata per a_n; e questa *funzione, o operazione, o corrispondenza* è un ente costante, dati l' esponente n e il coefficiente a_n. Ora, date più funzioni $f(x)$, $g(x)$, definite in un intervallo da 0 un numero positivo conveniamo di dire che nelle vicinanze di 0, la prima è maggiore della seconda, e di scrivere $f > g$, se si può determinare un intervallo da 0 ad un numero positivo in modo che per ogni valore di x interno ad esso si abbia $f(x) > g(x)$; e chiamiamo, secondo il solito, multiplo secondo il numero (reale) m, di $f(x)$, la funzione $mf(x)$. Allora, posto $f_r(x) = x^r$, ne viene che $f_r(x)$ è maggiore nelle vicinanze di 0, di ogni multiplo di $f_{r+1}(x)$, ossia, qualunque sia m, si ha $f_r > m f_{r+1}$; ossia f_{r+1} è un ente costante, infinitesimo rispetto ad f_r, mentrechè $f_{r+1}(x)$ è un ente variabile, infinitesimo rispetto ad $f_r(x)$.

Di alcuni nuovi conduttori rettilinei approssimati, che si deducono dal moto ellittico;

Nota dell'Ing. G. PASTORE

La trasformazione del moto rotatorio continuo in rettilineo alterno si ottiene con meccanismi speciali detti *guide* o *conduttori rettilinei*, i quali, fatte poche eccezioni, appartengono alla classe dei sistemi articolati.

Alcuni di questi meccanismi risolvono il problema per approssimazione, guidando un punto secondo una traiettoria vicinissima, per un tratto notevole, ad una retta. Tali sono i noti quadrilateri articolati di Watt, di Evans, ecc.

Altri, invece, producono un moto rigorosamente rettilineo. Questi sono recenti: si dubitò anzi, fino a pochi anni fa, della possibilità teorica di ottenere in modo esatto l'indicata trasformazione di movimento col mezzo di un sistema articolato propriamente detto, che cioè contenga sole coppie di rotazione. Il dubbio fu dileguato dal Peaucellier e dal Lipkin, nel 1864, coll'*inversore* che porta il loro nome; poco dopo Kempe (1875) ed Hart (1877) proposero altri sistemi articolati composti, capaci, essi pure, di produrre l'esatto moto rettilineo.

Questi meccanismi furono accolti con grande interesse, e rappresentano, di certo, una delle più belle scoperte della moderna Cinematica. Tuttavia la loro complicazione ne impedì un largo impiego nelle macchine; ed anche oggidì la pratica continua a valersi preferibilmente degli antichi conduttori approssimati di Watt, di Evans, ecc., apparecchi semplicissimi, col mezzo dei quali il moto rettilineo si ottiene con approssimazione più che sufficiente per gli usi pratici.

Ora, in uno studio sui meccanismi a cui attendo da qualche tempo, mi venne fatto di cadere sopra alcuni quadrilateri articolati speciali, che riconobbi capaci di guidare, per un tratto abbastanza lungo, un punto sopra di una traiettoria sensibilmente rettilinea. Mi parve perciò che essi fossero per riescire di qualche pratica utilità, ed è con tale speranza che mi indussi a farne oggetto di questa Nota.

I quadrilateri di cui intendo parlare derivano dal moto ellittico. Nel presente studio, dopo di aver accennate alcune proprietà di questo movimento e stabilita una proposizione ad esso relativa, deduco un primo conduttore rettilineo; da questo, applicando la legge di Roberts sul quadrilatero articolato, ne ottengo altri due. Dimostro in seguito, coll'analisi, che veramente, ed entro quali limiti, i tre quadrilateri ottenuti soddisfanno alle condizioni dei conduttori rettilinei.

I.

1. Considero *il moto di una figura piana invariabile, la quale si sposta nel proprio piano mantenendo due dei suoi punti rispettivamente sopra due rette fisse perpendicolari fra di loro*. In questo movimento un punto qualsiasi della figura descrive, in generale, un'ellisse, d'onde la denominazione di *moto ellittico*.

Le direttrici fisse siano xAx, yAy (fig. 1) e G, D rappresentino, in una posizione qualunque, i due punti da cui è determinato il movimento. Il punto G rimane sempre sulla direttrice xAx ed il punto D sulla direttrice yAy. La congiungente GD è costante per l'invariabilità del sistema: la sua lunghezza la indico con $2R$.

Il moto ellittico, che riceve numerose applicazioni nei meccanismi, gode delle seguenti proprietà fondamentali.

I. *Esso si può ottenere facendo rotolare una circonferenza di circolo della figura mobile entro ad una circonferenza fissa di raggio doppio.*

La linea fissa è la circonferenza f di centro A e raggio $2R$; la rotolante è la circonferenza r, di raggio R, descritta su GD come diametro.

II. *La traiettoria descritta da un punto qualsiasi della figura è un'ellisse. Il suo centro coincide col centro della circonferenza fissa; i suoi assi passano per le estremità del diametro condotto dal punto descrivente nella circonferenza rotolante; la lunghezza dei suoi semi-assi sono le distanze del punto stesso da questa circonferenza.*

Così, ad esempio, la traiettoria del punto P è l'ellisse e di centro A, di assi XX, YY passanti per le estremità e, d del diametro condotto da P nella circonferenza rotolante r, e di semi-assi $\overline{Pc}$, $\overline{Pd}$.

Se il punto descrivente cade in M, centro della rotolante, l'ellisse traiettoria di questo punto si riduce alla circonferenza di circolo di centro A e raggio R.

Se il punto descrivente cade sulla rotolante, ad esempio in Q, l'ellisse si riduce ad una retta; al diametro $Y'Y'$ della circonferenza fissa.

2. Ciò posto, è facile dimostrare la seguente proposizione.

Il moto ellittico si può ottenere facendo muovere due punti determinati della figura mobile rispettivamente sopra due ellissi concentriche, tali che la somma o la differenza dei semi-assi dell'una sia uguale alla somma od alla differenza dei semi-assi dell'altra.

Ed invero, il movimento di una figura piana invariabile, nel proprio piano, è perfettamente determinato, *per quanto riguarda le traiettorie dei suoi punti*, quando sono determinate le traiettorie di due qualunque di questi punti. Uno stesso movimento si può perciò ottenere in molti modi: basta prendere due punti qualsiasi della figura, tracciarne le traiettorie, e poscia, assunte queste come direttrici fisse del movimento, far muovere sulle medesime i due punti considerati.

Applico questo concetto generale al moto ellittico piano. Prendo cioè due punti qualsiasi P, P' del sistema mobile e segno le ellissi e, e' da essi descritte nel movimento della retta GD. Queste ellissi sono concentriche in A ed hanno comune ed eguale al diametro $\overline{GD} = 2R$ della rotolante r la somma o la differenza dei semi-assi. Se P e P' cadono entrambi fuori della rotolante, le due ellissi hanno comune la differenza dei semi-assi; se cadono entrambi entro a questa circonferenza, le due ellissi hanno co-

mune la somma dei semi-assi; se infine, come in figura, uno di essi, P, cade dentro, e l'altro, P', cade fuori della rotolante r, la somma $\overline{cd}$ dei semi-assi di e è uguale alla differenza $\overline{c'd'}$ dei semi-assi di e'.

Se adunque si fa muovere la retta PP' del sistema in modo che il suo estremo P percorra l'ellisse e, ed il suo estremo P' percorra l'ellisse e', si ottiene il moto ellittico della figura precisamente come facendo scorrere i punti G, D di essa lungo le direttrici ortogonali xAx, yAy. Nel moto della PP' sulle ellissi e, e' i punti G e D della figura mobile *sono guidati* secondo le rette xAx, yAy; gli altri punti della circonferenza rotolante r secondo rette passanti per A; e gli altri punti della figura secondo ellissi di cui $\overline{GD} = 2R$ rappresenta la somma o la differenza comune dei semi-assi.

3. Si supponga, come caso particolare, che P cada in M (fig. 2) punto di mezzo della retta GD, e che P' cada sul prolungamento di GD, in N, a distanza $\overline{DN} = \overline{DM} = R$.

Allora l'ellisse descritta da M si riduce alla circonferenza di circolo e di centro A e raggio R, e per ottenere il movimento del punto M basta articolare in esso un braccio $\overline{AM} = R$ girevole attorno al punto fisso A.

Il punto N, invece, descrive l'ellisse e' cogli assi xAx, yAy e con semi-assi R e $3R$. Supponendo perciò praticata nel piano del movimento una scanalatura che abbia per linea mediana l'ellisse e', ed obbligando l'estremo N dell'asta MN, articolata in M al braccio AM, a muoversi lungo questa scanalatura, si ha un conduttore rettilineo esatto: nel moto rotatorio di AM il punto di mezzo D di MN è guidato esattamente secondo la retta yAy.

4. Allo scopo di evitare la direttrice ellittica e', la quale complicherebbe il meccanismo e sarebbe causa di attriti considerevoli, sostituisco all'ellisse e' l'arco della circonferenza osculatrice nel suo vertice F, e produco il movimento del punto N mediante un braccio articolato NB girevole attorno al centro di curvatura B dell'ellisse nel vertice F.

Allora il meccanismo si trasforma nel quadrilatero articolato $ABNM$, fisso sul lato AB. Il punto di mezzo D della sua biella MN non è più guidato secondo la retta yAy, ma bensì

secondo la curva ll: questa però, come farò vedere, ha un contatto molto intimo con yAy, e per un lungo tratto si può ritenere come praticamente confondentesi colla medesima.

Il raggio di curvatura ρ per un'ellisse in uno dei vertici posti all'estremità dell'asse minore è dato dalla nota formola:

$$\rho = \frac{a^2}{b} ,$$

ove a è il semi-asse maggiore e b il semi-asse minore dell'ellisse.

Nel nostro caso $a = 3R$, $b = R$, e, per conseguenza:

$$\rho = 9R .$$

Il quadrilatero articolato $ABNM$ ha adunque i seguenti elementi:

$ABNM$ (fig. 2)

lato fisso		$\overline{AB} = 8R$,
biella		$\overline{MN} = 2R$,
bracci		$\overline{AM} = R$,
		$\overline{BN} = 9R$,
distanze		$\overline{DM} = \overline{DN} = R$.

5. La legge di Roberts, di cui già mi occupai in un precedente lavoro (*), permette di ottenere altri due quadrilateri equivalenti al quadrilatero $ABNM$, cioè capaci di generare la stessa curva ll.

In questo caso il punto descrivente D del quadrilatero primitivo $ABNM$ è il punto di mezzo della biella MN, perciò la costruzione ricavata dalla legge di Roberts si riduce alla seguente: si compiono i parallelogrammi $AMDM'$, $DNBM''$, e trovati poscia i punti di mezzo N', N'' dei lati DM', e DM'', si costruisce il parallelogrammo $DN'CN''$. Il punto C deve cadere sulla retta AB e dividerla per metà, ed i due nuovi quadrilateri capaci di generare la curva ll sono:

$ACN'M'$ (fig. 3) col lato fisso AC ,

$CBN''M''$ (fig. 4) col lato fisso CB ,

(*) La legge di Roberts sul quadrilatero articolato. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 1890, vol. XXVI.

Le lunghezze dei loro lati sono:

$ACN'M'$ (fig. 3)

- lato fisso ...... $\overline{AC} = 4R$,
- biella .... $\overline{M'N'} = \frac{1}{2}R$,
- bracci .... $\overline{AM'} = R$, $\overline{CN'} = \frac{9}{2}R$,
- distanze....... $\overline{DM'} = R$, $\overline{DN'} = \frac{1}{2}R$;

$CBN''M''$ (fig. 4)

- lato fisso ...... $\overline{CB} = 4R$,
- biella .... $\overline{M''N''} = \frac{9}{2}R$,
- bracci .... $\overline{CN''} = \frac{1}{2}R$, $\overline{BM''} = R$,
- distanze ..... $\overline{DM''} = 9R$, $\overline{DN''} = \frac{9}{2}R$.

II.

6. Considero un quadrilatero articolato qualsiasi $ABNM$ (fig. 5), avente per lato fisso AB, e cerco l'equazione della linea descritta da un punto D qualunque invariabilmente congiunto colla biella MN.

Prendo per asse delle ascisse la retta dei centri AB, per asse delle ordinate la normale Ay condotta in A ad AB, e faccio:

$$\overline{AM} = m\,,$$

$$\overline{MD} = b\,, \qquad \overline{BN} = n\,,$$

$$\overline{ND} = c\,, \qquad \overline{AB} = p\,.$$

Indico inoltre con x', y' le coordinate del punto M; con x'', y'' quelle del punto N; con x, y quelle del punto descrivente D; e con α l'angolo variabile che la retta MD fa coll'asse delle x.

Allora si ha;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - b\cos\alpha\,, \\ y' &= y - b \operatorname{sen}\alpha\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x - c\cos(D+\alpha)\,, \\ y'' &= y - c\operatorname{sen}(D+\alpha)\,; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} & x'^2 + y'^2 = m^2\,, \\ & (p - x'')^2 + y''^2 = n^2\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

Elevo al quadrato le (1) e sostituisco nella prima delle (3):

$$\frac{x^2+y^2+b^2-m^2}{2b} = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha\,. \quad \ldots (4)$$

Elevo al quadrato le (2) e sostituisco nella seconda delle (3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{(x-p)^2+y^2+c^2-n^2}{2c} &= \cos\alpha \left\{\cos D\,(x-p) + y\operatorname{sen} D\right\} \\ &\quad - \operatorname{sen}\alpha\left\{\operatorname{sen} D\,(x-p) - y\cos D\right\}. \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

Facendo:

$$\left\{\begin{aligned} A &= x\,, \\ B &= y\,, \\ C &= \frac{x^2+y^2+b^2-m^2}{2b}\,, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} M &= \cos D\,(x-p) + y\operatorname{sen} D\,, \\ N &= \operatorname{sen} D\,(x-p) - y\cos D\,, \\ P &= \frac{(x-p)^2+y^2+c^2-n^2}{2c}\,; \end{aligned}\right.$$

le equazioni (4) e (5) si riducono a:

$$A\cos\alpha + B\operatorname{sen}\alpha = C\,,$$
$$M\cos\alpha - N\operatorname{sen}\alpha = P\,,$$

e dànno immediatamente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{C\,.\,M - A\,.\,P}{A\,.\,N + B\,.\,M}\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{C\,.\,N + B\,.\,P}{A\,.\,N + B\,.\,M}\,;$$

da cui: $(C.M - A.P)^2 + (C.N + B.P)^2 = (A.N + B.M)^2.$

Sostituendo in quest'equazione i valori di A, B, C, M, N, P, e riducendo, si ottiene l'*equazione generale della traiettoria descritta da un punto qualsiasi* D *invariabilmente congiunto colla biella di un quadrilatero articolato.*

$$\left.\begin{array}{l} \Big[c\,(x^2+y^2+b^2-m^2)\,\big\{\operatorname{sen}D\,(x-p)-y\cos D\big\}+ \\ \quad +b\,y\,\big\{(x-p)^2+y^2+c^2-n^2\big\}\Big]^2+ \\ +\Big[c\,(x^2+y^2+b^2-m^2)\,\big\{\cos D\,(x-p)+y\operatorname{sen}D\big\}- \\ \quad -b\,x\,\big\{(x-p)^2+y^2+c^2-n^2\big\}\Big]^2= \\ =4\,b^2c^2\Big[\operatorname{sen}D\,(x^2+y^2-p\,x)-p\,y\cos D\Big]^2. \end{array}\right\}\ldots(6)$$

7. Introduco in quest' equazione generale gli elementi che corrispondono al quadrilatero della fig. 2; faccio cioè, nell'ipotesi di $R=1$:

$$\begin{array}{ll} & m=1\ , \\ b=c=1\ , & n=9\ , \\ <D=180^\circ\ , & p=8\ . \end{array}$$

Ottengo così l'equazione della linea ll:

$$\left.\begin{array}{l}(y^3-8y+x^2y-8xy)^2+(x^3-12x^2-8x+xy^2-4y^2)^2= \\ \qquad =64\,y^2\,;\end{array}\right\}\ldots(7)$$

la quale, sviluppata, si riduce alla prima od alla seconda delle due seguenti, secondochè si ordina secondo le potenze di y o secondo le potenze di x:

$$\left.\begin{array}{l}y^6+3x(x-8)y^4+x(3x^3-48x^2+128x+192)y^2+ \\ \quad +x^2(x^2-12x-8)^2=0\ ,\end{array}\right\}\ldots(8)$$

$$\left.\begin{array}{l}x^6-24x^5+(3y^2+128)x^4+48(4-y^2)x^3+ \\ \quad +(3y^4+128y^2+64)x^2+24y^2(8-y^2)x+y^6=0\ ,\end{array}\right\}\ldots(9).$$

8. Introducendo nella (6) i valori :

$$m = 1 \ ,$$

$$b = 1 \ , \qquad n = \frac{9}{2} \ ,$$

$$c = \frac{1}{2} \ , \qquad p = 4 \ ,$$

$$< D = 0 \ ,$$

che corrispondono al quadrilatero della figura 3. si ottiene l'equazione :

$$(y^3 - 8y + x^2 y - 16xy)^2 + (x^3 - 12x^2 - 8x + xy^2 + 4y^2)^2 =$$
$$= 64 y^2 \ ;$$

sviluppando la quale si ottiene la stessa equazione (8).

Sostituendo invece gli elementi :

$$m = \frac{1}{2} \ ,$$

$$b = \frac{9}{2} \ , \qquad n = 1 \ ,$$

$$c = 9 \ , \qquad p = 4 \ ,$$

$$< D = 0 \ ,$$

del quadrilatero fig. 4, si ottiene quest'altra equazione:

$$(y^3 - 56y + x^2 y + 8xy)^2 + (x^3 - 56x + y^2 x - 8y^2 - 160)^2$$
$$= 5184 y^2 \ ,$$

che sviluppata ed ordinata secondo le potenze di y, dà:

$$\left. \begin{array}{l} y^6 + 3(x^2 - 16) y^4 + (3x^4 - 160x^2 - 320x + 512) y^2 + \\ \qquad + (x^3 - 56x - 160)^2 = 0 \ . \end{array} \right\} \quad \ldots (8')$$

Questa però si riduce ancora alla (8) sostituendo $x - 4$ invece di x. Trasportando adunque l'asse y della fig. 4 parallelamente a se stesso alla distanza -4 dalla sua posizione primi-

tiva, l'equazione (8') si trasforma nella (8). Per conseguenza, le linee rappresentate da queste due equazioni sono identiche fra di loro, ma diversamente situate rispetto all'asse delle y: sovrapponendo le due linee, l'asse y della seconda è spostato di un'ascissa $+4$ rispetto all'asse y della prima. La cosa corrisponde evidentemente al quadrilatero della fig. 4.

Si ha così, in questi quadrilateri speciali, la conferma analitica della legge di Roberts.

9. Le proprietà geometriche della linea ll si deducono dalla sua equazione.

I. L'equazione (8) è soddisfatta per $x=0$, $y=0$ e non contiene che potenze pari di y: dunque la linea ll (fig. 2) passa per l'origine A delle coordinate ed è simmetrica rispetto all'asse x.

II. Per $y=0$ la stessa equazione diventa:

$$x^2(x^2-12x-8)^2=0\ ,$$

che ha due radici *zero*, due uguali a $-0{,}6332$, e due uguali a $+12{,}6332$.

In conseguenza, la curva ll ha tre punti doppi sull'asse x: uno nell'origine A delle coordinate, un altro in A' all'ascissa $-0{,}6332$, ed un terzo in A'' all'ascissa $+12{,}6332$ (*).

(*) Si consideri un quadrilatero articolato qualunque $ABNM$ (fig. 5) fisso sul lato AB, un punto D invariabilmente congiunto colla sua biella MN, e la curva ll descritta da questo punto nel movimento del sistema. Si costruisca poi sul lato fisso AB il triangolo ABC simile e similmente disposto rispetto al triangolo invariabile MND, e la circonferenza di circolo passante per A,B,C.

Allora i tre punti A, B, C sono *fuochi singolari* della curva ll, e:

1° Questa curva può avere sino a 3 punti doppi sulla circonferenza ABC;

2° Misurando le distanze lungo questa circonferenza da un punto fisso qualsiasi della medesima, la somma delle distanze dei punti doppi è uguale alla somma delle distanze dei fochi (CAYLEY, *On three-bar motion*. Proceedings of the London mathematical Society, vol. VII, p. 136).

Nel nostro caso speciale (fig. 2) la circonferenza ABC si riduce all'asse xAx, cosicchè i tre punti doppi devono cadere sopra di questa retta, come appunto si è trovato. La posizione poi di questi punti doppi A, A', A'' è tale da rendere soddisfatta anche la seconda proprietà.

Il primo, A, è, come farò vedere, un punto doppio speciale, in cui i due rami della curva sono tangenti fra di loro. Il secondo, A', è un punto doppio ordinario: un nodo in croce. Il terzo, A'', è un punto doppio isolato, intersezione reale di due rami immaginarii della curva, rami simmetrici, come quelli reali, rispetto all'asse xAx; questa posizione A'' non può evidentemente essere raggiunta dal punto D della biella nelle posizioni reali di questa, e perciò non è da considerarsi nello studio cinematico del meccanismo.

III. Riduco l'equazione della curva ll alla forma:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n = 0 ,$$

ove u_0 rappresenta il termine assoluto, ed u_1, u_2, ... u_n i termini di primo, di secondo, ... di n^{esimo} grado in x ed y.

Ottengo;

$$\frac{1}{64}(x^2+y^2)^3 - \frac{3}{8}x(x^2+y^2)^2 + 2x^2(x^2+y^2) + 3x(x^2+y^2) + x^2 = 0 \ldots (10).$$

Poichè in questo caso si ha $u_0 = u_1 = 0$, l'origine A è un punto multiplo di ordine 2, cioè, come già si è detto, un punto doppio della linea ll. Inoltre la $u_2 = 0$, cioè:

$$x^2 = 0,$$

è l'equazione della coppia delle tangenti nell'origine. Ma queste due tangenti coincidono fra di loro e coll'asse y, dunque in A i due rami $p\,A\,n$, $p'\,A\,n'$ della curva ll s'intersecano e sono tangenti fra di loro e coll'asse y.

IV. Per $x = 0$ la (8) si riduce a:

$$y^6 = 0 ,$$

la quale ha sei radici uguali a *zero*.

Ciò significa che la linea ll possiede in A sei punti coincidenti sull'asse y. Per conseguenza, A *è un punto d' ondulazione della linea ll e l'asse* y *è tangente multipla ed ha contatto sestipunto colla medesima.*

10. Le coordinate dei vari punti della linea ll si determinano abbastanza facilmente col mezzo dell'equazione (8),

$$y^6+3x(x-8)y^4+x(3x^3-48x^2+128x+192)y^2+$$
$$+x^2(x^2-12x-8)^2=0 \ ,$$

che si riduce ad un'equazione cubica.

Faccio $y^2=Y$; allora essa prende la forma:

$$aY^3+3bY^2+3cY+d=0 ;$$

e questa perde il secondo termine ponendo:

$$Y=Z-\frac{b}{a}=Z-x(x-8).$$

Allora l'equazione da risolversi è:

$$Z^3+pZ+q=0 \ ; \qquad \ldots\ldots (11)$$

ove:

$$p=3\frac{c}{a}-3\frac{b^2}{a^2}=64x(3-x) \ ,$$

$$q=\frac{d}{a}-3\frac{bc}{a^2}+2\frac{b^3}{a^3}=(40x)^2 .$$

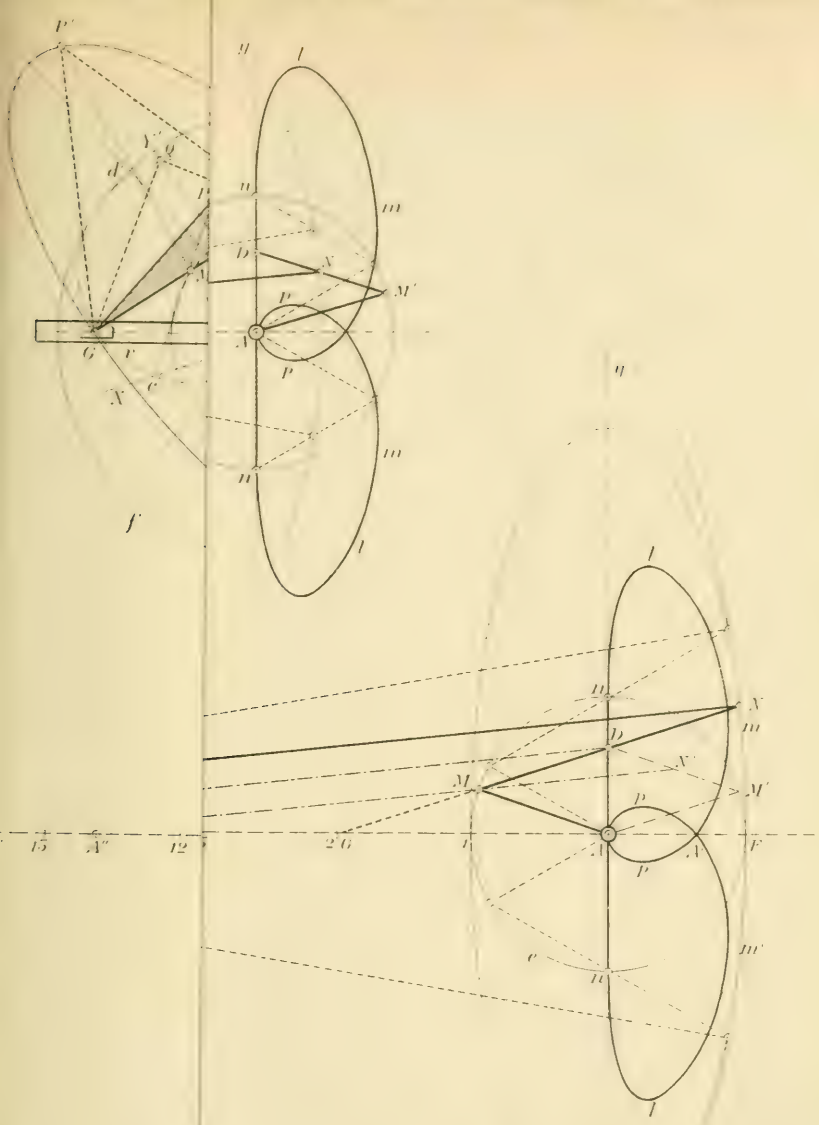
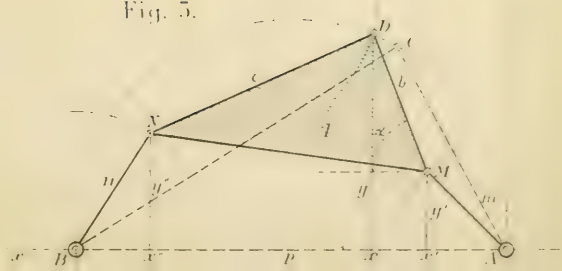
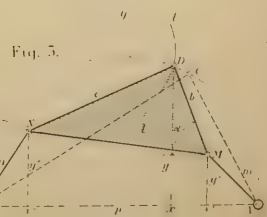
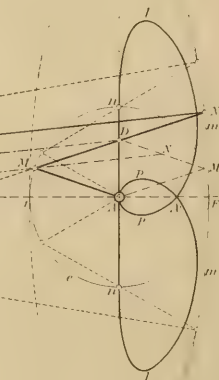
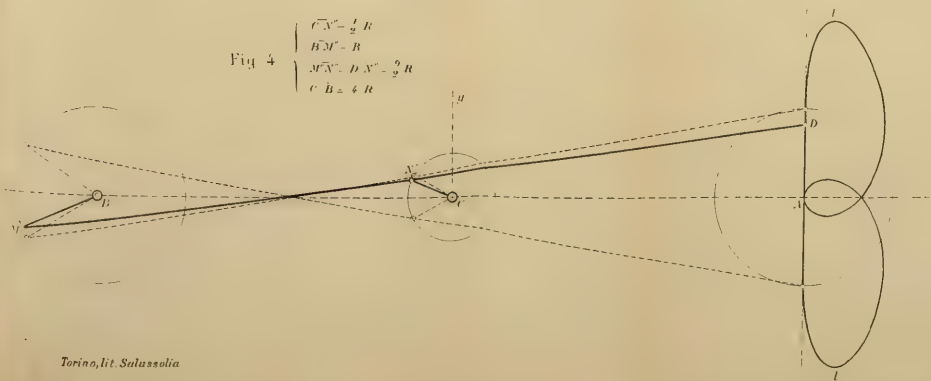
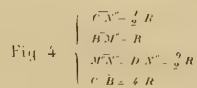
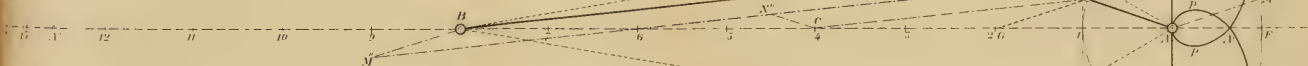
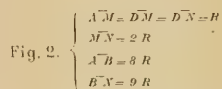
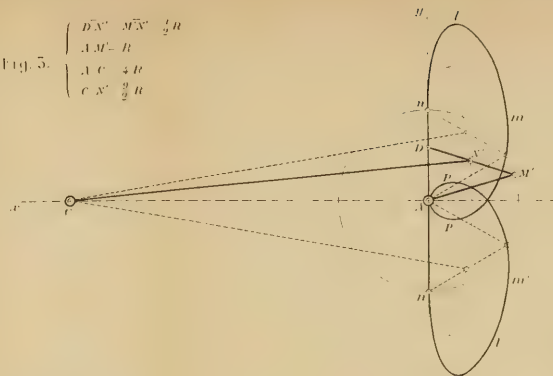
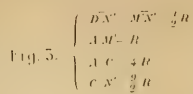
Nel quadro seguente (pag. 16 e 17) sono riportati i valori di Z, di Y e di y corrispondenti a valori di x compresi fra -5 e $+14$.

Da questo quadro si scorge che la nostra equazione ha due coppie di radici reali per x compreso fra $-0{,}8996$ e 0, ed una coppia di radici reali (zero) per $x=12{,}6332$.

Per gli altri valori di x considerati nel quadro essa non ha radici reali. Lo stesso succede pure per tutti gli altri valori di x, perchè, e la cosa si verifica facilmente, per $x<-5$ e per $x>14$ l'equazione (8) ha tutti i coefficienti dello stesso segno.

11. Al valore particolare $x=12{,}6332$ corrisponde il punto doppio isolato A'', intersezione reale di due rami immaginarii della curva ll. Astraendo da questo valore particolare di x, le

Fig. 5.
Torino

Fig. 3.
Fig. 2.
A M = D M = D N = R
M N = 2 R
A B = 8 R
B N = 9 R
Fig. 4
C B = 4 R
Fig. 5.
Torino, lit. Salussolia

coppie di valori reali di y segnate nel quadro con y_1, y_2 corrispondono alla parte di curva $m p A p' m'$, e quelle segnate con y_3, y_4 alla parte di curva $m l n A n' l m'$. Fra questi ultimi valori sono importanti quelli qui riportati, che si riferiscono ad ascisse negative di valore assoluto minore di $^1/_{100}$.

x		y_3, y_4
$-0{,}01\,R$	. . . . .	$\pm 1{,}124\,R$
$-0{,}001\,R$	. . . .	$\pm 0{,}653\,R$
$-0{,}0001\,R$	. . . .	$\pm 0{,}371\,R$
$-0.00001\,R$	. . . .	$\pm 0{,}209\,R$.

Essi dànno la metà della corsa del punto D corrispondente ad una data deviazione dalla retta yy, e permettono, in conseguenza, non solo di giudicare del grado di approssimazione di cui sono capaci i conduttori qui studiati, ma anche di determinare le dimensioni del meccanismo quando sono date la corsa e la deviazione massima che si può ammettere.

Da questi valori è desunta la seguente tavola:

Deviazione d	Corsa c	Rapporto $\frac{c}{d}$
0,01 R	2,248R	224,8
0,001 R	1,306R	1306
0,0001 R	0,742R	7420
0,00001 R	0,418R	41800

Valori di x	Coefficienti dell' equazione 11		$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$	Valori di Z		
	$p=64\ x\ (3-x)$	$q=(40\ x)^2$		Z_1	Z_2	Z_3
— 5	— 2560	40000	<0	17,8447	39,2562	— 57,1
— 4	— 1792	25600	<0	17,0532	31,1457	— 48,1
— 3	— 1152	14400	<0	16,1703	22,8323	— 39,0
— 2,4334	— 846,20	9474,53	$=0$	16,7948	16,7948	— 33,58
— 2	— 640	6400	>0	imm.°	imm.°	— 29,29
— 1	— 256	1600	>0	»	»	— 18,50
— 0,8996	— 224,533	1295	$=0$	8,6512	8,6512	— 17,30
— 0,8	— 154,56	1024	<0	7,1124	8,9586	— 16,07
— 0,7	— 165,76	784	<0	6,0971	8,6936	— 14,79
— 0,6332	— 147,235	641,507	<0	5,4665	8,4391	— 13,90
— 0,6	— 138,24	576	<0	5,1612	8,2942	— 13,45
— 0,5	— 112	400	<0	4,2633	7,7864	— 12,04
— 0,4	— 87,04	256	<0	3,3879	7,1622	— 10,55
— 0,3	— 63,36	144	<0	2,5276	6,3892	— 8,91
— 0,2	— 40,96	64	<0	1,6778	5,3940	— 7,07
— 0,1	— 19,84	16	<0	0,8359	3,9770	— 4,81
— 0,01	— 1,9264	0,16	<0	0,0833	1,3444	— 1,42
— 0,001	— 0,192064	0,0016	<0	0,00833	0,434025	— 0,14
— 0,0001	— 0,01920064	0,000016	<0	0,000833	0,138148	— 0.13
— 0,00001	— 0,0019200064	0.00000016	<0	0,000083	0,043776	— 0,043
0	0	0	$=0$	0	0	0
1	128	1600	>0	imm.°	imm.°	— 8,19
2	128	6400	>0	»	»	— 16,28
3	0	14400	>0	»	»	— 24,32
4	— 256	25600	>0	»	»	— 32,36
5	— 640	40000	>0	»	»	— 40,38
6	— 1152	57600	>0	»	»	— 48,39
7	— 1792	78400	>0	»	»	— 56,40
8	— 2560	102400	>0	»	»	— 64,41
9	— 3456	129600	>0	»	»	— 72,42
10	— 4480	160000	>0	»	»	— 80,43
11	— 5632	193600	>0	»	»	— 88,43
12	— 6912	230400	>0	»	»	— 96,44
12,3331	— 7366,8	243370	$=0$	49,554	49,554	— 99,10
12,6332	— 7788,7	255356	<0	42,978	58,532	— 101,51
13	— 8320	270400	<0	40,462	63,9838	— 104,445
14	— 9856	313600	<0	36,927	75,5222	— 112,449

…lori di …$(x-8)$	Valori di $Y = Z - x\,(x-8)$			Valori di $y = \pm\sqrt{Y}$		
	Y_1	Y_2	Y_3	y_1 , y_2	y_3 , y_4	y_5 , y_6
	— 47,1553	— 25,7438	— 122,1009	immaginarii	immaginarii	immaginarii
	— 30,9468	— 16,8543	— 96,1989	»	»	»
	— 16,8297	— 10,1677	— 72,0026	»	»	»
393	— 8,5982	— 8,5982	— 58,9826	»	»	»
	imm.°	imm.°	— 49,2991	»	»	»
	»	»	— 27,5057	»	»	»
0066	0,6446	0,6446	— 25,3090	± 0,803	± 0,803	»
04	0,0724	1,9186	— 23,1110	± 0,269	± 1,386	»
09	0,0071	2,6036	— 20,8807	± 0,084	± 1,613	»
4665	0	2,9726	— 19,3721	0	± 1,724	»
16	0,0012	3,1342	— 18,6154	± 0,034	± 1,770	»
25	0,0133	3,5364	— 16,2997	± 0,115	± 1,890	»
36	0,0279	3,8022	— 13,9101	± 0,167	± 1,949	»
49	0,0376	3,8992	— 11,4068	± 0,194	± 1,974	»
64	0,0378	3,7540	— 8,7118	± 0,194	± 1,397	»
81	0,0259	3,1670	— 5,6229	± 0,161	± 1,779	»
0801	0,0032	1,2642	— 1,5078	± 0,057	± **1,124**	»
008001	0,000332	0,426024	— 0,450359	± 0,018	± **0,653**	»
000800	0,000033	0,137348	— 0,139781	± 0,006	± **0,371**	»
000080	0,000003	0,043696	— 0,043939	± 0,002	± **0,209**	»
0	0	0	0	0	0	»
7	imm.°	imm.°	— 1,1971	imm.ii	imm.ii	»
12	»	»	— 4,2816	»	»	»
15	»	»	— 9,3288	»	»	»
16	»	»	— 16,3632	»	»	»
15	»	»	— 25,3810	»	»	»
12	»	»	— 36,3964	»	»	»
7	»	»	— 49,4082	»	»	»
0	»	»	— 64,4176	»	»	»
9	»	»	— 81,4253	»	»	»
20	»	»	— 100,4316	»	»	»
33	»	»	— 121,4370	»	»	»
48	»	»	— 144,4420	»	»	»
53,4406	— 3,8866	— 3,8866	— 152,5486	»	»	»
58,532	— 15,554	0	— 160,042	»	0	»
65	— 24,5381	— 1,0162	— 169,4457	»	»	»
84	— 47,0728	— 8,4778	— 196,4494	»	»	»

Si voglia, ad esempio, ottenere la corsa di m. 0,30 colla deviazione massima di $^1/_{10}$ di mm. In questo caso si ha

$$\frac{c}{d} = \frac{0,30}{0,0001} = 3000,$$

rapporto che è compreso fra il 1306 ed il 7420 della tavola.

Assumendo il primo valore si ha:

$$0,30 = 1,306\, R,$$

$$R = \frac{0,30}{1,306} = 0,228\, m.,$$

$$d = 0,001\, R = 0,00028 = {}^2/_{10} \text{ circa di mm.}$$

Rapporto $\frac{c}{d}$	C			
	m. 0,10		m. 0,20	
	R	d	R	d
224,8	0,044	0,00044	0,088	0,00088
1306	0,076	0,0000765	0,152	0,000153
7420	0,135	0,0000135	0,270	0,000027
41800	0,239	0,00000239	0,478	0,00000478

Torino, Ottobre 1891.
R. Museo industriale italiano.

Assumendo il secondo valore si ha invece:

$$0,30 = 0,742\, R\,,$$

$$R = \frac{0,30}{0,742} = 0,405\ m.\,,$$

$$d = 0,0001\, R = 0,000045 = \frac{0.4}{10} \text{ circa di mm.}$$

Per ottenere all'incirca la deviazione richiesta di $^{1}/_{10}$ di mm. si può assumere il valore intermedio $R = 0,25$.

Quest'altra tavola dà immediatamente i valori di R e di d nei quattro rapporti diversi considerati per la corsa

$$c = m.\,0,10\,, \ = m.\,0,20\,, \ = m.\,0,30\,, \ = m.\,0,40\,, \ = m.\,0,50\,.$$

A c					
m. 0,30		m. 0,40		m. 0,50	
R	d	R	d	R	d
0,132	0,00132	0,176	0,00176	0,22	0,0022
0,228	0,000228	0,304	0,000304	0,38	0,00038
0,405	0,0000405	0,540	0,000054	0,675	0,0000675
0,717	0,00000717	0,956	0,00000956	1,195	0,00001195

Su alcune anomalie di sviluppo dell'embrione umano;

Comunicazione terza del Socio Prof. C. GIACOMINI

OSSERVAZIONE V.

Gravidanza tubarica.

Per lo studio delle anomalie di sviluppo dell'embrione umano devono certo aver importanza speciale quei casi nei quali l'ovulo dopo essere stato fecondato, trovando ostacoli sul suo cammino, non compie la sua emigrazione, non giunge, vale a dire, nell'utero, ma si arresta in un punto qualunque della tuba falloppiana, oppure cade nella cavità peritoneale.

Quando ciò avviene le condizioni di sviluppo sono completamente alterate; e se in talune circostanze il nuovo individuo riesce, ciò malgrado, a percorrere tutta la sua evoluzione, nella grandissima maggioranza dei casi egli difficilmente si adatta al nuovo ambiente, perisce in uno stadio più o meno precoce e scompare senza lasciar traccie, oppure rimanendo residui, questi non sempre con facilità vengono ricondotti alla primitiva loro origine.

Le gravidanze extrauterine costituendo un pericolo permanente e sempre grave per la madre, esse furono molto attentamente studiate dal clinico in riguardo diagnostico e terapeutico; solo più tardi si è cercato di bene stabilire i rapporti intimi tra l'ovo ed il punto in cui esso si sviluppa, il modo con cui si dispongono gl'involucri d'origine materna e la provenienza loro.

Lo studio anatomico delle gravidanze extrauterine è quindi di data abbastanza recente, e con esso si cercò di portar luce su molte questioni oggidì tanto discusse e tanto controverse, che riguardano i rapporti tra la madre ed il feto.

In specie le gravidanze tubariche furono oggetto di diligente esame, e questo si potè ripetere con abbastanza frequenza, dopochè l'esportazione della tuba divenne operazione comune presso i chirurghi.

Si è appunto di una gravidanza tubarica esportata in seguito a laparotomia che desidero discorrere. In essa l'embrione si era arrestato alle primissime fasi del suo sviluppo, era entrato in un periodo di regresso, e quindi apparteneva a quelle forme che io ho descritto nelle precedenti comunicazioni fatte a questa Accademia (Adunanza 18 dicembre 1887, 8 gennaio 1888 e 28 aprile 1889). Le membrane d'origine fetale e materna invece continuavano nel loro sviluppo; erano ben conservati i loro rapporti con la parete tubarica e coll'embrione per cui la loro descrizione può essere di qualche interesse non solo per l'argomento speciale che stiamo svolgendo, ma ancora per questioni d'ordine più generale.

Nel pomeriggio del 5 dicembre 1890, io riceveva due ovaia con parte di tuba falloppiana, esportate due giorni prima dal collega ed amico Carle all'Ospedale Umberto I. Nella salpinge di sinistra esisteva una gravidanza tubarica. Dalla storia clinica redatta e pubblicata dal dott. Fantino (*Quattro casi di gravidanza extrauterina operati con successo dal dott. Carle.* Rivista di Ostetricia e Ginecologia 1891, oss., 4°), togliamo i seguenti dati, che possono avere interesse per il nostro studio.

Il preparato apparteneva ad una donna d'anni 38, la quale ebbe già 4 gravidanze normali. L'ultimo parto datava da 7 anni; l'ultima mestruazione avvenne in principio di settembre. Verso il 10 ottobre incominciarono sofferenze nella sfera genitale con metrorragia, le quali portarono alla diagnosi di *Emato-salpinge sinistra con perimetrite:* nel mattino del 2 dicembre fu fatta la laparotomia la quale riescì felicemente.

Durante l'operazione si trovò la tuba di sinistra del volume di un grosso pollice intimamente aderente all'ovaia da un lato e dall'altro al peritoneo, coll'intermezzo di un coagulo sanguigno di antica data, che esisteva all'imboccatura della tromba. Esaminata più attentamente dopo l'operazione la tuba sinistra si trovò grossa, elastica e bluastra, non appariva rotta in alcun punto; l'estremità addominale era pervia e da essa sporgeva ed aderiva un coagulo in parte lacerato dalle trazioni. Aperta longitudinalmente la tuba così ingrossata ne escivano alcuni grammi di un liquido citrino, essa racchiudeva un embrione; l'ovo sembrava essere isolato dalle pareti della tuba, ed i suoi involucri erano cosparsi di numerosi punti emorragici.

Io ebbi adunque il preparato tre giorni dopo l'operazione quando era già stata aperta la dilatazione che presentava la tuba sinistra, ed era stata subito immersa nell'alcool del commercio.

Lo stato di conservazione era mediocre, le parti erano divenute rigide per il rapido indurimento e non permettevano un esame accurato; l'apertura fatta interessava non solo la parete della tuba ma anche il sacco dell'ovo. Questo si modellava sulla superficie interna della tuba, aveva ineguale spessore e poteva essere snocciolato senza difficoltà mancando le aderenze per la massima estensione. Solo in un punto le aderenze si facevano manifeste e questo corrispondeva all'ilo della tuba; il sacco dell'ovo assumeva in questo punto il massimo spessore; l'incisione era stata fatta verso il margine libero della tuba, dove le pareti erano più sottili.

Il massimo diametro della dilatazione, era parallelo all'asse della tuba ed aveva l'estensione di centimetri 3,2.

Applicato alla parete posteriore sta l'embrione, il quale ad un primo esame si presentava coperto di depositi granulari rossastri, che difficilmente potevano essere rimossi. Esso non si dimostrava di conformazione normale; ciò in parte poteva essere attribuito al metodo di conservazione, ma in special modo doveva dipendere da un difetto da un arresto nello suo sviluppo. (Vedi Fig. 1ª e 2ª).

Si distingue nell'embrione una estremità cefalica libera ed una caudale aderente, l'estremità cefalica più grossa non presenta incurvatura, è posta sulla stessa linea del tronco, e non si distinguono particolarità le quali dimostrino lo sviluppo degli organi cefalici. Sulla faccia anteriore del tronco si trova una sporgenza che poteva considerarsi come rappresentante della regione cardiaca od epatica. Il dorso e tutto il lato destro erano applicati sulle membrane e furono un po' deformati nell'indurimento.

L'estremità caudale è aderente alle membrane per mezzo di un cordone o meglio di una plica, la quale risulta formata da un sollevamento dell'Amnios, sotto del quale dovrebbero decorrere gli elementi del funicolo ombellicale. La plica è lunga 5 mm. forma un angolo retto con l'asse dell'embrione e si dirige in avanti facendo inflessioni, le quali meglio si scorgono nelle sezioni microscopiche.

Sulla medesima linea dell'asse dell'embrione la plica si pre-

senta breve e robusta, e lega strettamente l'estremità caudale colle membrane. Per questa disposizione ne risulta che l'embrione è abbastanza fisso, godendo solo di limitati movimenti di lateralità e non di rotazione. Non esiste nessun rudimento di estremità.

L'embrione quindi è grandemente modificato nella sua conformazione esterna è ridotto ad un informe tubercolo il quale solo per i suoi rapporti con le membrane può essere riferito ad una formazione embrionale. Anche la sua consistenza è poco pronunciata: e malgrado la sua superficie non dimostri in alcun punto traccie di distruzione, è certo però che esso non avrebbe tardato a scomporsi se avesse continuato a soggiornare nel seno materno.

L'embrione è orientato per modo che il suo asse è parallelo all'asse della tuba, l'estremità cefalica essendo rivolta verso il padiglione e la caudale verso l'utero.

La cavità nella quale si trovava racchiuso il prodotto era piuttosto ampia. L'Amnios che la circoscriveva era intimamente legato con il Chorion. Non fu possibile di rinvenire i residui della vescicola ombellicale.

La parete della cavità dell'ovo si presentava con caratteri molto diversi dall'ordinario. All'esame, coadiuvato anche da lente d'ingrandimento, non si potevano distinguere particolarità le quali potessero essere riferite alle membrane d'origine fetale o materna.

Questa parete innanzi tutto non aveva egual spessore in tutta la sua estensione. Nel punto ove l'ovo fu aperto era più sottile e, come abbiamo già detto, questo punto corrispondeva al margine libero della tuba; la parte più robusta invece era in rapporto col punto dove si distaccava il legamento largo e raggiungeva lo spessore di 8 mm.

Il colore della sezione era nerastro: alla pressione si dimostrava friabile; aveva tutto l'aspetto di un coagulo sanguigno, il quale ci mascherava ogni particolarità di struttura, e non era possibile di distinguere il Chorion e le sue villosità. In alcuni tratti però in mezzo al fondo scuro spiccavano alcune piccole isole biancastre che l'esame microscopico ci dimostrerà costituire delle dipendenze del Chorion.

La faccia interna del sacco dell'ovo, quella che circoscriveva il liquido amniotico, nella massima parte della sua estensione

si presentava d'aspetto leggermente ondulato: per l'esistenza di piccoli e regolari sollevamenti divisi da superficiali solchi. I sollevamenti apparivano di colore bluastro, e corrispondevano a spazi pieni di sangue che il Chorion e l'Amnios limitavano verso la cavità amniotica.

La faccia esterna del sacco dell'ovo, regolarmente convessa, era in gran parte libera ed indipendente, contigua con la mucosa della parete tubarica. Essa si presentava di un colore grigiastro come se fosse coperta da una membrana abbastanza robusta ed un po' rugosa nella sua superficie libera, intimameute aderente alle parti sottostanti, la quale aveva l'aspetto di una membrana mucosa, e si continuava in realtà colla mucosa tubarica attorno al punto ove l'ovulo aderiva strettamente colla parete della tuba.

Esaminando un po' attentamente con lente d'ingrandimento questo punto di passaggio, si trova che non solo vi esiste continuità fra la mucosa e la membrana che riveste il sacco dell'ovo, ma anche le pliche, così caratteristiche della mucosa tubarica e che sono ancora ben sviluppate e numerose nel nostro esemplare, appariscono anche sulla superficie del sacco dell'ovo, in quel tratto almeno più vicino al punto di sua inserzione.

La parte che era fissa alla parete della tuba non era molto estesa, per cui tutto l'ovo godeva di una certa mobilità entro la cavità della tuba che lo racchiudeva. Questa parte non poteva essere ben studiata che per mezzo di sezioni microscopiche e corrispondeva all'ilo della tuba.

La dilatazione della tuba che conteneva l'ovo, aveva anche essa le pareti più sottili verso il margine libero e più robuste verso il margine aderente. La mucosa in tutta la parte che era semplicemente applicata all'ovo, aveva caratteri che ricordavano la condizione normale.

Le pliche erano solo più strettamente applicate fra loro, per la compressione che avevano subito nell'ingrandimento dell'ovo, ma la superficie mucosa non era per nulla modificata e non esisteva nessuna formazione che potesse essere paragonata alla decidua.

Già adunque da questo primo esame il nostro preparato presentava disposizioni speciali le quali meritavano d'essere più attentamente studiate. Oltre all'arresto di sviluppo dell'embrione, si trovano variazioni nella costituzione delle membrane che cir-

condano l'ovo, principalmente in quelle d'origine materna. Non poteva essere distinta una decidua diretta; la decidua riflessa se poteva considerarsi come rappresentata da quella membrana la quale era aderente alla superficie esterna del sacco, essa si allontanava grandemente, nel suo modo di comportarsi, da quanto si osserva nella ordinarie gravidanze uterine.

Le ovaie si presentavano normali: il corpo luteo della gravidanza esisteva nell'ovaia dello stesso lato della gravidanza tubarica.

Dopo aver soggiornato ancora per qualche tempo nell'alcool furono studiati microscopicamente diversi punti della tuba e della parete del sacco dell'ovo. Quest'ultimo presentava serie difficoltà, per la sua durezza e friabilità ad essere convenientemente e regolarmente sezionato in larghi tratti, e le sezioni non riescirono perfettamente colorite. Ciò malgrado i preparati erano adatti a dimostrare le più importanti particolarità di struttura e i rapporti topografici delle diverse parti. Incominciamo lo studio microscopico dell'embrione.

Embrione.

L'embrione fu sezionato insieme al tratto della parete del sacco dell'ovo sulla quale veniva ad impiantarsi il cordone o meglio la plica ombellicale, ed in tal modo furono ben precisate le relazioni che essa plica aveva con le membrane d'origine fetale.

Queste sezioni sono ancora convenientissime per dimostrare i rapporti intimi che esistono fra le membrane ovariche di origine fetale e quelle di origine materna. La plica ombellicale si continuava con la parete dell'ovo, in un punto in cui questa si presentava libera di aderenze con la tuba, quindi le sezioni comprendono tutto lo spessore della parete del sacco ovarico; e questo è uno dei più favorevoli per uno studio attento delle diverse parti. Tutto il preparato prima d'essere incluso in paraffina fu colorito in totalità col borace carmino.

L'embrione fu compreso in oltre 500 sezioni, lo studio delle quali è di scarsa utilità per il nostro argomento. L'embrione in tutta la sua estensione è invaso da un processo di atrofia, il quale è più avanzato di quello che abbiamo descritto nelle precedenti comunicazioni (Oss. II e III). Tutti gli elementi costitutivi sono profondamente alterati, nessuno si trova in condizioni normali.

Ciò malgrado essi possono essere ancora distinti riguardo alla loro provenienza. Le dipendenze dell'ectoderma si sono meglio conservate. Tutta la superficie dell'embrione è limitata da un unico strato di cellule fortemente appiattite con nucleo a bastoncino piuttosto colorito, il quale ci rappresenta la lamina cornea. In molti punti essa si distacca dalle parti sottostanti ed appare allora sotto forma di un finissimo nastro trasparente sparso regolarmente da nuclei. Il sistema nervoso centrale è ancora distinguibile ma in completa rovina. Gli elementi qui sono più stipati che non nel mesoderma, ed i nuclei più intensamente coloriti. Anche la corda dorsale in alcuni tratti può essere riconosciuta e seguita.

L'estremità cefalica è solamente distinta per il maggior volume che assume la parte che rappresenta il sistema nervoso centrale; del resto non si osservano nessuna delle particolarità così caratteristiche di questa regione. Nè esistono rudimenti di vescicole oculari ed uditive; nè si riscontra traccia dell'apparato branchiale.

Venendo più caudalmente si notano degli accumuli di cellule tutte profondamente guaste, che potrebbero essere interpretati per qualcuno dei visceri che vanno svolgendosi dal mesoderma o entoderma, ma uno studio attento di essi non ci condurrebbe ad alcun risultato.

Merita però d'essere accennata la mancanza di vasi sanguigni nell'interno dell'embrione, e la nessuna traccia di rudimento cardiaco. Il disturbo nello sviluppo in questo nostro caso, avvenne senza dubbio nel mentre il canale midollare si rendeva indipendente dalla lamina cornea, e nel momento in cui incominciava lo sviluppo del sistema vascolare.

Il mancato sviluppo dei vasi sanguigni, tanto nell'embrione quanto negli annessi fetali, è forse la causa principale delle anomalie di sviluppo che stiamo studiando, e la condizione in cui si trovava l'ovo lontano dalla sua sede naturale contribuì certo a produrre questo difetto nello sviluppo.

Verso l'estremità caudale le sezioni comprendono il funicolo ombellicale.

Esso non si origina dalla faccia ventrale dell'embrione, ma dalla sua estremità caudale formando quasi la continuazione di essa.

Incomincia a comparire la parte embrionale del cordone e questa si presenta dilatata a guisa di imbuto, e gli elementi

dell'embrione sembrano prolungarsi per un certo tratto entro il funicolo; segue quindi l'estremità che si continua con le membrane e qui appare più ristretto. Nel complesso si presenta abbastanza lungo paragonato collo sviluppo dell'embrione e descrive una brusca inflessione come si scorge nella fig. 3ª.

La sua costituzione è molto semplice. È rivestito alla sua superficie esterna da un unico strato di quei medesimi elementi che rivestono la superficie dell'embrione e che verso le membrane si continuano con l'epitelio dell'Amnios. Se non che accompagnando queste cellule epiteliali dall'embrione all'Amnios, tutto lungo il cordone, si tien dietro alle modificazioni che esse subiscono per divenire un epitelio normale ed attivo, che è appunto quello che riveste la superficie libera dell'Amnios. Le cellule si presentano meno appiattite, più avvicinate fra loro, i nuclei meglio evidenti e rotondeggianti.

L'epitelio nel cordone è sostenuto da uno strato più o meno robusto di tessuto connettivo lasso di provenienza mesodermale. Questo tessuto riempie tutto il cordone ombellicale. Nel punto più dilatato in vicinanza dell'embrione la parte centrale è vuota come se lo spazio fosse stato occupato da un liquido, che non ha lasciato residuo. Nella costituzione del cordone manca quindi la parte più essenziale che sappiamo essere formata dai vasi sanguigni, dal canale vitellino e dal canale allantoideo. Non esiste la minima traccia di questi organi, e non possiamo nemmeno dire se tutti si siano realmente sviluppati nel nostro embrione.

Quindi l'embrione è legato alle sue membrane da cui deve trarre i materiali per il suo accrescimento solamente per la formazione dell'Amnios, la quale non ha alcun significato nutritivo. In ciò sta forse la causa prima di una gran parte di anomalie di sviluppo che avvengono nelle primissime fasi.

Amnios e Chorion.

Continuando a studiare la sezione, la quale è rappresentata nella fig. 3ª, noi vediamo il modo con cui si presenta costituita la parete del sacco ovolare nel tratto in cui esso non contrae aderenze con la tuba e troviamo che le membrane nei loro rapporti e nella loro costituzione si avvicinano grandemente a quanto noi sappiamo esistere nelle condizioni normali. Le variazioni saranno rilevate nel descrivere i diversi strati. Intanto se noi par-

tendo dalla faccia interna procediamo verso l'esterno, troviamo le seguenti parti:

1° L'Amnios; 2° il Chorion colle sue villosità, poi 3° ampie lacune sanguigne nelle quali sono immerse una parte delle villosità choriali; quindi un 4° strato più o meno esteso di struttura un po' difficile a potersi ben definire, il quale comprende qua e là villosità del Chorion modificate però nella loro costituzione (infarti e stravasi sanguigni): e finalmente un ultimo strato che forma il rivestimento esterno del sacco dell'ovo e che anch'esso è di non facile interpretazione.

Diciamo brevemente delle particolarità che presentano gli strati che siamo andati enumerando.

L'*Amnios* è ben distinto in tutta l'estensione del sacco, la sua costituzione è normale. Esso è strettamente applicato al Chorion per modo che non è possibile di stabilire i limiti tra il tessuto mesodermale appartenente all'una e all'altra membrana. È scomparso completamente lo spazio Amnio-Choriale. Ho fatto speciale attenzione se in questo tessuto si trovassero resti del canale vitellino come furono riscontrati nella Oss. III (vedi Tav. III, fig. 5) ma il risultato fu completamente negativo (Fig. 3ª, 1 e 2).

Il *Chorion* forma uno strato sottile che conserva pressochè uguale spessore in tutti i punti in cui fu esaminato. Il suo tessuto mesodermale ha l'identica disposizione di quella dell'Amnios e manca completamente di vasi sanguigni. Il suo rivestimento epiteliale ben distinto e ben colorito si presenta diversamente secondo i punti in cui lo esaminiamo. Là dove il Chorion colla sua faccia esterna corrisponde a lacune sanguigne, come in tutta la parte sinistra della fig. 3ª l'epitelio si presenta nella sua pienezza di sviluppo. Non solo forma uno strato continuo e regolare, ma in moltissimi punti le cellule epiteliali si raccolgono in gruppi di quattro, otto ed anche di numero maggiore, i quali sporgono sulla superficie del chorion sotto forma di bottoni o germogli, che ci rappresentano la prima origine delle villosità, siccome venne descritto da diversi autori. Qui adunque il Chorion per la sua costituzione e per i suoi rapporti deve essere considerato come normale.

Ma la superficie esterna del Chorion per grande estensione corrisponde a stravasi sanguigni, avvenuti in epoca più o meno lontana oppure a stratificazioni d'aspetto fibrinoso (infarti bianchi) (vedi l'estremità destra della fig. 3 *H*). E mentre in questa loca-

lità le preparazioni microscopiche sono rese più difficili e meno dimostrative, il Chorion si presenta pure profondamente modificato. Lo strato ectodermale non si mostra più continuo, ma interrotto qua e là, gli elementi epiteliali sono alterati nella loro forma e disposizione, il nucleo intensamente colorito non dimostra qui nessuna struttura, finchè si arriva in punti in cui il Chorion col suo tessuto mesodermale sembra far corpo con le parti soprastanti senza l'interposizione di un rivestimento epiteliale. Qui senza dubbio ci troviamo in presenza di condizioni morbose le quali furono quelle che cagionarono le alterazioni del Chorion e la scomparsa del suo epitelio.

E siccome questi fatti si riscontrano su larghi tratti della superficie dell'ovo, oltre alle alterazioni anatomiche dovevano produrre gravi disturbi funzionali.

Identiche disposizioni si osservano sulle dipendenze del Chorion, voglio dire sulle *sue villosità*. Queste, siccome ho già notato, non potevano essere ben scorte macroscopicamente essendo mascherate in gran parte dagli infarti, solo erano rese ben manifeste dalle sezioni microscopiche.

Esse sorgevano su tutti i punti del Chorion e pressochè in eguale sviluppo. Alcune ramificate ed altre semplici. Dalla sezione furono colpite in diverso senso. Esistevano su tutta l'estensione del preparato, più numerose vicino al Chorion, ma non mancavano anche vicino alla superficie esterna del sacco dell'ovo. Le une apparivano ancora legate al Chorion; altre invece erano completamente isolate. Questo loro modo di presentarsi e questa distribuzione non si allontanava gran fatto da quanto si osserva ordinariamente. Il Chorion non poteva ancora distinguersi in una porzione liscia ed in una porzione frondosa.

Studiando poi la costituzione delle villosità si trovarono differenze essenziali paragonando l'une colle altre. Le villosità che sorgendo dal Chorion si spingevano nelle lacune sanguigne erano quelle che si presentarono tipicamente costituite tanto nella loro parte fondamentale, quanto nel loro epitelio di rivestimento (Fig. 3ª *Vi.*).

Questo in principal modo merita un cenno speciale. In molte villosità, in quelle principalmente che non avevano incontrato ostacoli nel loro sviluppo, l'epitelio era disposto in un duplice strato in modo che non si potrebbe meglio dimostrare.

Lo strato cellulare esterno è più sottile, i nuclei più inten-

samente coloriti sono schiacciati perpendicolarmente alla superficie del villo; i limiti cellulari non sono distinti; forma come un orlo che divide il villo dal sangue contenuto nelle lacune senza l'interposizione di altri elementi formativi.

Il rivestimento interno più delicato, è formato anch'esso da un solo ordine di cellule ben individualizzate. con nuclei voluminosi ovali disposti perpendicolarmente alla superficie della villosità e meno coloriti.

I due strati si dimostrarono indipendenti fra loro ed indipendentemente dal tessuto mesodermale del villo; poichè in alcuni punti essi apparivano, per difetto nella preparazione, isolati per una certa estensione. La figura 5ª disegnata ad un maggiore ingrandimento, dimostra le cose che siamo andati descrivendo. Essa rappresenta una parte della villosità della fig. 3ª, ma in sezioni più inferiori ($e-2'$).

In alcune villosità, come in quella disegnata nella fig. 3ª i due strati cellulari potevano essere seguiti fino al punto in cui esse si impiantavano sul Chorion, ed in allora si scorgeva che era il 2° strato cellulare quello che si continuava con le cellule che rivestivano il Chorion, per cui esso rappresentava la vera parte ectodermale del villo. Lo strato esterno non poteva essere seguito, nè ben dimostrato sul Chorion; l'origine sua deve essere diversa, come pure differente sarà il suo significato.

Sono ben note le discussioni che si sono fatte sulla esistenza di un secondo strato epiteliare del villo, e sulla interpretazione ad esso data dai diversi autori.

Perciò che concerne la gravidanza tubarica, questa disposizione fu notata non di rado; e recentemente il *Gunsser* (Ueber einen Fall von Tubarschwangerschaft. ein Beitrag zur Lehre von den Beziehungen zwischen den Chorionzotten und deren Epithel zu dem mütterlichen Gewede. - Centralblatt Allg. Pathologie, 15 marzo 1891) la descrive pure in un caso da lui osservato, facendo provenire lo strato esterno dall' epitelio della mucosa tubarica alterato. Se nella nostra osservazione il duplice strato epiteliale del villo non può essere messo in dubbio , tanto esso si presenta chiaro ed evidente, non possiamo dir nulla di preciso riguardo alla sua provenienza.

Intanto se noi portiamo la nostra attenzione sopra le villosità che si trovano incluse in mezzo a coaguli sanguigni o meglio ancora le altre che stanno fra strati di fibrina canaliz-

zata (infarti), noi troviamo che le cose sono di molto modificate. In questi siti i villi si trovano in rapporto con parti le quali non dimostrano alcuna organizzazione, e finiscono anche essi per essere alterati e distrutti. La parte che si risente maggiormente si è l'epitelio.

Esso in molte villosità è completamente scomparso, in altre è in via di distruzione osservandosi solo detriti cellulari alla periferia del villo. In alcuni punti si può quasi tener dietro al processo di distruzione e di scomparsa dell' epitelio. Così nella fig. 3 in *g* si trova una villosità la quale in parte fu colpita in senso longitudinale. Ora un tratto di questa villosità si trova compreso in un tessuto in via di disorganizzarsi, e questa è affatto spoglia di rivestimento epiteliale, mentre il tratto più centrale, sembra sporgere liberamente nell'interno di una lacuna sanguigna e conserva il suo epitelio nel modo sopradescritto. Il punto di passaggio fra l'uno e l'altro tratto si opera in modo abbastanza brusco.

Le villosità spoglie del loro epitelio, sono solo riconoscibili dal loro tessuto mesodermale, il quale sembra non aver risentito così grandi modificazioni, ed esse compaiono e spiccano sotto forma di isole scolorite in mezzo ad un fondo leggermente tinto in rosso. Tutto ciò non si allontanerebbe grandemente da quanto si osserva nella placenta uterina.

Ora la scomparsa dell'epitelio delle villosità nelle regioni sopraccennate è diversamente spiegato. Alcuni ammettono che ciò avvenga per compressione della villosità involta dal tessuto deciduale intervilloso degenerato. Ma se ciò fosse, l'azione meccanica dovrebbe innanzi tutto e maggiormente far sentire la sua azione sul tessuto mesodermale del villo che è più delicato e meno resistente.

Invece nei nostri preparati lo stroma del villo non si presenta grandemente modificato. Per cui è più razionale di ammettere che il villo non sia completamente passivo in questo fenomeno, ma che esso dipenda piuttosto da una alterazione o trasformazione del suo epitelio.

Questa idea sarebbe avvalorata dal fatto che le villosità che ho riscontrato in mezzo a stravasi sanguigni, le quali furono evidentemente soggette a forte e prolungata compressione, esse si dimostravano alterate tanto nel loro epitelio quanto nel loro stroma.

Di più in alcune poche villosità si può sorprendere il processo nel mentre si inizia. Si trovano infatti villi che sembrano pres-

sochè normali ad un piccolo ingrandimento, solo dimostrano un po' di irregolarità nel loro epitelio di rivestimento. Ma attentamente esaminando con mezzi più adatti si trova che il villo incomincia ad essere circondato da depositi fibrinosi, i quali alterano l'epitelio, senza che questo abbia a subire pressioni dall'esterno. Si hanno immagini le quali ricordano le figure date da alcuni autori, e in special modo da *Minot* nel suo interessante lavoro *Uterus and Embryo.*

In tutte le villosità, sotto qualunque forma esse si presentassero, mancavano completamente i vasi sanguigni.

Se si fa astrazione da quest'ultima circostanza, la quale è in rapporto col modo di presentarsi dell'embrione, nel resto il Chorion ha disposizioni identiche a quelle che furono trovate nelle gravidanze uterine.

Subito al di fuori del Chorion ed in molti punti della superficie del sacco ovolare, si trovano *lacune sanguigne* abbastanza ampie, nelle quali il sangue doveva liberamente circolare. Si è in corrispondenza di questi punti che il Chorion si presenta nelle migliori condizioni fisiologiche (Fig. 5ª, 4).

Ho cercato invano l'esistenza di una parete propria endoteliale che limitasse questi spazi lacunari sia verso la superficie del Chorion e delle sue provenienze, sia verso l'esterno. Le villosità immerse in queste lacune, erano bagnate direttamente dal sangue, senza l'interposizione di alcun rivestimento, che non fosse quello che abbiamo veduto appartenere al villo.

Le lacune sanguigne così disposte prendevano una parte non troppo grande alla formazione del sacco dell'ovo. La parte maggiore era costituita da stravasi sanguigni che erano generalmente sparsi e formavano il grande spessore della parete, e dei così detti infarti bianchi, o punti necrotici che rappresentano parti degenerati della decidua, e che trovandosi frequentemente nelle ordinarie placente non è ancora ben stabilito se debbono considerarsi come disposizioni normali o di natura patologica.

In ogni caso però la funzionalità del villo è completamente abolita nè è possibile che essa venga ristabilita. Di queste formazioni basterà il sopradetto, non potendo dal nostro caso trarre maggiori schiarimenti.

Completiamo lo studio del sacco ovarico dicendo della sua superficie esterna. Già all'esame microscopico abbiamo notato

come tutta la superficie libera dell'ovo apparisse rivestita da una membrana, la quale nel punto d'inserzione alla tuba, sembrava continuarsi con la mucosa tubarica. L' esame delle sezioni conferma pienamente questo trovato. Tutta la superficie esterna del sacco dell'ovo è rivestita da un solo strato di cellule fortemente colorite, disposte a guisa di un epitelio. Malgrado gli elementi non siano normalmente costituiti, ciò nondimeno si può benissimo scorgere come essi siano di forma cilindrica e disposti perpendicolarmente alla superficie che rivestono. Con maggiori o minori modificazioni questo strato fu riscontrato in tutti i punti della capsula dell'ovo in cui essa fu esaminata (Fig. 3ª, 7).

Serviva di sostegno a queste cellule epiteliari uno strato robusto di tessuto connettivo abbastanza compatto, di aspetto fibrillare, nel quale, oltre ai soliti elementi si trovavano cellule rotonde in discreta quantità, ed altre fusiformi con nucleo molto allungato, le quali più che al tessuto connettivo sembravano appartenere al muscolare liscio. Non esistevano vasi sanguigni, e non si trovarono elementi che potessero essere paragonati alle cellule deciduali (6).

Colla sua faccia interna andava insensibilmente confondendosi con le altre formazioni del sacco ed in specie con gli infarti bianchi o necrotici.

Epitelio e strato connettivo nel loro complesso formavano adunque una specie di membrana la quale poteva considerarsi come una continuazione e modificazione della mucosa tubarica.

Gli studi di confronto appoggiano questa idea, e volendo però meglio accertarmi di questa circostanza che non è certo priva d' interesse per il nostro argomento, ho fatto sezioni in corrispondenza del punto in cui l' ovolo prendeva inserzione sulla tuba, e nella profondità del solco che esiste fra l'uno e l'altra, non si scorge nessuna interruzione fra la mucosa tubarica, quì già sensibilmente modificata, e la membrana che riveste l'ovo; anzi sul primo tratto di questa si notano delle gracili ma vere pliche che distinguono in sommo grado la mucosa della tuba.

Adunque resterebbe ben stabilito che la superficie esterna dell'ovo anzichè da una formazione deciduale (riflessa) sarebbe rivestita da tutti gli elementi della mucosa tubarica, d' alquanto modificati per adattarsi all' ingrandimento che subiva l'ovo. Se tutto ciò risulta chiaro dall'esame dei nostri prepa-

rati, non è però di facile spiegazione. Non è infatti facile a comprendere il modo con cui si è formato questo rivestimento più esterno della superficie dell'ovo.

L'ipotesi la più accettabile, la più razionale, sarebbe quella di supporre che l'ovolo al suo principio si sia annidato nello spazio circoscritto da due pliche della mucosa tubarica. La parte che guardava il fondo di questo spazio assumeva delle aderenze strette colla parete della tuba, e da quì come vedremo, traeva in principal modo, i materiali per il suo accrescimento; nel resto della sua superficie esso veniva abbracciato dalle pliche della mucosa, le quali lo rivestivano in tutta la sua estensione, si confondevano e compartecipavano alla formazione delle membrane.

Adottando quest'ipotesi, rigorosamente parlando, non esisterebbe superficie libera dell'ovo; ciò che noi abbiamo considerato come tale, non sarebbe che la faccia esterna delle pliche entro le quali si svolgeva l'ovo. La faccia esterna delle pliche malgrado le modificazioni subite per il distendimento e forse anche per disturbi di nutrizione, ha conservato però sempre i caratteri della mucosa tubarica, mentre la faccia interna delle pliche, quella che si trovava in rapporto diretto dell'ovo si è trasformata in decidua e si è messa in rapporto intimo con le villosità del Chorion, ed ha dato origine a gran parte delle particolarità che abbiamo veduto costituire la parete del sacco ovolare. Questa interpretazione è anche in armonia con quanto si osserva sulla tuba nel punto in cui essa è dilatata dal prodotto del concepimento e che studieremo a momenti.

Stando le cose in questi termini, si vede già da questo fatto come le condizioni in cui si sviluppa l'ovulo nella tuba siano un po' diverse da quelle dell'utero; e se il processo può considerarsi come identico nella sua parte fondamentale, esso varia però grandemente nella esecuzione; e come non sia sempre possibile di poter fare confronti per trarre deduzioni o rischiarimenti.

La possibilità che l'ovo fecondato resti compreso fra due pliche della mucosa tubarica era già stata accennata da *Leopold* (1)

---

(1) *Tubenschwangerschaft mit äusserer Ueberwanderung des Eies und consecutiver Hæmatocele retrouterin.* Dott. Gerhard Leopold. *Archiv für Gynäkologie*. Vol. 10.

fin dal 1877 e più recentemente da *Klein* (1) (1890); ed era stata messa avanti questa ipotesi in special modo per dar spiegazione di alcune osservazioni le quali sembravano contradire a quanto era generalmente ammesso sul modo di comportarsi delle membrane materne nella gravidanza tubarica.

La maggioranza degli autori antichi e recenti sono infatti d'accordo nel considerare come carattere distintivo della gravidanza tubarica, la mancanza di una decidua riflessa. Ora il *Weit* (2), il *Winckel* (3) ed il *Frommel* (4) hanno riferito casi nei quali è descritta e figurata una decidua riflessa. Ma nè la descrizione nè il disegno furono sufficienti a produrre nell'animo di tutti il convincimento che si tratti qui di una vera formazione deciduale; e lasciano aperto il campo ad altre interpretazioni.

Il nostro trovato sarebbe più dimostrativo sopra questo proposito, poichè realmente su tutta la superficie dell' ovo esiste una membrana d'origine materna, la quale non solo partecipa alla costituzione della parete del sacco, ma di certo ha somministrato anche materiali alle formazioni che si trovano situate sotto di essa. E forse alcuno potrebbe andare tant'oltre da riconoscere nello strato esterno dell' epitelio della villosità, una provenienza dell' epitelio che rivestiva la faccia ovolare delle pliche della mucosa tubarica nel mentre esse si adattavano all'ovo che andava ingrandendo.

Ma facendo astrazione da tutto ciò, che non può essere in alcun modo dimostrato, resta sempre la domanda se questo rivestimento materno costituisca una vera decidua riflessa nello stretto senso della parola, vale a dire quale noi la riscontriamo nell'utero. Non crediamo che ciò sia. Già il Leopold scriveva: Possono nei primi tempi le pliche minime della mucosa della tuba coprire l'ovo fecondato formando per così dire una riflessa subitanea: più in là però non esisterà una vera riflessa nè si formerà nel senso della riflessa uterina mediante prolifeazione della decidua vera. Un appoggio a questo nostro modo di vedere

(1) *Zur Anatomie der schwangeren Tube*, von Gustav KLEIN. *Zeitschrift für Geburtshülfe und Gynäkologie.* XX Band, 2 Heft, pag. 288.

(2) SCHROEDER, *Lehrbuch der Geburtshülfe.* – Elfte Auflage. Bonn 1891; edizione fatta da ALSHAUSEN e WEIT.

(3) WINCKEL, *Lehrbuch der Geburtshülfe.* Leipsig 1889.

(4) *Zur Therapie und Anatomie der Tubenschwangerschaft;* prof. Richard FROMMEL. *Deutsches Archiv für Klinische Medicin.* Leipsig, 1888, Band 42.

lo avremo studiando più avanti le condizioni in cui si trova la mucosa della tuba che non è in diretto rapporto con l'ovo.

Un ovolo che si sviluppa in queste condizioni presenta delle strette affinità con quanto si osserva in molti mammiferi dove manca una decidua riflessa ed il prodotto resta subito circondato dalle pareti uterine.

Ben inteso che tutto quanto siamo andati dicendo, si applica al caso nostro speciale e non può essere generalizzato a tutte le gravidanze tubariche, le quali presentano forse troppe varietà per essere ricondotte ad unità di tipo.

Vediamo ora le condizioni in cui si trovavano le due *tube di Falloppio*, che furono attentamente esaminate. Furono fatte sezioni trasversali complete della tuba del lato non gravido in vicinanza al punto in cui essa fu divisa dall'utero: — e della tuba del lato gravido verso la sua estremità uterina dove non esisteva le gravidanza; — fu esaminata in diversi punti la parete della tuba là dove si presentava distesa, libera e abbracciava il prodotto del concepimento; e finalmente furono fatti preparati della tuba nella località in cui aderiva l'ovo, comprendendo nelle sezioni anche parte delle pareti di questo.

La tuba del lato opposto alla gravidanza si presentava in condizioni perfettamente normali, sia per rispetto al modo con cui si comportavano le ricche pieghe della mucosa, come per la conservazione del suo epitelio cilindrico-vibratile. Questi preparati erano preziosi come termini di confronto.

La tuba del lato destro non partecipava per nulla ai fenomeni che si svolgevano nel lato opposto. Ciò si accorda completamente con le osservazioni che vennero fatte durante la gravidanza ordinaria, essendosi le tube dimostrate indifferenti.

Le sezioni della tuba gravida fatte pressochè nello stesso punto dove fu esaminata la destra, vale a dire in vicinanza del punto dove il chirurgo praticò l'incisione, mostravano alcune differenze. Queste consistevano in un maggior spessore delle pareti dovuto ad un aumento della tonaca muscolare tanto nello strato longitudinale che circolare.

Il lume del canale si presentava più ristretto e la disposizione delle pliche della mucosa men ricca e complicata: si poteva dire che le pliche raggiungevano il massimo di complicazione nella tuba non gravida e il massimo di semplicità nella gravida.

L'epitelio di rivestimento della mucosa era però normale. I vasi sanguigni erano più voluminosi e più numerosi nelle pareti della tuba gravida. Non ho riscontrato alterazioni della mucosa tubarica le quali potessero essere considerate come elemento eziologico della gravidanza.

Là dove la tuba era dilatata per la gravidanza, essa aveva le pareti diversamente sviluppate. Queste si comportavano come le pareti del sacco ovolare, raggiungevano grande sottigliezza verso il margine libero ed andavano ingrossando quanto più si procedeva verso l'inserzione peritoneale. Verso il margine libero della tuba tutto era disposto per una rottura delle pareti, la quale non sarebbe tardata ad avvenire senza l'intervento opportuno del chirurgo.

All'esame microscopico la mucosa si presenta con caratteri pressochè normali, vale a dire che da essa sorgevano pliche, le quali si comportavano come d'ordinario; se esse apparivano più distanti fra loro, meno numerose e più delicate, ciò era senza dubbio dovuto al forte distendimento che ha provato la mucosa per adattarsi all'accrescimento dell'ovo (Fig. 4 T.).

Il corpo della mucosa e delle pliche era ricco di cellule giovani. Scarsi e poco sviluppati erano i vasi sanguigni. Nello spessore delle pliche erano però meglio evidenti che non nello strato normale.

Tutta la superficie della mucosa e delle pliche era rivestita da un unico strato di cellule cilindriche vibratili. L'epitelio mancava in nessun punto. Volendo essere rigorosi, si potrebbe dire che esso era un po' meno regolarmente disposto, meno alto, con nucleo più intensamente colorito: e ciò si scorgeva non in corrispondenza delle parti che erano più esposte alla pressione, come all'estremità delle pliche, ma in special modo nella profondità dei seni e di quei spazi che stavano alla base delle pliche. Non in tutti i punti era possibile di scorgere bene e distintamente le ciglia vibratili. E ciò deve essere attribuito in parte al metodo di conservazione, ai depositi granulari che esistevano alla superficie della mucosa, e che disturbavano l'osservazione, ed un po' anche allo spessore delle sezioni.

Qualunque siano per essere queste variazioni delle cellule epiteliali, il fatto essenziale a notarsi si è che l'epitelio era presente in tutta l'estenzione della mucosa, e non solo accennava a scomparire, ma non era grandemente modificato dalla presenza dell'ovo.

Forse se la gravidanza avesse progredito, modificazioni più essenziali sarebbero avvenute più tardi, ma intanto le cose si presentavano in modo da non lasciar quasi sospettare dei fenomeni che si andavano svolgendo nella cavità della tuba.

Questa osservazione non sarebbe quindi d'accordo con quanto sarebbe stato trovato da altri autori, i quali non solo dicono che l'epitelio cade completamente ma che si forma dalla mucosa una vera decidua. Il Langhans (1) che fu uno dei primi a ben studiare la gravidanza tubarica scrive: « *Su tutta la faccia interna della parte allargata della tuba si forma mediante prolificazioni della mucosa una membrana simile alla decidua molto iniettata e che presenta un aspetto retiforme.* »

Ed il Klein (loc. cit.) che più recentemente ha descritto un caso di gravidanza della tuba dice: Nella parte gravida l'epitelio tubarico scompare quasi completamente, più tardi proprio completamente. In ciò sono d'accordo tutti i ricercatori.

La nostra osservazione sarebbe anche non conforme a quanto venne generalmente riscontrato nell'utero gravido. Mentre nell'utero della donna e di animali si trovano già essenziali modificazioni nella sua mucosa prima che l'ovo vi giunga, e queste modificazioni persistono e si esagerano anche quando l'ovulo si è fermato e si sviluppa in altro punto delle vie genitali, nel nostro caso invece la mucosa della tuba pare quasi non accorgersi della presenza di un ovo che ha già raggiunto un certo volume; e le poche particolarità riscontrate possono avere una spiegazione meccanica.

Nel punto in cui l' ovo aderiva alla tuba, non solo l' epitelio ma tutta la mucosa era completamente scomparsa. Solo alla periferia persistevano degli spazi più o meno regolarmente circolari, rivestiti da epitelio cilindrico in via di distruzione i quali corrispondevano alla base delle pliche mucose.

Al posto della membrana mucosa si trovava una vera formazione deciduale, la quale in alcuni tratti risultava quasi esclusivamente costituita dai soliti elementi cospicui, nucleati, di forma poligonale, disposti in diversi strati o riuniti in cumuli. La parete del sacco dell'ovo mancava del rivestimento più esterno che abbiamo caratterizzato come mucosa, e si confon-

---

(1) CONRAD und LANGHANS, *Tubarschwangerschaft Ueberwanderung des Eies. Archiv für Gynäkologie*, Bd. IX, 1876.

deva nel resto colla tuba, per modo che se la sezione non corrispondeva ai margini del punto aderente, non era possibile di distinguere i limiti fra le due formazioni. Le villosità del Chorion potevano essere seguite fin contro le pareti della tuba, e le loro estremità si vedevano mettersi in rapporto od essere circondate dalla formazione deciduale. Nello spessore della tonaca muscolare si notavano cospicui vasi sanguigni pieni di sangue, alcuni molto dilatati e ridotti al loro rivestimento endoteliale. Non ho potuto ben riconoscere il rapporto tra questi vasi sanguigni e le lacune riscontrate nelle pareti del sacco, malgrado essi fossero i portatori di sangue alle pareti del sacco ovolare. In questo punto i preparati microscopici riescivano di più difficile esecuzione per il forte stravaso di sangue.

Abbiamo creduto meritevole di uno studio speciale, l'osservazione sopradescritta.

1° Perchè la tuba ed il sacco dell'ovo erano ancora intatti quando essi furono esportati dalla cavità addominale. Nella grande maggioranza dei casi di gravidanze tubariche, la rottura avviene molto tempo prima che il chirurgo intervenga e quindi molti particolari non possono essere ben precisati.

2° Per l'esistenza dell'embrione: generalmente esso manca o perchè fu assorbito o perchè andò perduto e quindi raramente furono ben studiati i suoi rapporti colle membrane che circondano l'ovo.

3° Perchè l'embrione era in uno stato atrofico. Nelle gravidanze tubariche, molto più frequentemente che non in quelle uterine si riscontrano arresti o disturbi di sviluppo dell'embrione. Ciò evidentemente avviene perchè la formazione deciduale che ha scopo eminentemente nutritivo, nella tuba si organizza più tardivamente, è più lenta nella sua evoluzione e non comprende tutta l'estensione della mucosa tubarica ove si è formato l'ovo. Anche nelle forme abortive che non raramente si osservano nell'utero, la spiegazione dovrà essere cercata in parte nel modo con cui si forma la decidua e nella sua costituzione la quale è meno adatta ad elaborare i materiali che devono servire al nuovo individuo che sta svolgendosi.

4° Perchè tutte le membrane ovulari d'origine fetale e materna furono studiate nel loro mutuo rapporto e nelle migliori condizioni di conservazione; e mentre le prime erano ben

distinte e con disposizione pressochè normale, quelle d'origine materna erano grandemente modificate.

5° Per essere il sacco dell'ovo, nella massima sua estensione indipendente dalle pareti della tuba, e per il rivestimento che esso presenta in tutta la parte libera, il quale per la sua costituzione ricorda la mucosa tubarica.

6° E finalmente perchè la mucosa della tuba in tutto il tratto che non dà inserzione all'ovo, si presenta ben poco modificata nella sua costituzione.

Dalla frequenza con cui si presenta la gravidanza tubarica nella specie nostra, si potrebbe dedurre che non fosse cosa troppo difficile l'ottenerla sperimentalmente negli animali. Io ho fatto ripetuti tentativi sulla coniglia senza mai riuscire ad alcun risultato.

Per raggiungere questo scopo io legava il corno uterino di un lato o di ambedue i lati, in molta vicinanza del punto in cui esso si continuava nell'ovidotto. La legatura veniva praticata generalmente al 3° giorno dopo il coito, prima vale a dire che gli ovuli fossero emigrati nell'utero. Il processo operativo fu già da me descritto in altro lavoro (1). Io cercava con questa legatura di impedire che gli ovoli giungessero nell'utero, sperava che essi si fermassero nella tuba e quivi si sviluppassero. Primitivamente queste esperienze erano fatte per disturbare il normale sviluppo delle vescicule, più tardi furono continuate coll'intento di produrre gravidanze estrauterine. Ma le mie speranze furono deluse. Nelle trenta esperienze che fino ad ora ho fatte, mai ottenni una gravidanza tubarica. Si ebbe uno sviluppo delle vescicole, quando tra la legatura e l'ovidotto esisteva un tratto d'utero più o meno esteso, ma allora la gravidanza avveniva sempre nell'utero. Talora si incontrava una leggera dilatazione contenente un liquido senza parti formative sopra la legatura, ma in codesti casi esisteva nessuna modificazione la quale si allontanasse dalle condizioni ordinarie.

---

(1) *Teratogenia sperimentale dei mammiferi.* Torino 1889.

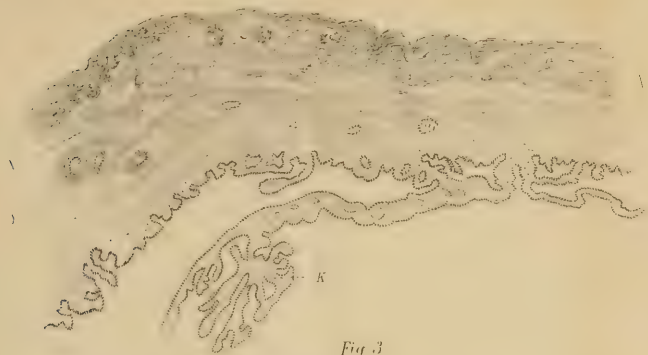
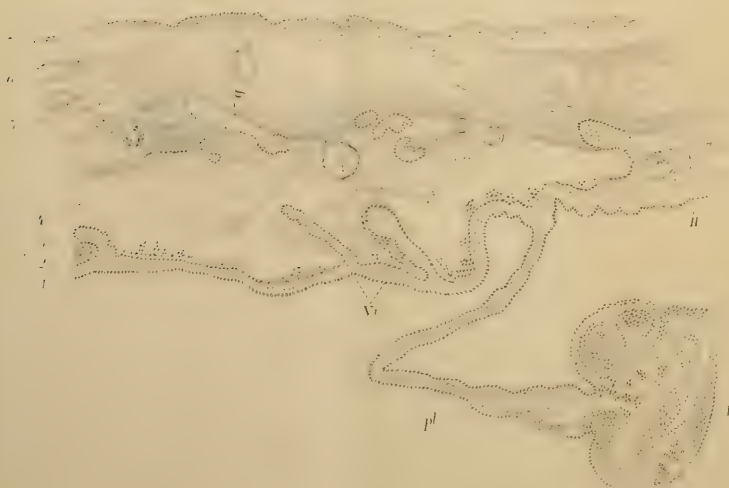
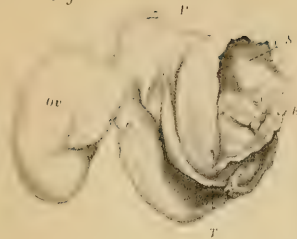
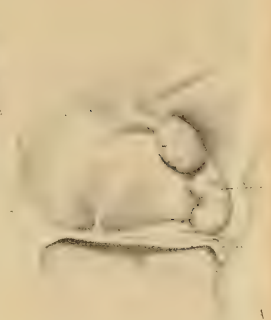
Lit. Salussolia - Torino

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE
della Tav. IV.

Fig. 1ª Tuba aperta nel punto in cui conteneva il sacco dell'ovo pure aperto. *Ov*, Ova. *P*, Padiglione della tuba. *T*, Pareti della tuba. *S*, Sacco dell'ovo. *E*, Embrione. Il tutto disegnato a grandezza naturale.

» 2ª Dimostra il rapporto dell'embrione colle pareti del sacco dell'ovo (a piccolo ingrandimento). *E*, Embrione. *C*, Peduncolo che univa l'estremità caudale dell'embrione colle membrane. *A*, plica amniotica che rappresentava il funicolo ombellicale.

» 3ª Sezione fatta attraverso l'estremità caudale dell'embrione, il funicolo ombellicale e le pareti del sacco dell'ovo. *E*, Embrione nella sua estremità caudale; tutti gli organi sono profondamente alterati. *Pl*, Plica amniotica che lega l'embrione alle membrane *M*, che formano la parete del sacco. Questa risulta costituita: 1° Epitelio dell'Amnios. 2° Tessuto mesodermale dell'Amnios e del Chorion fuso senza limiti. 3° Epitelio del Chorion. 4° Lacune sanguigne. 5° Infarti fibrinosi. 6° Membrana che riveste la superficie esterna del sacco dell'ovo. 7° Epitelio di questa membrana. *Vi*, Villosità del Chorion immerse nelle lacune sanguigne; *g*. Villosità la quale in parte è circondata dall'infarto ed in parte sporge nell'interno di una lacuna sanguigna. *H*, Punto in cui il Chorion colla sua superficie esterna corrisponde all'infarto.

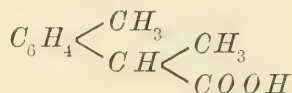
» 4ª Sezione della parete della tuba fatta in corrispondenza del punto in cui fu sezionata la parete del sacco. *K*. Piega della mucosa. *Y*, Mucosa della tuba leggermente inspessita, ma rivestita in tutta la sua estensione da epitelio cilindrico. *X*, Tonaca muscolare.

» 5ª Villosità della figura 3ª (ma corrispondente a sezioni più inferiori) disegnata ad un maggiore ingrandimento per dimostrare il doppio strato epiteliare che riveste la sua superficie. *e*, Strato esterno. *i*, Strato interno. *a*, Tessuto mesodermale del villo privo di vasi sanguigni.

Studi sull'acido parametilidratropico

di G. ERRERA e G. BALDRACCO

L'acido parametilidratropico

$$C_6H_4\left\langle\begin{matrix}CH_3\\ CH\left\langle\begin{matrix}CH_3\\ COOH\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$$

e la aldeide corrispondente, come risulta dalla formula di struttura, contengono un atomo di carbonio assimmetrico, appartengono quindi a quella categoria di composti pei quali si può prevedere la esistenza di due varietà attive e di una inattiva per compensazione extramolecolare.

Lo sdoppiamento dei prodotti sintetici avrebbe un certo interesse, poichè costituirebbe una prova diretta che la formula di struttura attribuita loro da Miller e Rohde (*) e da uno di noi (**), è esatta; interesse che però è di molto diminuito dacchè Widmann (***) dimostrò nel cimene, dal quale i due suddetti composti provengono per ossidazione, la presenza dell'isopropile.

I tentativi da noi fatti in questo senso, riuscirono però a risultati assolutamente negativi.

Esperimentammo la azione degli organismi, tanto sull'acido, quanto sull'aldeide. Il liquido nutriente conteneva per ogni litro d'acqua distillata e sterilizzata, grammi 1,25 d'un miscuglio di sali, fatto nelle proporzioni seguenti:

Fosfato di potassio	parti	50
Solfato di magnesio	»	48
Cloruro di calcio	»	2

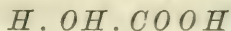
(*) *Berichte der deutschen chem. Gesell.* XXIII, 1075.
(**) Errera, *Gazzetta chim.*, 1891, I, 76.
(***) *Berichte der deutschen chem. Gesell.* XXIV, 439.

Vi si aggiunsero pochi grammi dell'acido, poi alcune goccie di ammoniaca, in modo che il liquido conservasse però sempre reazione acida, quindi si seminarono alcune spore di *penicillium glaucum*. La stessa esperienza fu fatta direttamente sulla aldeide, sopprimendo in questo caso la aggiunta di ammoniaca, ed acidificando invece il liquido con una goccia d'acido fosforico. I palloni vennero chiusi con un semplice tappo di cotone ed abbandonati a temperatura ordinaria (giugno). Nemmeno dopo un mese era comparsa la minima traccia di vegetazione.

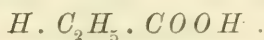
Nè migliori risultati diede la trasformazione dell'acido in un sale di base attiva. Si mescolarono quantità equimolecolari di chinina e dell'acido in soluzione alcoolica; per evaporazione del solvente si separò il sale sotto forma d'un liquido denso, vischioso, che ben presto solidificò *interamente* in una massa cristallina. Questa fu cristallizzata frazionatamente da un miscuglio d'acqua e d'alcool e si ottennero così parecchie porzioni identiche nell'aspetto, costituite da bellissimi aghi setacei raggruppati in mammelloni, solubilissimi nell'alcool, insolubili nell'acqua e fondenti tutti entro limiti ristretti di temperatura, cioè da 112°-116°. L'acido fu isolato separatamente dalle diverse porzioni, ma non si potè constatare in esso mediante un polaristrobometro Wild, la benchè minima traccia di potere rotatorio.

Bischoff (*) nei suoi numerosi e vani tentativi di sdoppiamento di acidi succinici sostituiti, che presumibilmente dovrebbero risultare dalla unione equimolecolare di due composti inversamente attivi, fa osservare che gli acidi finora sdoppiati sono soltanto quelli che accanto al carbossile, contengono direttamente od indirettamente legato all'atomo di carbonio assimmetrico, un ossidrile (come negli acidi racemico, mandelico, lattico, tropico, ecc.) od un gruppo amidico (come negli acidi aspartico, glutamico, ecc.). L'acido da noi studiato non cade nè nell'una nè nell'altra di queste categorie, conferma quindi la osservazione di Bischoff.

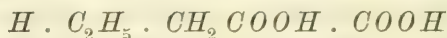
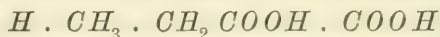
Se però sta il fatto, non ci sentiamo di associarci, almeno completamente, alla interpretazione che ne dà Bischoff. Egli dice: Se il potere rotatorio dipende dalla differenza specifica dei gruppi legati all'atomo di carbonio assimmetrico, è chiaro che, ad esempio, nella combinazione

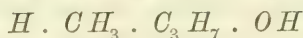
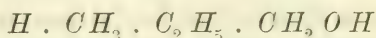
$$H . OH . COOH$$

(*) *Berichte der deutschen chem. Gesell.* XXIV, 1069.

questa differenza sarà più considerevole che nella

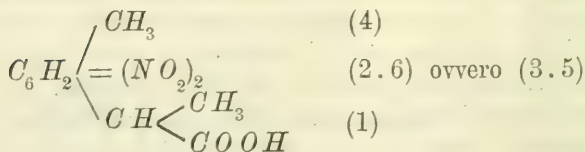
$$H \,.\, C_2H_5 \,.\, COOH \,.$$

Per la stessa ragione quindi per la quale è da prevedere negli acidi dietilsuccinici un potere rotatorio inferiore a quello degli acidi tartrici, sarà minore anche la differenza di solubilità tra i sali con una stessa base attiva dei primi acidi, che non tra quelli dei secondi, e quindi la separazione riuscirà molto più difficile mediante la cristallizzazione frazionata, o in generale non si potrà raggiungere coi metodi attualmente conosciuti.

Ora noi faremo osservare che, come risulta dalle esperienze di Bischoff stesso e di Le Bel, le spore del *penicillium* fruttificano bene, tanto negli acidi monometil e monoetilsuccinico, quanto nel metiletilcarbincarbinolo e nel metilpropilcarbinolo, e tra i gruppi

$$H \,.\, CH_3 \,.\, CH_2\,COOH \,.\, COOH$$
$$H \,.\, C_2H_5 \,.\, CH_2\,COOH \,.\, COOH$$

dei due primi composti che non si sdoppiarono, non v'ha certo minore differenza che tra quelli

$$H \,.\, CH_3 \,.\, C_2H_5 \,.\, CH_2\,OH$$
$$H \,.\, CH_3 \,.\, C_3H_7 \,.\, OH$$

delle sostanze per le quali lo sdoppiamento riuscì.

Acido metadinitroparametilidratropico.

$$C_6H_2 \begin{cases} CH_3 & (4) \\ = (NO_2)_2 & (2.6) \text{ ovvero } (3.5) \\ CH \langle {CH_3 \atop COOH} & (1) \end{cases}$$

L'acido parametilidratropico si discioglie nell'acido nitrico (densità 1,52) raffreddato con acqua, senza che si sviluppino quasi assolutamente vapori nitrosi. Aggiungendo acqua, il nitro-

derivato si separa, talvolta addirittura solido in fiocchi giallo-chiari, talvolta sotto forma d'un liquido che però solidifica quasi subito. La sostanza così ottenuta, compressa tra carta bibula per liberarla dal poco olio che contiene, si cristallizza disciogliendola in una piccola quantità di benzina bollente, nella quale è assai solubile, e mescolando poco a poco al liquido così ottenuto dell'etere di petrolio, pure caldo (p. e. 80°-110°). L'aggiunta dell'etere produce un intorbidamento che scompare coll'agitare del liquido; quando lo scomparire del precipitato, che dapprima è assai rapido, si fa più lento, si tralascia di aggiungere l'etere di petrolio e si lascia raffreddare. Il nitroderivato si separa allora sotto forma di grossi cristalli aciculari raggruppati a stella, di color giallo-paglierino, fondenti a 122°-123°.

Una determinazione d'azoto diede i risultati seguenti:

Da gr. 0,5227 dell'acido si svolsero cmc. 53 di azoto alla temperatura di 23° ed alla pressione ridotta a zero di 743,3 mm.

E su cento parti

	trovato	calcolato per $C_{10} H_{10} N_2 O_6$
N	11,15	11,02

L'acido dinitroparametilidratropico è molto solubile nella benzina e nell'alcool, quasi niente negli eteri di petrolio: si discioglie un po' nell'acqua bollente dalla quale cristallizza in aghi per raffreddamento. Riscaldato al disopra del punto di fusione deflagra, e perciò non se ne fece la combustione; affinchè la analisi dell'azoto proceda regolarmente è necessario che il miscuglio della sostanza coll'ossido di rame, ambedue ben polverizzati, sia molto intimo: in caso contrario la decomposizione avviene troppo rapidamente. Alla luce l'acido si colora in bruno.

Il sale di bario, pure di color giallo-chiaro, si deposita sotto forma di croste cristalline dalle soluzioni acquose molto concentrate; è assai solubile nell'acqua. L'analisi diede i risultati seguenti:

I. Grammi 1,3725 del sale riscaldati per più ore a 125° perdettero gr. 0,0722 d'acqua, quindi fornirono per precipitazione con cloruro di bario gr. 0,4425 di solfato di bario.

II. Grammi 2,5471 del sale tenuti per alcune ore a 160° perdettero gr. 0,1346 d'acqua e diedero quindi gr. 0,8312 di solfato di bario.

E su cento parti:

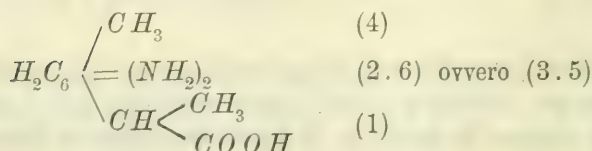
	trovato		calcolato per
	I.	II.	$(C_{10}H_9N_2O_6)_2\ Ba + 4H_2O$
H_2O	5,26	5,28	10,07
Ba	18,96	19,19	19,16

Da queste due analisi pare si debba concludere che il sale contenga realmente quattro molecole d'acqua, ma che due di esse si eliminino al disotto di 160°, le altre due al disopra. La perdita infatti dovuta a due molecole d'acqua sarebbe in teoria di 5,03 %, valore molto vicino a quello dato dalla esperienza. Non abbiamo spinto più oltre la temperatura per non correre il pericolo di decomporre il sale, del quale avevamo a nostra disposizione piccola quantità, e che ci doveva servire per le ulteriori ricerche.

L'etere metilico dell'acido dinitroparametilidratropico si prepara col noto metodo, saturando cioè d'acido cloridrico una soluzione dell'acido nell'alcool metilico. È un liquido denso, che solidifica in un miscuglio frigorifero di sale e ghiaccio, ma ridiventa liquido appena ne venga estratto; non fu analizzato.

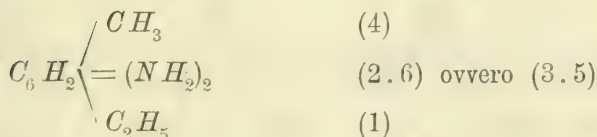
Non abbiamo cercato di indagare se il composto descritto sia l'unico prodotto di nitrazione dell'acido parametilidratropico, o se la poca parte liquida che lo accompagna sia un isomero; poichè, essendo partiti da un acido non perfettamente puro, c'era il dubbio che la suddetta parte liquida potesse provenire dalle impurità contenute nel composto originale.

Acido metadiamidoparametilidratropico.

$$H_2C_6 \begin{cases} CH_3 & (4) \\ = (NH_2)_2 & (2.6) \text{ ovvero } (3.5) \\ CH\begin{matrix} \diagup CH_3 \\ \diagdown COOH \end{matrix} & (1) \end{cases}$$

L'acido metadinitroparametilidratropico viene ridotto molto facilmente dall'idrogeno solforato: basta nella sua soluzione ammoniacale far passare una corrente del gas fino a saturazione, quindi riscaldare per decomporre il solfuro d'ammonio; lo zolfo che si separa corrisponde esattamente alla quantità impiegata dell'acido.

Se il sale di ammonio dell'amidoacido così ottenuto si acidifica con acido acetico diluito in lieve eccesso, l'acido si separa sotto forma di fiocchi grigi, quasi insolubili nei solventi neutri ordinarî (acqua, alcool, etere, benzina, etere di petrolio, acetone, cloroformio), molto solubili invece, tanto negli acidi minerali, quanto nelle basi, poichè si formano i sali corrispondenti. L'acido acetico diluito non lo discioglie, il concentrato sì, e una ulteriore aggiunta d'acqua non produce più alcun precipitato. Non fu analizzato per le difficoltà incontrate nel purificarlo.

Metadiamidoparametiletilbenzina.

$$C_6H_2 \begin{cases} CH_3 & (4) \\ (NH_2)_2 & (2.6) \text{ ovvero } (3.5) \\ C_2H_5 & (1) \end{cases}$$

Questa base fu ottenuta distillando a secco con un eccesso di barite, il sale di bario dell'acido sopradescritto; del resto per prepararla è inutile isolare l'acido. Avvenuta la riduzione del nitroacido, dopo decomposto il solfuro di ammonio ed allontanato lo zolfo, alla soluzione ammoniacale dell'amidoacido si aggiunge idrato di bario, finchè dal liquido tenuto in ebollizione non si svolga più ammoniaca. Portando quindi a secco a bagno-maria, si ottiene come residuo una massa costituita dal sale di bario dell'amidoacido e da un po' di carbonato di bario; la si mescola intimamente col doppio del suo peso di barite e si distilla quindi a fuoco nudo.

Si raccolgono nel recipiente collettore, insieme ad acqua, delle goccie oleose che ben presto solidificano completamente cristallizzando, e sono costituite dalla base. Il composto si purifica cristallizzandolo dall'acqua, nella quale è abbastanza solubile; si separa per raffreddamento della soluzione sotto forma di lamine

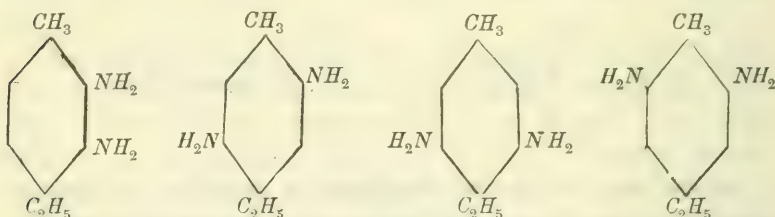
rombiche sottili, incolore, che però alla luce si abbrunano leggermente, fondono a 71°-72°. Una determinazione d'azoto diede i risultati seguenti:

Grammi 0,1456 della base fornirono cmc. 24 di azoto alla temperatura di 22° ed alla pressione ridotta a zero di 740,5 mm.

E su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_9H_{14}N_2$
N	18,37	18,67

La base bolle verso 300°, è molto solubile nell'alcool, dalla sua soluzione acquosa viene precipitata per aggiunta di idrato sodico, o potassico. Il cloridrato, il solfato, l'ossalato si disciolgono molto nell'acqua.

In quanto alla sua struttura sono possibili le quattro seguenti formule:

Secondo la prima formula si tratterebbe d'una ortodiamina, giusta la seconda d'una paradiamina, giusta le due ultime d'una metadiamina. Per decidere a quale di queste categorie appartenga la base da noi ottenuta, abbiamo ricorso alle reazioni caratteristiche.

La base disciolta in poco alcool non dà per ebollizione insieme ad una goccia di una soluzione acetica, concentrata, calda di fenantrenchinone, alcun precipitato: ora in questa condizione le ortodiamine danno, secondo Hinsberg (*), un precipitato voluminoso, costituito da aghetti giallo-chiari, dovuto al formarsi di una fenantrazina.

(*) *Annalen der Chemie*, *237*, 342.

Se si evapora a secco una soluzione acquosa del cloridrato della diamina addizionata di un eccesso di solfocianato di ammonio, si tiene quindi per un'ora alla temperatura di circa 120°, si riprende con acqua, ed al residuo accuratamente lavato e disciolto in idrato potassico, si aggiunge acetato di piombo, si nota, dopo aver riscaldato leggermente, un precipitato abbondante di solfuro di piombo.

Ora risulta dalle ricerche di Lellmann (*) che i solfocianati delle ortodiamine si trasformano per riscaldamento da 120°-130° in tiouree del tipo $C_x\,H_y\!\!<\!\!{}^{NH}_{NH}\!\!>\!\!CS$, le quali non perdono lo zolfo per opera d'una soluzione alcalina calda di piombo; mentre nelle stesse condizioni le meta e le paradiamine danno composti che anneriscono in presenza del liquido piombico. E a quest'ultima categoria di sostanze appartiene quella risultante dal solfocianato della nostra base in virtù della equazione:

$$C_9H_{10}<\begin{matrix} NH_2 \,.\, HSCN \\ NH_2 \,.\, HSCN \end{matrix} = C_9H_{10}<\begin{matrix} NH \,.\, CS \,.\, NH_2 \\ NH \,.\, CS \,.\, NH_2 \end{matrix}$$

D'altra parte invece, dal cloridrato della base riscaldato da 100°-120° con aldeide benzoica, si sviluppa acido cloridrico, reazione questa che è, secondo Ladenburg (**), caratteristica delle ortodiamine.

Mentre adunque le due prime reazioni escludono che la base da noi descritta sia una ortodiamina, la terza condurrebbe alla conclusione opposta. Siccome però Lellmann (***) ha constatato la reazione di Ladenburg non essere generale, poichè i cloridrati, tanto dell'orto, che del metadiamidoparaxilene, sviluppano acido cloridrico quando vengono riscaldati con aldeide benzoica, riteniamo lo stesso avvenga nel nostro caso perfettamente analogo, e quindi in base alle due prime reazioni escludiamo pei gruppi amidici la posizione orto.

Per decidere poi tra il posto meta e il para, abbiamo trattato una soluzione acquosa della base con nitrato di diazobenzina; si formò un precipitato giallo-ranciato solubile in un eccesso

---

(*) *Annalen der Chemie*, *228*, 248.
(**) *Berichte der deutschen chem. Gesell.* XI, 600.
(***) *Annalen der Chemie*, *228*, 253.

d'acido con color rosso, e che possiede tutti i caratteri d'un corpo appartenente al gruppo delle crisoidine. E poichè il dare queste sostanze coloranti è caratteristico pei metadiamidoderivati, concludiamo essere la base in questione una metadiamidoparametiletilbenzina. Rimane però ancora indeciso se i due gruppi amidici occupino le posizioni orto rispetto al metile, od all'etile.

E quanto fu detto per la base, vale naturalmente pel diamidoacido e pel dinitroacido.

Torino, Laboratorio di Chimica della R. Università, Settembre 1891.

Sulla soprafusione dell'acqua e delle soluzioni saline in movimento.

Ricerche sperimentali di V. MONTI

Colle ricerche di cui espongo i risultati nella nota presente, mi sono proposto di esaminare quale sia l'influenza che una forte agitazione meccanica esercita sulla soprafusione dell'acqua. Le vecchie esperienze relative a questo argomento non dànno indicazioni sicure.

Dapprima adoperai acqua comune. La tenevo in un piccolo calorimetro d'ottone della capacità di circa 150 cm^3, circondato da un miscuglio di ghiaccio e sale la cui temperatura variava nelle diverse esperienze fra $-20° C$ e $-10° C$. Pescava nell'acqua il bulbo di un termometro graduato in quinti di grado e di cui si era verificato con cura lo 0. L'agitazione dell'acqua si otteneva immergendovi ed estraendone con alternative abbastanza rapide (circa 80 per minuto) una pallina d'ottone del diametro di circa 1 cm. L'acqua si manteneva liquida fino a temperature variabili fra $-0°,4\ C$ e $-0°,8\ C$. Ad un certo punto incominciava la formazione dei ghiacciuoli, mentre la temperatura risaliva improvvisamente a 0°.

Una soprafusione più prolungata ottenni producendo l'agitazione dell'acqua con una piccola elice metallica che poteva farsi girare orizzontalmente, con moderata velocità, in seno al liquido. In queste condizioni l'acqua rimase soprafusa, in due esperienze, fino a $-1°,4\ C$.

Per maggior comodità, disposi verticalmente un motore elettromagnetico Deprez: prolungai con un'asta metallica l'asse dell'elettro calamita, e all'estremità inferiore di quest'asse saldai l'elice che mi aveva già servito.

Eccitando il motore colla corrente di 4 o 6 coppie Bunsen, l'elice poteva raggiungere delle velocità variabili fra 350 e 500 giri al minuto: velocità molto superiori a quelle usate prima. Queste velocità si misuravano con un apposito contagiri.

Con ciò potei vedere la soprafusione dell'acqua prolungarsi fino a $-2°,6$ *C*.

Al calorimetro d'ottone che aveva servito fino allora sostituii un bicchierino di vetro a pareti sottili, alto cm. 5,5 e largo cm. 4,5, accuratamente pulito all'interno.

Potei così avere l'acqua liquida alla temperatura di $-3°,6$ *C*, mentre l'elice si moveva colla massima velocità; tantochè la superficie libera dell'acqua si presentava fortemente depressa nel mezzo. L'acqua si mantenne a quella temperatura per circa un quarto d'ora. Non valsero a produrre la solidificazione nè il battere forti colpi di martello sul tavolo ove stava l'apparecchio, nè l'alterare bruscamente a più riprese la velocità dell'elice, nè l'introduzione nell'acqua di una bacchetta di vetro. La solidificazione avvenne invece in modo istantaneo, come era da aspettarsi, gettando nell'acqua un piccolo pezzo di ghiaccio.

Un'altra volta usai acqua con tanta polvere di tripolo in sospensione da formare una poltiglia poco densa. Il termometro scese fino a $-3°,1$ *C*, vi si arrestò alquanto tempo e poi risalì fino a 0°. Questo risultato è tanto più singolare che, secondo il Blagden, le polveri in sospensione nell'acqua sembrano generalmente impedirne la soprafusione.

Usando acqua distillata invece di acqua comune, la soprafusione si prolungò a temperature variabili fra $-3°,7$ *C* e $-4°,7$ *C* secondo la velocità dell'elice.

Disaerai l'acqua distillata da sottoporsi all'esperienza, facendola bollire fortemente per circa un'ora e mezzo.

Inoltre all'asta metallica portante l'elice, in cui numerose piccole asperità dovute a ossidazione superficiale e ad altre cause potevano favorire la formazione di ghiacciuoli, sostituii una bacchetta di vetro, piegata per breve tratto ad angolo retto alla sua estremità inferiore, e perfettamente liscia e pulita in tutte le sue parti.

Ottenni così l'acqua liquida con un'agitazione violentissima fino a $-6^\circ,1$ C.

Volli ancora aumentare la velocità relativa dell'agitazione, imprimendo al bicchierino una rotazione inversa a quella dell'asse del motore. Disposi perciò un grosso bicchiere da pile contenente il miscuglio frigorifico e il bicchierino dell'acqua al disopra di un disco saldato sulla ruota ad alette di un ventilatore da psicrometri. Così in virtù d'un movimento d'orologeria l'acqua poteva assumere una rotazione abbastanza rapida. Il motore funzionava con 6 Bunsen. La velocità dell'agitatore era di circa 500 giri, quella del bicchiere di 100 giri per minuto all'incirca.

Feci tre esperienze con questa nuova disposizione: nella prima la soprafusione si arrestò a $-5^\circ,7$ C; nella seconda si prolungò fino a $-7^\circ,7$ C; nella terza fino a $-7^\circ,2$ C.

Esperienze analoghe a quelle fatte coll'acqua furono istituite per alcune soluzioni saline. Affinchè si potesse dedurne l'influenza del sale ebbi cura di alternare queste esperienze con altre fatte con l'acqua che mi serviva a preparare le soluzioni. Questa era acqua comune. L'agitatore era messo in moto al solito modo, colla velocità di circa 500 giri per minuto. Il bicchierino contenente l'acqua o la soluzione era immobile.

Con una soluzione di 5 parti di $NaCl$ su 100 d'acqua, raggiunsi in una prima esperienza la temperatura estrema di -5° C: in una seconda, la soluzione si presentava ancora liquida a $-8^\circ,4$ C. Al sopraggiungere della solidificazione la temperatura risalì, nella prima esperienza a $-3^\circ,1$ C, nella seconda a $-3^\circ,3$ C. Una soluzione di 2 parti di $NaCl$ su 100 d'acqua si mantenne liquida fino a $-5^\circ,8$ C: sopravenendo la solidificazione il termometro risalì a $-1^\circ,4$ C.

Una soluzione di 5 parti di KNO_3 su 100 d'acqua, la cui temperatura di solidificazione si trovò essere $-1^\circ,7$ C, era ancor liquida alla temperatura di $-7^\circ,1$ C.

Una soluzione di 5 parti di Na_2SO_4 su 100 d'acqua si potè portare fino a $-6^\circ,2$ C: e alla congelazione il termometro risalì a $-0^\circ,8$ C.

Una soluzione di 5 parti di Na_2CO_3 su 100 d'acqua, si portò fino a $-6^\circ,6$ C, e, alla solidificazione, il termometro salì a -1° C.

Tutte queste esperienze vennero, come si è detto, alternate con quelle fatte con acqua comune. Le temperature minime raggiunte in queste ultime furono: -4°; $-2^\circ,5$; $-4^\circ,6$; $-4^\circ,8$; $-4^\circ,6$; $-3^\circ,7$; $-5^\circ,2$ C.

In relazione con queste esperienze, io ne feci alcune sulla temperatura minima a cui possono portarsi le soluzioni saline quando sieno violentemente agitate.

Risulta dalle note esperienze di Rüdorff sull'abbassamento di temperatura prodotto dai miscugli refrigeranti, che una soluzione salina, quando non avvenga soprafusione, non può portarsi ad una temperatura inferiore ad una data, caratteristica del sale disciolto. Così, per esempio, non può portarsi una soluzione di $Na_2\ CO_3$ ad una temperatura inferiore a $-2^{\circ}.0\ C$ o una di KNO_3, ad una temperatura inferiore a $-2^{\circ},85\ C$.

Versata dentro un bicchierino una quantità nota d'acqua, collocatolo in un miscuglio refrigerante, e fattovi pescare dentro l'agitatore mosso nel solito modo e colla velocità di circa 500 giri al minuto, quando la temperatura fu di poco superiore a 0°, vi versai dentro del nitrato potassico, finamente polverizzato, raffreddato preventivamente fino a 0° e nella quantità, secondo Rüdorff, più atta ad ottenere il massimo raffreddamento. La temperatura discese fino a $-6^{\circ},1\ C$.

In analoghe condizioni ottenni col carbonato sodico una temperatura minima di $-4^{\circ},4\ C$, mentre la temperatura di solidificazione di una soluzione satura di questo sale è, secondo Rüdorff, $-2^{\circ}\ C$.

Però anche nelle esperienze di Rüdorff, in cui l'agitazione del liquido era certo molto più lieve che non nelle mie, molte volte la temperatura scendeva per un certo tratto, per poi risalire sempre allo stesso grado per un dato sale, allorchè incominciava la separazione del ghiaccio.

Era quindi necessario che io ricercassi, in che fossero per differire le temperature estreme ottenute con una lieve agitazione, da quelle raggiunte nel caso di un'agitazione fortissima.

Collocai in un miscuglio frigorifero due bicchierini con entro quantità note di acqua; ciascuno dei bicchierini era fornito di termometro.

L'acqua dell'un bicchierino, che chiamerò A, veniva dolcemente agitata con una bacchettina di vetro che tenevo in mano: l'acqua dell'altro, che chiamerò B, era messa al solito modo in veloce movimento.

Quando in un bicchierino la temperatura era di poco superiore a 0°, vi versavo dentro una quantità conveniente di ni-

trato potassico in polvere, stato fino a quel punto in un tubo d'assaggio circondato da una mescolanza frigorifera.

Le temperature estreme a cui scese il termometro in tre esperienze nel bicchierino A furono $-2^\circ,6$; $-2^\circ,1$; $-2^\circ,8\,C$; invece nel bicchierino B, nelle stesse tre esperienze furono $-2^\circ,9$; $-4^\circ,5$; $-3^\circ,7\,C$.

Da questo complesso di esperienze risulta, che la soprafusione dell'acqua, dovuta a un rapido movimento, viene favorita quando nell'acqua si trovi disciolto alcuno dei sali citati.

Si sa che la deposizione di cristalli da una soluzione salina di cui si abbassi la temperatura e che giunga così alla saturazione, viene favorita coll'agitazione. Volli esaminare l'effetto di un movimento violento impresso alla soluzione stessa.

Preparai una soluzione salina concentrata: e quindi riempiutine due bicchierini simili, collocai questi l'uno accanto all'altro in uno stesso bagno la cui temperatura era notevolmente inferiore a quella a cui la soluzione era stata preparata. In uno dei bicchierini pescava un termometro graduato in quinti, nell'altro un termometro simile, più il solito agitatore mosso dal motore elettromagnetico.

Ricorsi a sali che presentano spiccatamente il fenomeno della soprasaturazione, quali il solfato e il carbonato di sodio.

Così, preparata una soluzione di $Na_2\,SO_4$ satura alla temperatura ordinaria, i primi cristalli incominciarono a deporsi a $+9^\circ,6\,C$ nel bicchierino in cui avveniva l'agitazione; mentre nell'altro la soluzione in quiete si mostrava ancor limpida a $+7^\circ C$. In una seconda esperienza, fatta nelle stesse condizioni, la deposizione dei cristalli incominciò a $+9^\circ,2\,C$ per la soluzione agitata, e a $+6^\circ,3\,C$ per la soluzione in quiete. I cristalli osservati nella prima, formavano una pasta candida e finissima che aderiva al fondo e alle pareti laterali del bicchierino; nella seconda, invece essi erano molto più grandi, e stavano sul fondo del bicchierino.

Analoghi risultati mi furono dati dalle soluzioni di $Na_2\,CO_3$. Una soluzione satura a $+30^\circ\,C$ circa, cominciò a depor cristalli a $+25^\circ,8\,C$ nel bicchierino in cui aveva luogo l'agitazione, mentre nell'altro la soluzione era ancor limpida a $+14^\circ\,C$.

Mi porse i mezzi onde compire queste ricerche il Professore A. Naccari, al quale porgo sentiti ringraziamenti.

Torino, Laboratorio di Fisica della R. Università.
Novembre 1891.

Sull'errore medio dei punti determinati nei problemi di Hansen e di Marek;

Nota di VINCENZO REINA

I.

Nel problema di *Marek* (*) si suppongono dati quattro punti $ABA'B'$: due altri punti P e P', fra loro visibili, sono tali che da P si possono mirare i punti AB, e da P' i punti $A'B'$. Colla sola misura degli angoli

$$APP' = \alpha \qquad BPP' = \beta$$
$$A'P'P = \alpha' \qquad B'P'P = \beta'$$

la posizione dei punti P e P', rispetto ai punti fissi, riesce determinata.

Se il punto B' coincide col punto A, si ha il cosidetto problema di *Pothenot* generalizzato, nel quale, a partire da tre punti dati ABA', si determinano i due punti PP' per mezzo della misura dei predetti angoli $\alpha\beta\alpha'\beta'$.

Se si suppone la coppia $A'B'$ coincidente colla coppia AB si cade nel problema di *Hansen*, il quale consiste appunto nella determinazione della posizione relativa di due punti P e P', rispetto a due punti fissi A e B, quando sono noti gli angoli sotto cui, da ognuno dei punti P e P', sono visibili gli altri tre (**).

I problemi di *Pothenot* e di *Hansen* potendo dunque considerarsi come casi particolari di quello di *Marek*, a tutti e tre deve essere applicabile la medesima soluzione.

(*) Cfr. *Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Kalasters, im Auftrage des königl. ungarischen Finanzministeriums,* verfasst von J. Marek. Budapest, 1875, S. 269.

La risoluzione di questo problema è riprodotta da W. Jordan, *Handbuch der Vermessungskunde*, 2er B., 3 Aufl., S. 257.

(**) Hansen, *Eine Aufgabe der praktischen Geodäsie und deren Auflösung.* Astronomische Nachrichten. Bd. 18, S. 165.

Geometricamente si può procedere così: sui lati AB, $A'B'$, si costruiscano i triangoli ABQ, $A'B'Q'$ cogli angoli

$$QBA = \alpha \quad QAB = \beta \quad Q'B'A' = \alpha' \quad Q'A'B' = \beta'$$

dalla parte opposta o dalla stessa parte in cui trovasi il punto P e il punto P' rispettivamente, a seconda che la congiungente PP' incontra i lati AB, $A'B'$, oppure i loro prolungamenti.

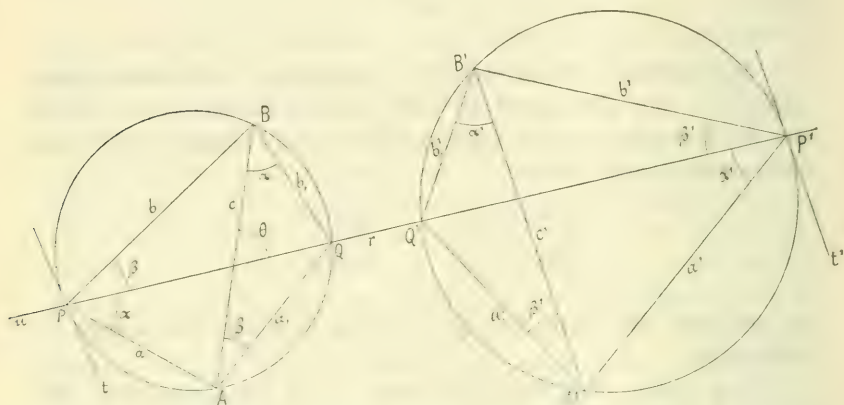
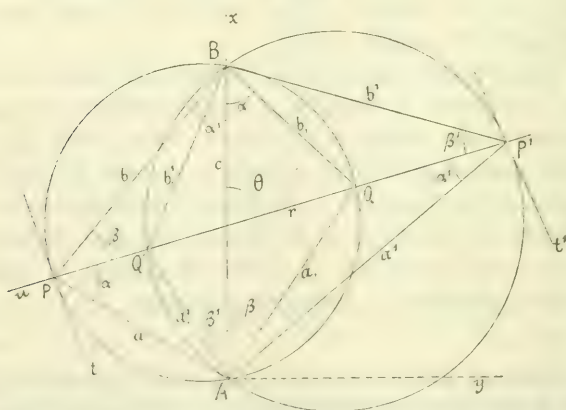



Fig. 1ª

Si descrivano i cerchi determinati dalle due terne di punti ABQ, $A'B'Q'$: i punti P e P', in cui la congiungente QQ' interseca ulteriormente i due cerchi, sono quelli cercati. Avvertasi che se,

per la disposizione relativa dei punti, alcuno degli angoli $\alpha\beta\alpha'\beta'$ riuscisse maggiore di un retto, nella costruzione dei triangoli ABQ, $A'B'Q'$ bisognerebbe prendere l'angolo supplementare.

Analiticamente, supposte date le coordinate dei punti $ABA'B'$, si determinano le distanze $AB\,A'B'$ ed i loro azimut; si risolvono i triangoli ABQ, $A'B'Q'$, si determinano le coordinate dei punti Q e Q' e per mezzo di queste si trova l'azimut della congiungente QQ'. Nei triangoli APQ, $A'P'Q'$ si verranno allora a conoscere un lato e i tre angoli, e la risoluzione dei triangoli permetterà di determinare le coordinate dei punti cercati P e P'.

II.

Si supponga il problema già risoluto, si facciano le posizioni:

$$PA = a \quad PB = b \quad QA = a_1 \quad QB = b_1$$
$$P'A' = a' \quad P'B' = b' \quad Q'A' = a_1' \quad Q'B' = b_1'$$
$$AB = c \quad A'B' = c' \quad QQ' = r \quad PQ = \rho \quad PQ' = \rho'$$

e si indichi con u la retta congiungente i punti QQ'.

Se gli angoli osservati $\alpha\beta\alpha'\beta'$ sono affetti dall'*errore medio* $\pm\delta$, anche le posizioni dei punti P e P' saranno affette da un *errore* che noi ci proponiamo di valutare.

Per P si conduca la tangente t al cerchio passante per esso punto, e si consideri P come determinato dalla intersezione delle rette t ed u.

Se per effetto delle variazioni subite dagli angoli osservati, le rette t ed u si possono considerare come soggette a spostamenti paralleli, e se si indicano con m_t ed m_u gli errori medi corrispondenti a questi spostamenti, per una formola notissima (*). l'*errore medio della intersezione* P, o in altre parole l'*errore medio del punto* P sarà dato da

$$(1) \ldots\ldots \qquad M = \frac{\sqrt{m_t^2 + m_u^2}}{\operatorname{sen}(tu)} .$$

Riguardo all'errore m_t si rammenti che quando su un segmento AB è costruito un arco di cerchio capace dell'angolo φ,

(*) Cfr. W. Jordan, *Handbuck der Vermessungskunde.* 1er B., S. 297.

lo spostamento parallelo dp della tangente al cerchio nel vertice P dell'angolo, corrispondente ad una variazione $d\varphi$ dell'angolo, è misurato da: (*)

$$dp = \pm \frac{AP.BP}{AB} d\varphi.$$

Nel nostro caso, avendosi $\varphi = \alpha + \beta$, sarà

$$dp = \pm \frac{ab}{c} (d\alpha + d\beta) ,$$

e l'errore medio m_t, corrispondente agli spostamenti paralleli subìti dalla tangente t, sarà dato dalla formola

$$(2) \ldots\ldots \qquad m_t^2 = 2 \frac{a^2 b^2}{c^2} (\delta)^2.$$

III.

Per determinare il valore di m_u conviene riferirsi ad un sistema di assi coordinati, e per maggior semplicità si consideri il caso della 2ª figura (*problema di Hansen*). Si scelga l'origine nel punto A e l'asse delle x secondo la congiungente AB: si indichino con xy le coordinate di Q, con $x'y'$ quelle di Q', con θ l'angolo che la congiungente $Q'Q$, misurata da Q' verso Q, forma colla direzione positiva dell'asse delle x. Si avrà;

$$x - x' = r \cos\theta , \qquad y - y' = r \operatorname{sen}\theta ,$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y - y'}{x - x'} ,$$

e differenziando logaritmicamente l'ultima formola

$$d\theta = \frac{\cos\theta}{r} dy - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} dx - \left(\frac{\cos\theta}{r} dy' - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} dx' \right) .$$

Se si pone

$$(3) \ldots\ldots \quad \begin{cases} (d\theta) = \dfrac{\cos\theta}{r} dy - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r} dx \\ (d\theta)' = \dfrac{\cos\theta}{r} dy' - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r} dx', \end{cases}$$

(*) Opera citata, 1er B., S. 306.

cioè si indica con $(d\theta)$ la variazione dell'azimut θ quando, tenendo fisso il punto Q', si fa spostare il solo punto Q, con $(d\theta)'$ la variazione di θ quando sta fisso Q e si fa spostare Q', si avrà quindi

$$d\theta = (d\theta) - (d\theta)'.$$

La variazione dell'angolo θ, corrispondente allo spostamento simultaneo dei due punti Q e Q', si può dunque decomporre nelle due variazioni che si ottengono tenendo fisso l'uno dei due punti e facendo spostare l'altro. Ora per effetto della variazione $(d\theta)$ il punto P subisce uno spostamento trasversale alla retta u e misurato da $\pm \rho'(d\theta)$; per effetto della variazione $(d\theta)'$ esso subisce lo spostamento $\pm \rho(d\theta)'$; quindi, in conseguenza dello spostarsi simultaneo dei punti Q, Q', esso subirà lo spostamento trasversale

$$\pm \rho'(d\theta) \pm \rho(d\theta)'.$$

Per quello che riguarda la determinazione del punto P, come intersezione delle rette t ed u, si potrà con tutta legittimità ritenere che questa sia la misura di spostamenti paralleli subiti da tutta intera la retta u: si avrà pertanto

$$(4) \ldots\ldots \qquad m_u^2 = \rho'^2 (m_\theta)^2 + \rho^2 (m_\theta)'^2,$$

essendo per le 3);

$$(5) \ldots\ldots \qquad \begin{cases} (m_\theta)^2 = \dfrac{\cos^2\theta}{r^2} m_y^2 + \dfrac{\text{sen}^2\theta}{r^2} m_x^2, \\[2ex] (m_\theta)'^2 = \dfrac{\cos^2\theta}{r^2} m_{y'}^2 + \dfrac{\text{sen}^2\theta}{r^2} m_{x'}^2. \end{cases}$$

IV.

Bisogna ancora determinare gli errori medi $m_x\, m_y\, m_{x'}\, m_{y'}$ delle coordinate dei punti Q e Q'.

Ora si ha:

$$x = a_1 \cos\beta = c\,\frac{\text{sen}\,\alpha \cos\beta}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)}$$

$$y = a_1\, \text{sen}\,\beta = c\,\frac{\text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\alpha+\beta)},$$

quindi

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = c\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} - c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta) = c\,\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} - c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta) = -c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = c\,\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} - c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta) = c\,\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} - c\,\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta) = c\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}$$

e passando agli errori medi

$$(6)\ \dots\dots \quad \begin{cases} m_x^2 = c^2\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}(\delta)^2\,, \\[2ex] m_y^2 = c^2\,\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^4\beta}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}(\delta)^2\,. \end{cases}$$

Da queste formole si ricava

$$m_Q^2 = m_x^2 + m_y^2 = c^2\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}(\delta)^2 = \frac{a_1^2 + b_1^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha+\beta)}(\delta)^2\,,$$

che è la nota espressione del quadrato dell'errore medio, nel caso di un punto determinato per intersezione da due punti fissi A e B. (*Vorwärts-Einschneiden*) (*).

Analogamente si ha

$$(6')\ \dots\dots \quad \begin{cases} m_{x'}^2 = c^2\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha'\cos^2\alpha' + \operatorname{sen}^2\beta'\cos^2\beta'}{\operatorname{sen}^4(\alpha'+\beta')}(\delta)^2\,, \\[2ex] m_{y'}^2 = c^2\,\dfrac{\operatorname{sen}^4\alpha' + \operatorname{sen}^4\beta'}{\operatorname{sen}^4(\alpha'+\beta')}(\delta)^2\,. \end{cases}$$

Sostituendo i valori (6) (6)$'$ nelle (5) e nella (4) ottiene:

$$m_u^2 = \frac{\rho'^2 c^2 (\delta)^2}{r^2\operatorname{sen}^4(\alpha+\beta)}\Big\{\cos^2\theta\,(\operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^4\beta) + \operatorname{sen}^2\theta\,(\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta)\Big\}$$
$$+ \frac{\rho^2 c^2 (\delta)^2}{r^2\operatorname{sen}^4(\alpha'+\beta')}\Big\{\cos^2\theta(\operatorname{sen}^4\alpha' + \operatorname{sen}^4\beta') + \operatorname{sen}^2\theta\,(\operatorname{sen}^2\alpha'\cos^2\alpha' + \operatorname{sen}^2\beta'\cos^2\beta')\Big\}$$

(*) JORDAN, opera citata, 1er B., S. 299.

la quale si può anche scrivere così:

$$(7)\ldots\quad \begin{cases} m''^2 = \dfrac{(\delta)^2}{c^2 r^2} \Big\{ \cos^2\theta \left[\rho'^2 (a_1^4 + b_1^4) + \rho^2 (a_1'^4 + b_1'^4)\right] \\ \qquad + \operatorname{sen}^2\theta \left[\rho'^2 (a_1^4 \operatorname{cotg}^2\alpha + b_1^4 \operatorname{cotg}^2\beta) \right. \\ \qquad \left. + \rho^2 (a_1'^4 \operatorname{cotg}^2\alpha' + b_1'^4 \operatorname{cotg}^2\beta')\right] \Big\} . \end{cases}$$

Dalla semplice ispezione della figura risulta

$$(8)\ldots\ldots \qquad (\widehat{tu}) = \alpha - \beta + \theta :$$

sostituendo dunque i valori (2) (7) (8) nella (1) si ottiene

$$M^2 = \frac{(\delta)^2}{c^2 r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)} \Big\{ 2 r^2 a^2 b^2 + \cos^2\theta \left[\rho'^2 (a_1^4 + b_1^4) \right.$$
$$\left. + \rho^2 (a_1'^4 + b_1'^4)\right] + \operatorname{sen}^2\theta \left[\rho'^2 (a_1^4 \operatorname{cotg}^2\alpha + b_1^4 \operatorname{cotg}^2\beta) \right.$$
$$\left. + \rho^2 (a_1'^4 \operatorname{cotg}^2\alpha' + b_1'^4 \operatorname{cotg}^2\beta')\right] \Big\} ,$$

formola nella quale non compare più alcuna traccia del sistema coordinato.

L'espressione che dà l'errore medio del punto P' si ottiene da questa sostituendo a ρ e ρ' le distanze che si potranno indicare con σ e σ', di P$'$ dai punti Q e Q' rispettivamente, ai lati ab i lati $a'b'$, ed all'angolo $(\widehat{tu})$ l'angolo $(\widehat{t'u}) = \beta' - \alpha' + \theta$.

Tenute le medesime indicazioni, l'errore medio del punto P nel problema di *Marek* (1ª figura), sarà dato dalla formola;

$$M^2 = \frac{(\delta)^2}{r^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)} \Big\{ 2 r^2 \alpha^2 b^2 + \cos^2\theta \left[\frac{\rho'^2}{c^2} (\alpha_1^4 + b_1^4) + \frac{\rho^2}{c'^2} (\alpha_1'^4 + b_1'^4)\right]$$
$$+ \operatorname{sen}^2\theta \left[\frac{\rho'^2}{c^2} (a_1^4 \operatorname{cotg}^2\alpha + b_1^4 \operatorname{cotg}^2\beta) + \frac{\rho^2}{c'^2} (a_1'^4 \operatorname{cotg}^2\alpha' + b_1'^4 \operatorname{cotg}^2\beta')\right] \Big\} .$$

V.

Supponiamo che il punto P nella figura sia la intersezione delle due *posizioni medie* delle rette t ed u, cioè di quelle posizioni per le quali le somme algebriche di tutti gli spostamenti

paralleli sono nulle. Ad ogni altra posizione del punto P corrisponderà una certa probabilità, ed è noto come, ammesso che gli spostamenti delle due rette seguano la *legge di Gauss*, tutte le posizioni del punto, dotate di eguali probabilità, giacciano su delle ellissi simili e similmente disposte col centro in P e per le quali le rette t ed u sono rette coniugate.

Nel caso della nostra 2ª figura indicando con A' e B' i semidiametri di una delle ellissi, diretti secondo la retta u e la retta t rispettivamente, si avrà:

$$A'^2 = \frac{2\, m_t^2 s^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)}\,, \quad B'^2 = \frac{2\, m_u^2 s^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)}\,,$$

quando si indichi con s un parametro variabile dall'una all'altra ellisse, e scelto in modo che la probabilità che il punto cada nell'interno della ellisse s sia data da

$$P = 1 - e^{-s^2}\,.$$

I semiassi A e B saranno allora dati dalle formole:

$$A^2 = \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)} \left\{ m_t^2 + m_u^2 + \sqrt{(m_t^2 + m_u^2)^2 - 4\, m_t^2 m_u^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)} \right\},$$

$$B^2 = \frac{s^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)} \left\{ m_t^2 + m_u^2 - \sqrt{(m_t^2 + m_u^2)^2 - 4\, m_t^2 m_u^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta + \theta)} \right\}.$$

e l'angolo φ, che l'asse maggiore forma colla retta u, sarà da ricavarsi dalla formola

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{m_u^2 \operatorname{sen} 2\,(\alpha - \beta + \theta)}{m_t^2 + m_u^2 \cos 2\,(\alpha - \beta + \theta)}\,. \ (*)$$

Como, Settembre 1891.

(*) JORDAN, opera citata, 1er B., S. 344-46.

Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Torino e per l'anno 1892,

calcolate dall'Ing. T. ASCHIERI, Assist. all'Osservatorio di Torino,

Gennaio 1892.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
1	1	8 0	12 22 45,90	4 46	9 29*a.*	1 42*p.*	6 0*p.*	2
2	2	0	23 14,00	47	10 10	2 40	7 17	3
3	3	0	23 42,03	48	10 42	3 35	8 35	4
4	4	7 59	24 9,66	49	11 9	4 26	9 54	5
5	5	59	24 36,87	50	11 33	5 16	11 11	6
6	6	59	25 3,61	51	11 55	6 4	——	7
7	7	59	25 29,87	52	12 17*p.*	6 53	12 27*a.*	8
8	8	59	25 55,63	53	12 41	7 42	1 43	9
9	9	59	26 20,84	54	1 7	8 35	3 0	10
10	10	58	26 45,49	56	1 39	9 30	4 17	11
11	11	58	27 9,56	57	2 20	10 27	5 32	12
12	12	57	27 33,03	58	3 9	11 25	6 42	13
13	13	57	27 55,89	59	4 8	——	7 42	14
14	14	56	28 18,11	5 0	5 14	12 23*a.*	8 31	15
15	15	56	28 39,68	2	6 22	1 17	9 9	16
16	16	55	29 0,57	3	7 31	2 8	9 40	17
17	17	55	29 20,78	4	8 37	2 55	10 4	18
18	18	54	29 40,29	6	9 42	3 39	10 26	19
19	19	53	29 59,11	7	10 45	4 19	10 44	20
20	20	53	30 17,19	8	11 48	4 59	11 1	21
21	21	52	30 34,55	10	——	5 38	11 18	22
22	22	51	30 50,16	11	12 50*a.*	6 19	11 37	23
23	23	50	31 7,02	12	1 55	7 1	11 59	24
24	24	49	31 22,12	14	3 2	7 47	12 25*p.*	25
25	25	48	31 36,43	15	4 10	8 36	12 57	26
26	26	47	31 49,98	17	5 18	9 30	1 39	27
27	27	47	32 2,73	18	6 23	10 27	2 33	28
28	28	46	32 14,67	19	7 19	11 27	3 40	29
29	29	44	32 25,81	21	8 4	12 26*p.*	4 54	30
30	30	43	32 36,13	22	8 41	1 24	6 14	1
31	31	42	32 45,62	24	9 11	2 18	7 36	2

FASI DELLA LUNA

7 Primo quarto	2h 2m	*ant.*
14 Luna piena	4 16	*ant.*
22 Ultimo quarto	4 32	*ant.*
29 Luna nuova	5 28	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di 0h 56m

5 La Luna è in Perigeo 6h *pom.*
20 Id. Apogeo 5 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Aquario* il giorno 20 ad ore 2 m. 7 *pom.*

Febbraio 1892.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
32	1	7 41	12 32 54,26	5 25	9 36*a.*	2 10*p*	8 56*p.*	3
33	2	40	33 2,07	27	9 59	4 0	10 15	4
34	3	39	33 9,05	28	10 21	4 50	11 33	5
35	4	37	33 15,19	29	10 43	5 40	——	6
36	5	36	33 20,49	31	11 9	6 31	12 50*a.*	7
37	6	35	33 24,95	32	11 40	7 25	2 8	8
38	7	34	33 28,59	34	12 17*p.*	8 21	3 23	9
39	8	32	33 31,42	35	1 3	9 18	4 33	10
40	9	31	33 33,44	37	1 57	10 15	5 35	11
41	10	29	33 34,65	38	3 0	11 9	6 27	12
42	11	28	33 35,08	39	4 7	——	7 8	13
43	12	27	33 34,73	41	5 16	12 1*a.*	7 40	14
44	13	25	33 33,61	42	6 24	12 49	8 7	15
45	14	23	33 31,74	44	7 29	1 33	8 28	16
46	15	22	33 29,14	45	8 33	2 15	8 48	17
47	16	20	33 25,82	47	9 36	2 55	9 6	18
48	17	19	33 21,79	48	10 38	3 35	9 23	19
49	18	17	33 17,08	49	11 42	4 14	9 41	20
50	19	16	33 11,69	51	——	4 56	10 0	21
51	20	14	33 5,65	52	12 47*a.*	5 39	10 24	22
52	21	13	32 58,95	54	1 54	6 26	10 52	23
53	22	11	32 51,63	55	3 1	7 17	11 29	24
54	23	10	32 43,70	56	4 6	8 11	12 16*p*	25
55	24	8	32 35,16	58	5 5	9 9	1 16	26
56	25	7	32 26,04	59	5 55	10 8	2 26	27
57	26	5	32 16,34	6 0	6 36	11 6	3 45	28
58	27	3	32 6,08	1	7 8	12 3*p.*	5 7	29
59	28	2	31 55,28	3	7 35	12 57	6 30	1
60	29	0	31 43,93	4	8 0	1 50	7 53	2

FASI DELLA LUNA.

5 Primo quarto 10h 29m *ant.*

12 Luna piena 8 28 *pom.*

21 Ultimo quarto 1 4 *ant.*

28 Luna nuova 4 37 *ant.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 22m

1 La Luna è in Perigeo 10h *ant.*
17 Id. Apogeo 11 *ant.*
29 Id. Perigeo 1 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Pesci* il giorno 19 ad ore 4 m. 35 *ant.*

Marzo 1892.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
61	1	6 59	12 31 32,06	6 5	8 23*a.*	2 41*p.*	9 14*p.*	3
62	2	57	31 19,68	7	8 46	3 32	10 34	4
63	3	55	31 6,82	8	9 11	4 25	11 55	5
64	4	53	30 53,48	9	9 40	5 20	——	6
65	5	51	30 39,68	11	10 16	6 16	1 13*a.*	7
66	6	50	30 25,45	12	10 59	7 13	2 27	8
67	7	48	30 10,81	13	11 52	8 10	3 32	9
68	8	46	29 55,77	14	12 53*p.*	9 5	4 27	10
69	9	44	29 40,34	16	1 58	9 57	5 10	11
70	10	42	29 24,56	17	3 5	10 46	5 44	12
71	11	41	29 8,46	18	4 13	11 31	6 12	13
72	12	39	28 52,04	20	5 18	——	6 34	14
73	13	37	28 35,34	21	6 23	12 15*a.*	6 53	15
74	14	35	28 18,37	22	7 26	12 53	7 11	16
75	15	33	28 1,18	24	8 28	1 33	7 28	17
76	16	31	27 43,77	25	9 32	2 12	7 45	18
77	17	29	27 26,18	26	10 37	2 53	8 4	19
78	18	27	27 8,41	28	11 43	3 35	8 25	20
79	19	26	26 50,50	29	——	4 21	8 52	21
80	20	24	26 32,48	30	12 50*a.*	5 9	9 24	22
81	21	22	26 14,36	31	1 54	6 1	10 6	23
82	22	20	25 56,15	33	2 54	6 56	10 59	24
83	23	19	25 37,89	34	3 46	7 53	12 3*p.*	25
84	24	16	25 19,58	35	4 30	8 50	1 17	26
85	25	14	25 1,25	36	5 5	9 46	2 36	27
86	26	12	24 42,92	38	5 34	10 41	3 57	28
87	27	11	24 24,59	39	5 59	11 34	5 21	29
88	28	9	24 6,30	40	6 22	12 26*p.*	6 44	30
89	29	7	23 48,05	42	6 45	1 18	8 7	1
90	30	5	23 29,86	43	7 10	2 12	9 31	2
91	31	3	23 11,75	44	7 39	3 8	10 53	3

FASI DELLA LUNA.

5	Primo quarto	8^h	4^m	*pom.*
13	Luna piena	1	45	*pom.*
21	Ultimo quarto	6	6	*pom.*
28	Luna nuova	2	8	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1^h 37^m

15 La Luna è in Apogeo 11^h *pom.*
28 Id. Perigeo 11 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Ariete* il giorno 20 ad ore 4 m. 12 *ant.*

Aprile 1892.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	Il Sole nasce (h m)	Il Sole passa al meridiano (h m s)	Il Sole tramonta (h m)	La Luna nasce (h m)	La Luna passa al meridiano (h m)	La Luna tramonta (h m)	Età della Luna
92	1	6 1	12 22 53,72	6 45	8 12*a.*	4 6*p.*	——	4
93	2	5 59	22 35,81	47	8 53	5 5	12 12*a.*	5
94	3	57	22 18,03	48	9 44	6 4	1 23	6
95	4	56	22 0,39	49	10 43	7 1	2 23	7
96	5	54	21 42,89	50	11 49	7 54	3 11	8
97	6	52	21 25,58	52	12 56*p.*	8 44	3 48	9
98	7	50	21 8,46	53	2 4	9 30	4 16	10
99	8	48	20 51,57	54	3 11	10 12	4 40	11
100	9	46	20 34,91	56	4 15	10 53	5 0	12
101	10	45	20 18,51	57	5 18	11 32	5 18	13
102	11	43	20 2,39	58	6 21	——	5 35	14
103	12	41	19 46,56	59	7 24	12 12*a.*	5 52	15
104	13	39	19 31,06	7 1	8 28	12 52	6 10	16
105	14	37	19 15,89	2	9 34	1 34	6 31	17
106	15	36	19 1,08	3	10 41	2 18	6 55	18
107	16	34	18 46,64	4	11 46	3 5	7 24	19
108	17	32	18 32,60	6	——	3 56	8 3	20
109	18	31	18 18,96	7	12 47*a.*	4 49	8 51	21
110	19	29	18 5,75	8	1 41	5 44	9 49	22
111	20	27	17 52,97	9	2 27	6 40	10 57	23
112	21	25	17 40,64	11	3 4	7 34	12 12*p.*	24
113	22	24	17 28,77	12	3 34	8 28	1 30	25
114	23	22	17 17,37	13	4 0	9 19	2 51	26
115	24	21	17 6,45	14	4 23	10 10	4 12	27
116	25	19	16 56,03	16	4 45	11 2	5 34	28
117	26	17	16 46,11	17	5 7	11 55	6 57	29
118	27	16	16 36,70	18	5 32	12 50*p.*	8 23	1
119	28	14	16 27,79	19	6 5	1 48	9 46	2
120	29	13	16 19,40	20	6 44	2 49	11 5	3
121	30	11	16 11,53	22	7 32	3 50	——	4

FASI DELLA LUNA.

4	Primo quarto	7h 11m	*ant.*
12	Luna piena	7 16	*ant.*
20	Ultimo quarto	6 50	*ant.*
26	Luna nuova	10 36	*pom.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 30m

12 La Luna è in Apogeo 1h *ant.*
26 Id. Perigeo 10 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Toro* il giorno 19 ad ore 3 m. 59 *ant.*

Maggio 1892.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						
		Il SOLE			La LUNA			Età della Luna
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
122	1	5 10	12 16 4,18	7 23	8 29*a.*	4 51*p.*	12 13*a.*	5
123	2	8	15 57,36	24	9 35	5 47	1 7	6
124	3	7	15 51,06	25	10 44	6 39	1 49	7
125	4	5	15 45,30	27	11 53	7 27	2 20	8
126	5	4	15 40,08	28	1 1*p.*	8 11	2 46	9
127	6	2	15 35,40	29	2 6	8 52	3 6	10
128	7	1	15 31,27	30	3 10	9 32	3 26	11
129	8	0	15 27,70	32	4 13	10 11	3 42	12
130	9	4 59	15 24,69	33	5 15	10 51	3 59	13
131	10	57	15 22,26	34	6 19	11 32	4 16	14
132	11	56	15 20,38	35	7 25	——	4 36	15
133	12	55	15 19,09	36	8 32	12 16*a.*	5 0	16
134	13	53	15 18,38	38	9 39	1 2	5 27	17
135	14	52	15 18,24	39	10 42	1 52	6 2	18
136	15	51	15 18,67	40	11 38	2 45	6 47	19
137	16	50	15 19,69	41	——	3 40	7 42	20
138	17	49	15 21,29	42	12 24*a*	4 35	8 47	21
139	18	48	15 23,45	43	1 5	5 29	9 59	22
140	19	47	15 26,19	44	1 36	6 21	11 14	23
141	20	46	15 29,48	45	2 2	7 12	12 31*p.*	24
142	21	45	15 33,33	46	2 35	8 1	1 49	25
143	22	44	15 37,74	48	2 47	8 50	3 8	26
144	23	43	15 42,69	49	3 9	9 41	4 28	27
145	24	42	15 48,16	50	3 32	10 33	5 51	28
146	25	41	15 54,15	51	4 1	11 29	7 15	29
147	26	41	16 0,64	52	4 35	12 29*p.*	8 37	1
148	27	40	16 7,60	53	5 19	1 31	9 52	2
149	28	39	16 15,03	53	6 12	2 34	10 54	3
150	29	39	16 22,89	54	7 16	3 34	11 42	4
151	30	38	16 31.18	55	8 26	4 30	——	5
152	31	37	16 39,87	56	9 38	5 21	12 20*a.*	6

FASI DELLA LUNA.

3 Primo quarto 8h 1m *pom.*

11 Luna piena 11 49 *pom.*

19 Ultimo quarto 3 42 *pom.*

26 Luna nuova 6 39 *ant.*

Il giorno nel mese cresce di 1h 8m

9 La Luna è in Apogeo 6h *ant.*
24 Id. Perigeo 6 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Gemelli* il giorno 20 ad ore 3 m. 49 *pom.*

Giugno 1892.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
153	1	4 37	12 16 48,94	7 57	10 47*a.*	6 7*p.*	12 48*a.*	7
154	2	36	16 58,39	58	11 54	6 50	1 11	8
155	3	36	17 8,18	59	12 59*p.*	7 30	1 30	9
156	4	35	17 18,30	59	2 3	8 10	1 49	10
157	5	35	17 28,75	8 0	3 5	8 49	2 5	11
158	6	34	17 39,51	1	4 9	9 29	2 22	12
159	7	34	17 50,54	1	5 14	10 12	2 41	13
160	8	34	18 1,85	2	6 20	10 58	3 2	14
161	9	33	18 13,40	3	7 28	11 47	3 29	15
162	10	33	18 25,20	3	8 33	—	4 2	16
163	11	33	18 37,20	4	9 33	12 40*a.*	4 43	17
164	12	33	18 49,40	4	10 24	1 34	5 36	18
165	13	33	19 1,78	5	11 6	2 30	6 39	19
166	14	33	19 14,52	5	11 39	3 25	7 50	20
167	15	33	19 27,00	6	—	4 18	9 4	21
168	16	33	19 39,79	6	12 7*a.*	5 9	10 20	22
169	17	33	19 52,67	7	12 30	5 58	11 34	23
170	18	33	20 5,64	7	12 52	6 45	12 52*p.*	24
171	19	33	20 18,66	7	1 13	7 34	2 9	25
172	20	33	20 31,71	8	1 35	8 23	3 29	26
173	21	33	20 44,77	8	2 0	9 16	4 49	27
174	22	34	20 57,81	8	2 29	10 13	6 11	28
175	23	34	21 10,79	8	3 7	11 13	7 29	29
176	24	34	21 23,71	8	3 56	12 15*p.*	8 37	30
177	25	34	21 36,51	8	4 56	1 17	9 32	1
178	26	35	21 49,16	8	6 4	2 16	10 15	2
179	27	35	22 1,66	8	7 17	3 10	10 48	3
180	28	36	22 13,95	8	8 29	3 59	11 13	4
181	29	36	22 26,02	8	9 39	4 44	11 34	5
182	30	37	22 37,86	8	10 45	5 26	11 52	6

FASI DELLA LUNA.

2 Primo quarto 10^h 41^m *ant.*

10 Luna piena 2 22 *pom.*

17 Ultimo quarto 9 51 *pom.*

24 Luna nuova 2 56 *pom.*

Il giorno nel mese cresce di 0^h 12^m

---

5 La Luna è in Apogeo 8 *pom.*

21 Id. Perigeo 4 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Cancro* il giorno 21 ad ore 12 m. 13 *ant.*

Luglio 1892.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	Il SOLE nasce (h m)	Il SOLE passa al meridiano (h m s)	Il SOLE tramonta (h m)	La LUNA nasce (h m)	La LUNA passa al meridiano (h m)	La LUNA tramonta (h m)	Età della Luna
183	1	4 37	12 22 49,43	8 8	11 50*a.*	6 6*p.*	—	7
184	2	38	23 0,72	8	12 53*p.*	6 46	12 10*a.*	8
185	3	38	23 11,67	7	1 56	7 26	12 27	9
186	4	39	23 22,32	7	3 1	8 7	12 45	10
187	5	40	23 32,61	7	4 7	8 52	1 5	11
188	6	40	23 42,55	6	5 14	9 40	1 29	12
189	7	41	23 52,12	6	6 21	10 31	2 0	13
190	8	42	24 1,28	6	7 23	11 26	2 38	14
191	9	42	24 10,05	5	8 19	—	3 28	15
192	10	43	24 18,38	5	9 5	12 22*a.*	4 28	16
193	11	44	24 26,28	4	9 40	1 18	5 37	17
194	12	45	24 33,73	3	10 10	2 13	6 52	18
195	13	46	24 40,72	3	10 35	3 5	8 9	19
196	14	47	24 47,24	2	10 57	3 55	9 26	20
197	15	48	24 53,28	1	11 18	4 44	10 42	21
198	16	49	24 58,84	1	11 39	5 31	11 58	22
199	17	49	25 3,90	0	—	6 20	1 16*p.*	23
200	18	50	25 8,45	7 59	12 2*a.*	7 10	2 35	24
201	19	51	25 12,49	58	12 30	8 4	3 55	25
202	20	52	25 16,00	57	1 3	9 1	5 0	26
203	21	53	25 18,96	56	1 47	10 2	6 23	27
204	22	54	25 21,37	55	2 41	11 3	7 22	28
205	23	55	25 23,20	54	3 46	12 2*p*	8 9	29
206	24	56	25 24,45	53	4 56	12 58	8 45	1
207	25	58	25 25,11	52	6 9	1 49	9 14	2
208	26	59	25 25,16	51	7 21	2 36	9 37	3
209	27	5 0	25 24,62	50	8 30	3 20	9 56	4
210	28	1	25 23,45	49	9 36	4 1	10 13	5
211	29	2	25 21,66	48	10 40	4 41	10 31	6
212	30	3	25 19,26	47	11 44	5 21	10 48	7
213	31	4	25 16,24	45	12 48*p.*	6 2	11 7	8

FASI DELLA LUNA.

2 Primo quarto 3^h 2^m *ant.*
10 Luna piena 2 34 *ant.*
17 Ultimo quarto 2 37 *ant.*
24 Luna nuova 12 20 *ant.*
31 Primo quarto 8 35 *pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 0^h 50^m.

3 La Luna è in Apogeo 1^h *pom.*
18 Id. Perigeo 3 *ant.*
31 Id. Apogeo 7 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Leone* il giorno 22 ad ore 11 m. 10 *ant.*

Agosto 1892.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			**La LUNA**			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
214	1	5 5	12 25 12,59	7 44	1 53*p.*	6 45*p.*	11 29*p.*	9
215	2	6	25 8,32	43	2 59	7 31	11 57	10
216	3	7	25 3,44	42	4 6	8 21	——	11
217	4	8	24 57,94	40	5 11	9 14	12 32*a.*	12
218	5	10	24 51,84	39	6 9	10 10	1 17	13
219	6	11	24 45,12	38	6 59	11 7	2 12	14
220	7	12	24 37,80	36	7 39	——	3 19	15
221	8	13	24 29,90	35	8 11	12 3*a.*	4 34	16
222	9	15	24 21,42	33	8 38	12 57	5 52	17
223	10	16	24 12,36	32	9 1	1 49	7 12	18
224	11	17	24 2,75	30	9 23	2 39	8 30	19
225	12	18	23 52,59	29	9 43	3 28	9 47	20
226	13	19	23 41,90	27	10 6	4 17	11 5	21
227	14	21	23 30,68	26	10 33	5 7	12 25*p.*	22
228	15	22	23 18,97	24	11 4	6 0	1 44	23
229	16	23	23 6,76	22	11 43	6 56	3 2	24
230	17	24	22 54,05	21	——	7 54	4 13	25
231	18	25	22 40,85	19	12 33*a.*	8 54	5 16	26
232	19	27	22 27,18	18	1 33	9 53	6 6	27
233	20	28	22 13,04	16	2 41	10 49	6 45	28
234	21	29	21 58,44	14	3 53	11 42	7 15	29
235	22	30	21 43,39	12	5 5	12 30*p.*	7 39	1
236	23	31	21 27,90	11	6 14	1 15	8 0	2
237	24	33	21 11,96	9	7 22	1 57	8 18	3
238	25	34	20 55,62	7	8 27	2 37	8 35	4
239	26	35	20 38,87	6	9 31	3 17	8 52	5
240	27	36	20 21,72	4	10 35	3 57	9 10	6
241	28	37	20 4,20	2	11 40	4 40	9 31	7
242	29	39	19 46,32	0	12 45*p.*	5 24	9 56	8
243	30	40	19 28,07	6 58	1 52	6 11	10 27	9
244	31	41	19 9,50	56	2 56	7 2	11 6	10

FASI DELLA LUNA.

8 Luna piena	12^h	47^m	*mer.*
15 Ultimo quarto	7	27	*ant.*
22 Luna nuova	11	49	*ant.*
30 Primo quarto	2	19	*pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1^h 26^m.

12 La Luna è in Perigeo 11^h *ant.*
28 Id. Apogeo 2 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Vergine* il giorno 22 ad ore 5 m. 51 *pom.*

Settembre 1892.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA						Età della Luna
		Il SOLE			La LUNA			
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta	
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
245	1	5 42	12 18 50,62	6 55	3 57*p.*	7 56*p.*	11 56*p.*	11
246	2	43	18 31,43	53	4 49	8 52	——	12
247	3	45	18 11,96	51	5 33	9 48	12 58*a.*	13
248	4	46	17 52,22	49	6 9	10 44	2 9	14
249	5	47	17 32,25	47	6 38	11 37	3 27	15
250	6	48	17 12,05	45	7 3	——	4 47	16
251	7	49	16 51,66	44	7 25	12 29*a.*	6 6	17
252	8	51	16 31,08	42	7 46	1 19	7 27	18
253	9	52	16 10,36	40	8 9	2 10	8 48	19
254	10	53	15 49,52	38	8 34	3 1	10 10	20
255	11	54	15 28,57	36	9 4	3 54	11 32	21
256	12	55	15 7,56	34	9 41	4 50	12 52*p.*	22
257	13	56	14 46,45	32	10 28	5 49	2 6	23
258	14	58	14 25,32	30	11 26	6 49	3 12	24
259	15	59	14 4,17	29	——	7 48	4 6	25
260	16	6 0	13 43,01	27	12 32*a.*	8 45	4 47	26
261	17	1	13 21,85	25	1 41	9 38	5 19	27
262	18	2	13 0,72	23	2 52	10 26	5 45	28
263	19	4	12 39,64	21	4 2	11 12	6 5	29
264	20	5	12 18,62	19	5 10	11 54	6 24	30
265	21	6	11 57,65	17	6 15	12 34*p.*	6 41	1
266	22	7	11 36,82	15	7 20	1 14	6 57	2
267	23	9	11 16,10	13	8 23	1 54	7 15	3
268	24	10	10 55,50	11	9 28	2 36	7 34	4
269	25	11	10 35,06	9	10 34	3 19	7 57	5
270	26	12	10 14,79	8	11 40	4 5	8 25	6
271	27	13	9 54,71	6	12 45*p.*	4 54	9 1	7
272	28	15	9 34,83	4	1 46	5 46	9 45	8
273	29	16	9 15,19	2	2 41	6 40	10 41	9
274	30	17	8 55,79	0	3 27	7 35	11 47	10

FASI DELLA LUNA.

6 Luna piena 9h 57m *pom.*

13 Ultimo quarto 1 39 *pom.*

21 Luna nuova 2 6 *ant.*

29 Primo quarto 7 9 *ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 32m.

---

9 La Luna è in Perigeo 12h *ant.*
14 Id. Apogeo 7 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Libra* il giorno 22 ad ore 2 m. 49 *pom.*

Ottobre 1892.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il Sole nasce	Il Sole passa al meridiano	Il Sole tramonta	La Luna nasce	La Luna passa al meridiano	La Luna tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
275	1	6 18	12 8 36,66	5 58	4 6*p*	8 29*p.*	——	11
276	2	20	8 17,80	56	4 37	9 22	1 0*a*	12
277	3	21	7 59,25	54	5 3	10 14	2 18	13
278	4	22	7 41,04	52	5 26	11 5	3 38	14
279	5	23	7 23,19	51	5 47	11 56	4 58	15
280	6	25	7 5,71	49	6 9	——	6 20	16
281	7	26	6 48,64	47	6 35	12 48*a.*	7 43	17
282	8	27	6 32,00	45	7 2	1 42	9 8	18
283	9	28	6 15,81	43	7 37	2 39	10 32	19
284	10	30	6 0,11	42	8 22	3 39	11 53	20
285	11	31	5 44,91	40	9 17	4 40	1 5*p.*	21
286	12	32	5 30,22	38	10 22	5 42	2 4	22
287	13	34	5 16,07	36	11 32	6 40	2 48	23
288	14	35	5 2,46	34	——	7 35	3 23	24
289	15	36	4 49,43	33	12 44*a.*	8 25	3 51	25
290	16	37	4 36,99	31	1 54	9 10	4 12	26
291	17	39	4 25,14	29	3 1	9 53	4 31	27
292	18	40	4 13,90	28	4 6	10 34	4 48	28
293	19	42	4 3,31	26	5 11	11 14	5 4	29
294	20	43	3 53,35	24	6 15	11 53	5 22	30
295	21	44	3 44,06	22	7 18	12 34*p.*	5 40	1
296	22	46	3 35,44	21	8 24	1 17	6 1	2
297	23	47	3 27,50	19	9 30	2 2	6 27	3
298	24	48	3 20,26	17	10 36	2 49	6 59	4
299	25	50	3 13,71	16	11 38	3 40	7 40	5
300	26	51	3 7,89	14	12 35*p.*	4 33	8 30	6
301	27	52	3 2,79	13	1 24	5 26	9 31	7
302	28	54	2 58,42	11	2 4	6 19	10 40	8
303	29	55	2 54,81	10	2 36	7 11	11 54	9
304	30	57	2 51,95	8	3 3	8 2	——	10
305	31	58	2 49,86	7	3 27	8 51	1 10*a.*	11

FASI DELLA LUNA.

6	Luna piena	7h 1m	*ant.*
12	Ultimo quarto	10 27	*pom.*
20	Luna nuova	7 14	*pom.*
28	Primo quarto	10 16	*pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 34m.

7 La Luna è in Perigeo 6h *ant.*
22 Id. Apogeo 4 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Scorpione* il giorno 22 ad ore 11 m. 21 *pom.*

Novembre 1892.

GIORNO		TEMPO MEDIO DI ROMA							Età della Luna
		Il Sole			La Luna				
dell'Anno	del Mese	nasce	passa al meridiano	tramonta	nasce	passa al meridiano	tramonta		
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m		
306	1	6 59	12 2 48,54	5 6	3 48*p.*	9 41*p.*	2 29*a.*		12
307	2	7 1	2 48,00	4	4 9	10 31	3 47		13
308	3	2	2 48,27	3	4 31	11 24	5 9		14
309	4	3	2 49,37	1	4 58	——	6 33		15
310	5	5	2 51,29	0	5 30	12 20*a.*	8 0		16
311	6	6	2 54,05	4 59	6 11	1 20	9 26		17
312	7	8	2 57,66	57	7 4	2 23	10 46		18
313	8	9	3 2,13	56	8 7	3 28	11 53		19
314	9	10	3 7,45	55	9 18	4 30	12 45*p.*		20
315	10	12	3 13,64	54	10 31	5 28	1 25		21
316	11	13	3 20,70	53	11 43	6 21	1 54		22
317	12	15	3 28,62	51	——	7 9	2 18		23
318	13	16	3 37,40	50	12 52*a.*	7 52	2 38		24
319	14	17	3 47,05	49	1 59	8 34	2 55		25
320	15	19	3 57,57	48	3 3	9 13	3 11		26
321	16	20	4 8,94	47	4 6	9 53	3 29		27
322	17	21	4 21,15	46	5 10	10 33	3 46		28
323	18	23	4 34,21	46	6 15	11 15	4 6		29
324	19	24	4 48,09	45	7 20	11 59	4 31		30
325	20	25	5 2,80	44	8 27	12 46*p.*	5 1		1
326	21	27	5 18,31	43	9 31	1 36	5 39		2
327	22	28	5 34,60	42	10 30	2 28	6 26		3
328	23	29	5 41.68	42	11 22	3 21	7 23		4
329	24	31	6 9,50	41	12 4*p.*	4 14	8 29		5
330	25	32	6 28,08	40	12 38	5 6	9 40		6
331	26	33	6 47,36	40	1 5	5 55	10 53		7
332	27	34	7 7,35	39	1 29	6 43	——		8
333	28	36	7 28,03	39	1 50	7 31	12 8*a*		9
334	29	37	7 49,38	38	2 11	8 18	1 23		10
335	30	38	8 11,37	38	2 32	9 8	2 40		11

FASI DELLA LUNA.

4 Luna piena 4h 39m *pom.*

11 Ultimo quarto 10 52 *ant.*

19 Luna nuova 2 9 *pom.*

27 Primo quarto 11 18 *ant.*

Il giorno nel mese diminuisce di 1h 9m.

---

4 La Luna è in Perigeo 5h *pom.*
18 Id. Apogeo 5 *ant.*

Il Sole entra nel segno *Sagittario* il giorno 21 ad ore 8 m, 13 *pom,*

Dicembre 1892.

GIORNO dell'Anno	GIORNO del Mese	TEMPO MEDIO DI ROMA — Il SOLE nasce	Il SOLE passa al meridiano	Il SOLE tramonta	La LUNA nasce	La LUNA passa al meridiano	La LUNA tramonta	Età della Luna
		h m	h m s	h m	h m	h m	h m	
336	1	7 39	12 8 34,00	4 37	2 55p.	10 1p.	4 1a.	12
337	2	40	8 57,24	37	3 24	10 58	5 24	13
338	3	41	9 21,08	37	3 59	——	6 50	14
339	4	42	9 45,51	36	4 46	12 0a.	8 15	15
340	5	43	10 10,49	36	5 45	1 5	9 31	16
341	6	45	10 36,01	36	6 55	2 10	10 32	17
342	7	46	11 2,04	36	8 10	3 13	11 19	18
343	8	47	11 28,56	36	9 26	4 10	11 54	19
344	9	48	11 55,55	36	10 30	5 2	12 21p.	20
345	10	49	12 22,97	36	11 47	5 48	12 42	21
346	11	49	12 50,79	36	——	6 31	1 1	22
347	12	50	13 19,00	36	12 53a.	7 12	1 18	23
348	13	51	13 47,56	36	1 57	7 52	1 34	24
349	14	52	14 16,43	36	3 0	8 31	1 52	25
350	15	53	14 45,57	36	4 5	9 13	2 11	26
351	16	53	15 14,97	36	5 10	9 56	2 33	27
352	17	54	15 44,58	37	6 17	10 42	3 2	28
353	18	55	16 14,35	37	7 22	11 32	3 38	29
354	19	55	16 44,26	37	8 24	12 24p.	4 22	1
355	20	56	17 14,26	38	9 18	1 17	5 18	2
356	21	56	17 44,32	38	10 3	2 10	6 22	3
357	22	57	18 14,39	39	10 39	3 3	7 31	4
358	23	57	18 44,44	39	11 9	3 53	8 44	5
359	24	58	19 14,42	40	11 34	4 41	9 57	6
360	25	58	19 44,31	40	11 55	5 27	11 10	7
361	26	59	20 14,07	41	12 15p.	6 13	——	8
362	27	59	20 43,64	41	12 34	7 0	12 24a.	9
363	28	59	21 13,02	42	12 55	7 49	1 40	10
364	29	59	21 42,18	43	1 20	8 43	2 59	11
365	30	59	22 11,07	44	1 52	9 40	4 32	12
366	31	59	22 39,66	45	2 32	10 42	5 45	13

FASI DELLA LUNA.

4	Luna piena	3h	7m	*ant.*
11	Ultimo quarto	3	20	*ant.*
19	Luna nuova	9	3	*ant.*
26	Primo quarto	10	12	*pom.*

Il giorno nel mese diminuisce di 0h 14m.

3	La Luna è in	Perigeo	6h *ant.*
15	Id.	Apogeo	2 *pom.*
31	Id.	Perigeo	1 *pom.*

Il Sole entra nel segno *Capricorno* il giorno 21 ad ore 9 m. 9 *ant.*

ECCLISSI

1892

(Tempo medio di Roma)

Nell'anno 1892 avverranno *due* ecclissi solari e *due* ecclissi lunari, di cui sono visibili soltanto le ultime due.

I. *Ecclisse totale del* Sole, 26 *Aprile; invisibile a Torino*

Questa ecclisse è visibile nella parte meridionale dell'Oceano Pacifico, nella maggior parte della Nuova Zelanda e nella parte occidentale dell'America del Sud.

II. *Ecclisse parziale di* Luna, 11-12 *Maggio; visibile a Torino.*

Principio dell'ecclisse . . .	a 10^h	0^m	pom.	del giorno	11
Istante medio	» 11	43	»	»	»
Fine dell'ecclisse	» 1	27	ant.	»	12

Grandezza dell'ecclisse 0,95 del diametro lunare.

Per Torino l'immersione avviene a 106° verso sinistra dal punto più alto del disco; l'emersione a 59° verso destra dallo stesso punto. (Immagine diritta).

III. *Ecclisse parziale di* Sole, 20 *Ottobre; invisibile a Torino.*

Grandezza dell'ecclisse 0,91 del diametro solare.

Questa ecclisse è visibile nell'America centrale e settentrionale (esclusa la California), nella Groenlandia, nell'ovest dell'Islanda e nella metà settentrionale dell'Oceano Atlantico.

IV. *Ecclisse totale di* LUNA, 4 *Novembre; visibile in parte a Torino.*

Principio dell'ecclisse	a 2^h	59^m	pom.
» della fase totale . . .	» 4	13	»
Istante medio	» 4	35	»
Fine della fase totale	» 4	57	»
Fine dell'ecclisse	» 6	11	»

Questa ecclisse è visibile nella maggior parte del Grande Oceano in Australia, in Asia, in Europa e in quasi tutta l'Africa (esclusa la parte occidentale dell'Africa settentrionale).

A Torino la Luna nasce a 4^h 58^m pom., cioè 1^m dopo terminata la fase totale; l'emersione avviene a 92° verso destra dal punto più alto del disco (Immagine diritta).

Il Sole tramonta a 5^h 1^m pom.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 2ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 6 Dicembre 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: Bruno, Berruti, D'Ovidio, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Fra le ultime pubblicazioni pervenute in dono all'Accademia vanno specialmente segnalate le due seguenti:

1° *A text book of Physiology* del Socio corrispondente M. Foster, professore di Fisiologia nell'Università di Cambridge;

2° *Anales del Museo Nacional de Buenos Aires para dar a conoscer los bietos de historia natural nuevos o poco conocidos conservados in este Establecimiento* (Disp. XVII, 1891), del Socio corrispondente Dott. Germano Burmeister, Direttore del Museo Nazionale di Buenos Aires.

Poscia il Socio Segretario Basso legge un suo scritto, già presentato alla Classe nell'adunanza precedente, in commemorazione del Socio Corrispondente Dott. Giuseppe Pisati, professore di Fisica tecnica nella Scuola d'Applicazione per gl'Ingegneri in Roma. Questo scritto verrà pubblicato negli *Atti*.

Il Socio Gibelli, anche a nome del condeputato Socio Salvadori legge una sua Relazione sopra una Memoria dei Dottori O. Mattirolo e L. Buscalioni intitolata: *Sulla storia di sviluppo del tegumento seminale*. In seguito alle conclusioni favorevoli di questa Relazione, la Classe delibera la lettura della Memoria, e quindi ne approva l'inserzione nei volumi delle *Memorie* accademiche. La Relazione del Socio Gibelli verrà pubblicata negli *Atti*.

LETTURE

In commemorazione di **Giuseppe Pisati**;

del Socio Prof. GIUSEPPE BASSO

Il giorno ottavo del luglio scorso un numeroso e mesto corteo di amici, di colleghi e di discepoli accompagnava all'ultima dimora il nostro socio corrispondente dottore Giuseppe Pisati, professore di fisica tecnica nella Scuola d'applicazione per gl'ingegneri in Roma. Sul feretro dell'uomo egregio, che all'età di 49 anni veniva spento da una penosissima malattia, parlarono col linguaggio dell'affetto e della riverenza illustri rappresentanti della scienza italiana ed alunni riconoscenti. E poichè si volle, con gentile pensiero, che delle parole colà pronunciate rimanesse, in memoria dell'estinto, traccia durevole col darle alla stampa e col diffonderle largamente, così sarebbe superfluo che io ripetessi ora men bene ciò che coll'eloquenza del cuore si disse allora da quelli che, conoscendo da vicino il Pisati, ebbero la fortuna d'apprezzarne meglio le virtù civili e domestiche, l'integrità scrupolosa, l'esemplare modestia, la squisita mitezza di carattere. Mi restringerò quindi a considerare in lui lo studioso valente ed operoso, accennando a tratti rapidissimi i principali suoi lavori nel campo delle scienze sperimentali.

Sin da quando, poco dopo di aver conseguita la laurea nella Università di Pavia, si avviò per la carriera dell'insegnamento secondario, insegnando prima nel liceo di Ancona, poi in quello di Palermo, il giovane professore diede prova di non comune attitudine alle investigazioni sperimentali costruendo un barometro a due liquidi ed un aspiratore ad efflusso costante, studiando i fenomeni dell'espansione delle gocce liquide ed escogitando nuove esperienze rivolte a scopo didattico. Ma in Palermo la possibilità di frequentare il laboratorio di chimica prima, e poi quello di fisica sotto la guida dei professori Cannizzaro e Blaserna diede modo al Pisati di dedicarsi a lavori di maggior lena. I primi di questi versano quasi tutti su argomenti di chimica pura, dei quali ricorderò soltanto due, eseguiti nel 1871 in collaborazione del pro-

fessore Paternò, dei quali l'uno contiene *Ricerche sul bromuro di etilidene* e l'altro *Studi intorno all'azione del percloruro di fosforo sull'aldeide biclorurata.*

Appartengono a questioni riguardanti ad un tempo la chimica e la fisica quelle relative alla dilatabilità termica del solfo e del fosforo, alle quali in seguito dedicò i suoi studi, talvolta da solo, più spesso in collaborazione di altri colleghi, quali il De-Franchis, il Saporito-Ricca ed altri. I risultati di queste ricerche si trovano consegnati in tre Memorie: di queste, una *Sulla dilatazione del solfo fuso* ed un'altra *Sulla dilatazione del fosforo* furono pubblicate nella *Gazzetta Chimica Italiana* del 1874; la terza Memoria *Sulla dilatazione, la capillarità e la viscosità del solfo fuso* venne accolta negli *Atti dell'Accademia dei Lincei* nel 1877. Avendo determinato il coefficiente di dilatazione medio del solfo entro dati limiti di temperatura, il Pisati trovò numeri notevolmente più piccoli di quelli del Despretz e che si accostano assai meglio a quelli del Kopp, conservandosi tuttavia alquanto più grandi di questi ultimi. La dilatazione del fosforo solido fu studiata a partire dalla temperatura di 0° fino a quella della fusione del corpo e la misura della dilatazione del fosforo liquido fu poi spinta fino alla temperatura di 280°. Risultò che il fenomeno succede, per entrambi gli stati fisici del fosforo, con notevole regolarità: fu confermato il fatto dell'aumento di volume che accompagna la fusione ed essendosi trovato il modo d'impedire, o quasi, la formazione del fosforo rosso, la quale, quando avviene, complica di molto la legge della dilatazione, si riuscì ad ottenere buone determinazioni che verificano e completano quelle fatte prima da Ermann e da Kopp.

Nel 1875 il Pisati pubblicò pure nella *Gazzetta Chimica Italiana* la descrizione di alcune sue esperienze *in difesa dell'ordinaria teoria della induzione elettrostatica.* A questa teoria il Melloni fin dal 1854 e più tardi il Volpicelli avevano contrapposta un'altra, secondo la quale l'elettricità indotta contraria alla inducente sarebbe del tutto dissimulata e solo la indotta omonima si troverebbe libera e dotata di tensione. Oggidì l'esame di una tale questione non offrirebbe più un grande interesse, poichè intorno ai fenomeni dell'elettricità in equilibrio sui conduttori noi possiamo oggi attingere dalla dottrina matematica del potenziale cognizioni assai precise e di certezza indiscutibile.

Giova invece ricordare, almeno sommariamente, un gruppo di

lavori (1) eseguiti dal nostro compianto collega negli anni 1876-77 sulle proprietà meccaniche dei metalli e specialmente sulla tenacità ed elasticità di torsione del ferro a diverse temperature. È nota la grande discrepanza fra i valori dati da Wertheim e quelli ottenuti da Baudrimont per la tenacità del ferro, così alla temperatura ordinaria, come a quelle comprese fra 100° e 200°. Era perciò conveniente lo istituire nuove ricerche su tale questione. Ciò fece il Pisati sperimentando su fili di ferro crudo, di ferro ricotto in presenza dell'aria e di carboni accesi, di ferro ricotto in presenza di anidride carbonica secca. Escogitato un procedimento ingegnoso per poter sperimentare a molte temperature comprese fra l'ordinaria e 300°, egli determinava per ciascuna di esse il peso necessario a produrre la rottura del filo e misurava ad un tempo l'allungamento in questo avvenuto. I risultati di queste accuratissime esperienze sono assai discordi da quelli ottenuti precedentemente da Baudrimont e da Wertheim; inoltre, nelle prove eseguite sui fili di ferro ricotto, s'incontrarono certi fatti non ancora prima avvertiti e sovratutto questo, che, col crescere della temperatura a partire dall'ordinaria, il modulo di elasticità diminuisce fino a raggiungere un valore minimo a 50°; poi cresce fino a 90°, si mantiene quasi costante da 120° a 200°, presenta un nuovo minimo a 235°, il quale è quasi immediatamente susseguito da un forte massimo. Un modo analogo di comportarsi si riconobbe nel coefficiente di allungamento.

In quanto alla elasticità di torsione ed alle modificazioni in questa provocate dal calore, il Pisati scoprì pure fenomeni assai notevoli, lo studio dei quali serve di complemento agli studi notissimi di Coulomb, di Wertheim e di Kupffer. Il seguente fatto è, fra gli altri, assai importante: l'elasticità di un filo metallico il quale, essendo assoggettato a torsione, trovasi animato da moto oscillatorio, presenta fra due determinati limiti di temperatura, due periodi successivi e ben distinti. Dapprima il numero totale delle oscillazioni ed il modulo di torsione vanno aumentando ed

(1) *Sulla tenacità del ferro a diverse temperature* (colla collaborazione di G. Saporito-Ricca); Volumi della Società Italiana delle Scienze, 1876. — *Sulla elasticità dei metalli a diverse temperature*; Gazzetta Chimica Italiana, tomo VI, 1876 e tomo VII, 1877. — *Ricerche sperimentali sulla tenacità dei metalli a diverse temperature* (colla parziale collaborazione di G. Saporito e di S. Scichilone); Atti della R. Accademia dei Lincei, 1877.

il filo, quando ritorna alla quiete, offre una sensibile torsione permanente. Continuando però il filo ad oscillare, mentre esso passa dalla temperatura più bassa alla più alta delle due fissate, i fenomeni ora accennati diminuiscono d'intensità ed il filo tende ad assumere uno stato elastico normale e definitivo per quei dati limiti di temperatura. Donde una conseguenza, della quale il Pisati tenne gran conto in ulteriori sue ricerche, cioè che la determinazione delle costanti relative all'elasticità di torsione debbono sempre farsi su fili già ridotti allo *stato elastico normale.*

Nel 1877 il Pisati lasciò la cattedra di fisica a Palermo per coprire l'ufficio di professore di fisica tecnica in Roma. Quivi i grandiosi mezzi sperimentali che furono messi a sua disposizione, così dalla Scuola d'applicazione per gl'ingegneri, come dall'Ufficio centrale metrico, suscitarono in lui il desiderio di dedicarsi a ricerche di più alta precisione, e, proponendosi un'opera di maggior momento, si accinse alla trattazione di un problema che interessa per vari rispetti la fisica, la meccanica e la geodesia, cioè la determinazione del valore della gravità terrestre.

In Italia, più che altrove, era a desiderarsi che tale problema formasse oggetto di studio per parte di sperimentatori accurati; poichè, se il collegamento dei nostri Osservatorii astronomici aveva già promosso in tempi recenti una raccolta abbondante di elementi astronomico-geodetici ben determinati, mancavano tuttavia quasi completamente misure dirette ed esatte per l'accelerazione dovuta alla gravità. Per colmare questa lacuna il Pisati ebbe la buona sorte di potersi associare un collega esimio ed intimo amico, il professore Enrico Pucci, del quale pure la scienza deplora la perdita recente, avendo egli preceduto nella tomba di pochi mesi il suo collaboratore. Il lungo e difficile lavoro eseguito in comune non è pur troppo interamente compiuto; nel suo stato attuale esso è consegnato in una grande Memoria intitolata: *Sulla lunghezza del pendolo a secondi*, la quale conseguì il premio reale assegnato alla Fisica nell'anno 1882 e nell'anno seguente fu pubblicata negli *Atti dell'Accademia dei Lincei.*

La Memoria Pisati-Pucci, costituita com'è di minute descrizioni di apparecchi, di esposizioni particolareggiate di procedimenti di misura, di lunghe discussioni intorno alle cause di errore ed ai modi di eliminarle o di correggerle, non è guari suscettibile d'un riassunto succinto e ad un tempo chiaro. Dirò solo che gli Autori, dopo una diligente critica dei vari metodi appli-

cabili alla determinazione della gravità, decisero di appigliarsi al metodo differenziale di Bessel. Perciò dovettero ricorrere a due pendoli a filo, in tutto eguali fuorchè nella lunghezza, e determinare con somma precisione, sia la durata di oscillazione per ciascuno dei due pendoli, sia la differenza fra le lunghezze di questi. Si sa che la conoscenza di questi elementi permette immediatamente di calcolare il valore della gravità e la lunghezza del pendolo a secondi. Vedesi che il concetto fondamentale che informa il lavoro di cui si tratta non è, in fondo, originale, nè nuovo; ma nelle singole applicazioni del metodo adottato quante migliorie e perfezionamenti si trovano introdotti a confronto dei procedimenti di misura adoperati dal Bessel stesso! Gli studi anteriori fatti dal Pisati sull'elasticità e sulla dilatabilità dei fili metallici imposero naturalmente agli sperimentatori la convenienza di assoggettare, in via preliminare, i fili che dovevano poi servire per i pendoli a ripetute tensioni e torsioni, fino a tanto che si fosse certi che erasi in essi raggiunto lo *stato elastico normale*. La misura della differenza fra la lunghezza dei fili dei due pendoli veniva fatta con un metodo ottico, cioè ricorrendo ad un sistema di due microscopi a forte ingrandimento con oculare micrometrico. Pazientissime furono le cure adottate per mantenere costante la temperatura durante le coppie di esperienze che facevansi coll'uno e coll'altro pendolo ed ingegnoso l'impiego di un termoscopio speciale, formato di un filo d'alluminio ed uno di platino, allo scopo di riconoscere ad ogni istante se la condizione della costanza nella temperatura mantenevasi soddisfatta. Infine gli artifizi adoperati per mettere in moto i pendoli, per fermarli all'uopo, per misurare esattamente l'ampiezza delle loro oscillazioni non solo valsero ad evitare notevoli cause d'errore, ma servirono a palesare l'influenza molto complessa che la resistenza dell'aria esercita sui moti pendolari.

In questi ultimi anni l'attività del Pisati si rivolse pure ad argomenti dipendenti da altri rami della fisica e specialmente relativi all'elettromagnetismo. Tre sue Memorie che videro la luce durante il 1890 (1) hanno appunto per oggetto lo esame della

---

(1) 1° *Contribuzione alla teoria dei circuiti magnetici*; — 2° *Ricerche sperimentali sulla propagazione del flusso magnetico*; — 3° *Di un fenomeno perturbatore che si manifesta nella propagazione del flusso magnetico*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. VI, primo semestre 1890.

trasmissione del flusso magnetico attraverso i corpi, i quali in una data loro regione, sono sottoposti ad un'azione magnetizzante. Più particolarmente, il Pisati si propose la ricerca della legge secondo cui il flusso magnetico varia da una sezione ad un'altra di un fascio di fili di ferro dolce quando questo fascio, per una certa porzione della sua lunghezza trovasi coperto da una spirale magnetizzante animata dalla corrente di una pila. Le osservazioni vennero eseguite col mezzo di una seconda piccola spirale infilata sul fascio stesso, la quale potevasi collocare successivamente a varie distanze dalla prima spirale ed era tenuta in comunicazione con un galvanometro balistico a riflessione. Quest'ultimo serviva a misurare le correnti d'induzione che nella piccola spirale generavansi ogniqualvolta si chiudeva o si apriva il circuito contenente la pila e la spirale magnetizzante. A questo modo l'Autore pervenne a formulare la legge della trasmissione del flusso magnetico, la quale è analoga a quella, trovata da Fourier, per la propagazione del calore nelle verghe scaldate ad una loro estremità. È dunque probabile che, anche per il flusso magnetico, si abbiano a considerare in ogni specie di corpi due sorta di conduttività magnetica, cioè una interna ed una esterna. Però un esame più minuto del fenomeno, coll'impiego di correnti magnetizzanti d'intensità molto diverse e col sussidio di strumenti precisi e sensibili, rese l'Autore accorto dell'esistenza di un fatto secondario che perturba sensibilmente la legge fondamentale del flusso. Di questo perturbamento, in virtù del quale il flusso si propaga con andamento leggermente ondulatorio, l'Autore propone una assai plausibile spiegazione.

Chiudo con un'ultima osservazione questi pochi cenni, che io presento come molesto tributo alla memoria del collega che fu egregio scienziato, insegnante benemerito, patriotta e cittadino virtuosissimo. Chi legge i lavori di Giuseppe Pisati non può ristarsi dallo avvertire in loro un pregio veramente caratteristico. Traspira da ognuno di essi l'amore schietto della verità, al cui acquisto lo scrittore non credesi giunto senza aver applicata una critica diligente ai diversi procedimenti che si possono seguire, senza l'analisi minuta delle cause d'errore che sono loro inerenti e che fa d'uopo di correggere o di eliminare. Quando il Pisati espone i risultati delle sue ricerche, egli spinge fino allo scrupolo la cura di solamente affermare, e nulla più, di quanto l'esperienza in modo manifesto e con certezza gli ha additato. Io vorrei che i

giovani studiosi che oggidì popolano gl'Istituti sperimentali italiani meditassero i lavori di Giuseppe Pisati e ne traessero questo insegnamento: che non la brama di dar alla luce in breve tempo molte produzioni, le quali riescono poi per ordinario affrettate e superficiali, bensì lo studio paziente, coscienzioso, improntato sempre alla più severa sincerità scientifica può maturare frutti che porgano testimonianza del merito reale dei loro autori e ridondino ad un tempo a qualche vantaggio duraturo per la scienza.

RELAZIONE *sulla Memoria*
dei dottori Oreste Mattirolo *e* Luigi Buscalioni

I dottori Oreste Mattirolo e Luigi Buscalioni presentano un lavoro sulla Storia di sviluppo e sulla Fisiologia dei Tegumenti seminali, il quale fa seguito ad una memoria sull'Anatomia dello Spermoderma, accolta già da questa R. Accademia per la inserzione nei suoi volumi (Adunanza 21 giugno 1891).

Nella prima parte di questi nuovi studi gli Autori descrivono le fasi evolutive che subiscono i tegumenti del seme, il Chilario ed i Tubercoli gemini.

Degne di nota sono le osservazioni sull'origine delle Valve chilariali dalla scissione delle Cellule Malpighiane; sulla formazione della Lamina chilariale, ed in specie sulle vicende degli elementi del tegumento interno; i quali invece di atrofizzarsi come si ritiene universalmente, si segmentano con grande attività, mentre il setto divisorio si forma quando il processo cariocinetico ha terminate le sue fasi.

Non meno interessanti sono le conclusioni alle quali pervennero gli Autori, studiando la evoluzione dello strato tannico; avendo essi potuto dimostrare, che questo strato protegge il tegumento e ne impedisce la completa atrofizzazione provocata dall'embrione.

La seconda parte del lavoro presentato è consacrata alla Fisiologia del tegumento.

In seguito ad accurati e lunghi studi, taluni dei quali già resi di pubblica ragione nel giornale botanico *« La Malpighia, »* gli Autori sono riusciti a mettere in chiaro:

1°) Che la linea lucida difende il seme da una evaporazione dannosa alle prime fasi del processo germinativo;

2°) Che il tegumento seminale non è solo un apparecchio di protezione, ma esso ha un ufficio notevole nel meccanismo della respirazione, fenomeno finora non conosciuto;

3°) Che il Chilario in grazia degli speciali movimenti di apertura e chiusura, di cui sono dotate le sue labbra igroscopiche, mantenendosi costantemente difeso dall'umidità, contribuisce efficacemente a provocare la rottura del tegumento, quando il seme sta per germinare, ed a regolare il processo di uscita della radice;

4°) Che i tubercoli gemini, sviluppandosi a ridosso della porzione librosa del fascio funicolare, hanno per compito di porre termine all'afflusso di materiali nutritizî al seme e di stabilire perciò l'epoca in cui ha luogo la maturità del seme.

Tali ricerche, che determinano la funzione di organi nuovi scoperti dagli A., danno luogo a vedute originali e nuove nella scienza.

Alla parte fisiologica tiene dietro un'accurata rivista critico-bibliografica sui lavori sinora pubblicati intorno ai tegumenti seminali delle Papilionacee e sullo Spermoderma in genere.

Una tavola degli Autori, che ebbero ad occuparsi dei tegumenti seminali nelle differenti famiglie vegetali, chiude il lavoro, al quale vanno unite n° 3 tavole illustrative diligentemente eseguite.

Questa memoria, unitamente a quella già pubblicata, è importante non solo per la ricchezza di nuovi trovati e per l'accuratezza con cui fu condotta, ma in specie perchè gli A., hanno sottoposto ad una coscienziosa disamina i punti più controversi concernenti il tegumento seminale, di guisa che essa potrà diffondere molta luce su questa parte della anatomia e fisiologia botanica.

T. Salvadori.
G. Gibelli, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. 3ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Dicembre 1891.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio Direttore della Classe. Salvadori, Cossa, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Vien letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Vengono letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i lavori seguenti:

a) Teorica di alcuni strumenti topografici a riflessione; Nota del Prof. Nicodemo Jadanza, presentata dal Socio Naccari.

b) Sopra una relazione fra le coordinate sferiche ortogonali e le coordinate topografiche; Nota dell'Ingegnere G. B. Maffiotti, presentata dal Socio Ferraris.

c) Azione dell'etere cianacetico sulle basi organiche; Nota I del Prof. Icilio Guareschi, presentata dal Socio Cossa.

d) Azione dell'anilina sull'etere cianacetico; Nota del Dottor E. Quenda, presentata pure dal Socio Cossa.

Infine il Socio Camerano presenta uno Studio del Prof. Federico Sacco, *Sulle Ecchinidee e sulle Pyramideledee*, il quale fa seguito a parecchi altri già pubblicati, sui Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria, nei volumi delle *Memorie* accademiche. Un'apposita Commissione viene dal Presidente incaricata di esaminare questo nuovo lavoro e di riferirne in altra tornata alla Classe.

LETTURE

Teorica di alcuni strumenti topografici a riflesione;

del Prof. NICODEMO JADANZA.

Può sembrar strano a taluno che, dopo la esposizione della teorica degli strumenti topografici a riflessione fatta dal Bauernfeind (*), e dopo l'altra fatta dal Casorati (**), noi ci accingiamo ad una nuova trattazione di codesto argomento che è uno dei più utili della Geometria pratica.

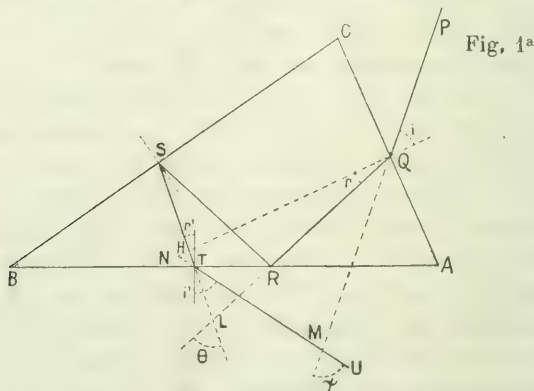
Qualora però si osservi che la nostra trattazione è più generale e più semplice, si troverà giustificato il presente scritto.

Ammetteremo come noto il teorema fondamentale: *L'angolo che un raggio luminoso incidente fa con quello doppiamente riflesso da due specchi è doppio dell'angolo degli specchi.*

I

Prisma triangolare.

1) Sia PQ un raggio luminoso che incontri in Q la faccia AC del prisma retto a base triangolare ABC; sia i l'an-

Fig. 1ª

golo d'incidenza e QR la direzione che il raggio rifratto in Q

(*) BAUERNFEIND, *Elemente der Vermessungskunde* (Siebente Auflage). Stuttgard, 1890).
(*) CASORATI, *Alcuni strumenti topografici a riflessione* (Milano, 1872).

prende nell'interno del prisma facendo l'angolo r colla normale in Q. Il raggio QR venga riflesso in R e, prendendo la direzione RS, incontri in S la faccia BC. In S subisca una nuova riflessione e sia ST la direzione del raggio doppiamente riflesso il quale incontri in T la faccia AB: quivi si rifranga e sia TU la direzione del raggio emergente.

Otterremo l'*angolo di deviazione* ψ che il raggio incidente PQ fa col raggio emergente TU nel seguente modo.

La perpendicolare alla faccia AC nel punto Q incontri in N la retta su cui trovasi il raggio emergente TU ed in H il raggio doppiamente riflesso ST: se M è il punto d'incontro della retta PQ colla TU ed L il punto d'incontro della QR colla ST, si avrà:

Nel triangolo MNQ

$$\psi + N + i = 180^\circ$$

e nel quadrilatero $NQAT$

$$A + i' + N = 180^\circ$$

donde per sottrazione

$$\psi = A + i' - i \qquad \ldots (1).$$

Allo stesso modo se θ è l'angolo che il primo raggio rifratto QR fa coll'altro ST si otterrà:

Dal triangolo LHQ

$$\theta + H + r = 180^\circ$$

e dal quadrilatero $HQAT$

$$A + r' + H = 180^\circ;$$

quindi

$$\theta = A + r' - r \qquad \ldots (2).$$

D'altra parte, osservando che B è l'angolo delle due facce BA, BC del prisma, sulle quali succede la doppia riflessione, si ha anche

$$\theta = 2B$$

e perciò sarà

$$r' - r = 2B - A \qquad \ldots (3).$$

L'angolo di deviazione ψ dato dalla (1), ponendo $2B-A=a$ e tenendo conto delle relazioni

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r$$

$$\operatorname{sen} i' = n \operatorname{sen} r',$$

potrà essere espresso in funzione di r mediante la equazione:

$$\psi = A + \operatorname{arc\,sen} n \operatorname{sen}(a+r) - \operatorname{arc\,sen} n \operatorname{sen} r \qquad \ldots (4).$$

Se si vuole che il prisma sia a deviazione costante, dovrà aversi indipendentemente da r

$$\psi = \text{costante}$$

e quindi

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 .$$

Ora è

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{n \cos(a+r)}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{sen}^2(a+r)}} - \frac{n \cos r}{\sqrt{1-n^2 \operatorname{sen}^2 r}}$$

che si annulla, indipendentemente da r, se si ha

$$a = 0 . \qquad \ldots (5).$$

Quindi l'angolo di deviazione ψ sarà costante, indipendentemente dall'angolo d'incidenza i se

$$A = 2B ,$$

nel qual caso sarà $r' = r$; $i' = i$.

Il prisma triangolare adunque *potrà deviare di un angolo costante un raggio luminoso soltanto quando uno dei suoi angoli* A *è doppio di un altro* B.

L'angolo di deviazione ψ sarà dato da

$$\psi = A = 2B . \qquad \ldots (6).$$

Segue da ciò che il prisma triangolare rettangolo isoscele devierà di 90° un raggio luminoso, e quindi potrà servire a condurre perpendicolari sopra allineamenti dati.

2) Nel caso esaminato precedentemente il punto d'incidenza Q ed il punto di emergenza T si trovano sui due lati

che comprendono l'angolo A; esaminiamo il caso in cui quei due punti si trovano amendue sopra un medesimo lato.

In questo caso (fig. 2ª) si ha facilmente

$$\psi = 180° - (i + i')$$
$$\theta = 180° - (r + r')$$
$$\theta = 2A.$$

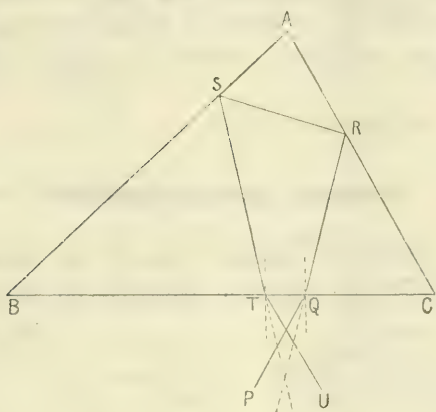



Fig. 2ª

Essendo

$$r + r' = 180° - 2A = \text{costante} = a \qquad \ldots (7),$$

sarà

$$r' = a - r$$

e quindi

$$i + i' = \text{arc sen}\, n \,\text{sen}\, r + \text{arc sen}\, n \,\text{sen}\, (a - r)$$

e

$$\frac{\partial (i + i')}{\partial r} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \text{sen}^2 r}} - \frac{n \cos (a - r)}{\sqrt{1 - n^2 \text{sen}^2 (a - r)}}.$$

Questa derivata si annulla, indipendentemente da r, quando $a = 0$, nel qual caso è

$$A = 90°, \quad r' = -r, \quad i' = -i$$
$$\psi = 180°. \qquad \ldots (8).$$

Quindi *il prisma a base triangolare rettangola può deviare di* 180° *un raggio luminoso mediante due riflessioni sui due cateti.*

Il prisma allineatore di Porro è fondato su questo principio: esso, come è noto, è un prisma quadrangolare ottenuto dal prisma triangolare rettangolo mediante una sezione parallela alla ipotenusa.

Se il triangolo rettangolo è anche isoscele, può servire come *squadro* o come *allineatore.*

Da quanto precede risulta chiaramente che con un prisma triangolare non è possibile deviare un raggio luminoso di 45° e di 90°, oppure di 45° e 180°, e quindi non può esistere un prisma triangolare che possa deviare un raggio luminoso di 45°, 90°, 180°.

II.

Prisma quadrangolare.

a) Sia $ABCD$ la sezione retta di un prisma quadrangolare e $PQRSTU$ il cammino percorso da un raggio luminoso che penetri nel prisma per un punto della faccia AB e dopo due riflessioni sulle facce BC, CD emerga per un punto

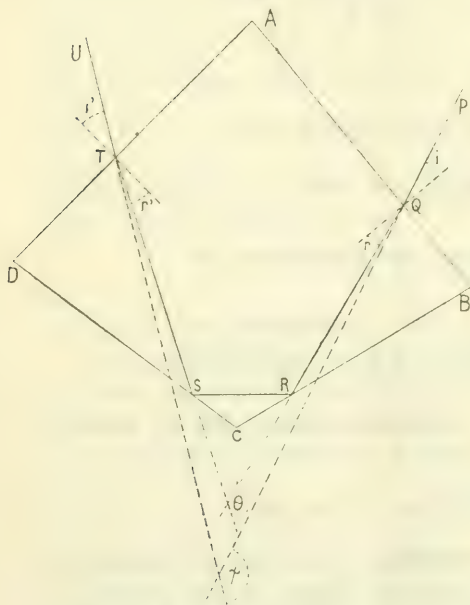
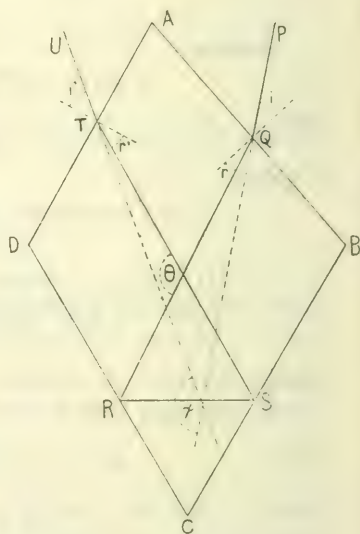



Fig. 3ª Fig. 4ª

della faccia AD. Indicando, come si è fatto precedentemente:, con ψ l'angolo che il raggio emergente fa con quello incidente e con θ l'angolo che la QR fa colla ST si ottiene:

$$\psi = A + (i + i')$$

$$\theta = A + (r + r').$$

Ora, se, come nella fig. 3ª, l'angolo C è ottuso, si avrà $\theta = 360 - 2C$ e se (fig. 4ª) l'angolo C è acuto sarà $\theta = 2C$. Avremo quindi:

nel caso della fig. 3ª

$$r + r' = 360 - A - 2C = a = \text{costante};$$

nel caso della fig. 4ª

$$r + r' = 2C - A = a = \text{costante}.$$

E poichè
$$i + i' = \text{arc sen}\, n \,\text{sen}\, r + \text{arc sen}\, n\, \text{sen}\,(a - r)$$

$$\frac{\partial(i + i')}{\partial r} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \text{sen}^2 r}} - \frac{n \cos(a - r)}{\sqrt{1 - n^2 \text{sen}^2 (a - r)}}$$

si avrà che l'angolo di deviazione ψ dato da un prisma quadrangolare sarà costante, indipendentemente dall'angolo d'incidenza, quando $a = 0$, cioè quando si hanno le due condizioni seguenti:

fig. 3ª $\quad A + 2C = 360 \quad$ ... (9),

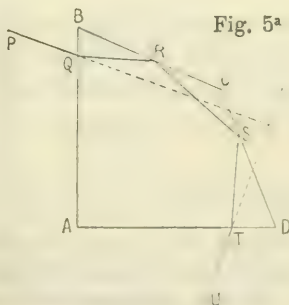
fig. 4ª $\quad A = 2C \quad$ ... (10).

In tutti i casi si avrà:

$$\psi = A \qquad \text{... (11).}$$

Casi particolari:

1°) $A = 90°$, $C = 125°$, $\psi = 90°$ — Prisma Wollaston (fig. 5ª).

Fig. 5ª

2°) $A = 90°$, $C = 135°$, $\psi = 90°$ — Prisma Bauernfeind (fig. 6ª).

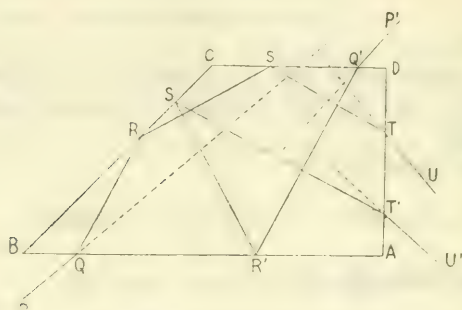



Fig. 6ª

3°) $A = 45°$, $C = 157° 30'$, $\psi = 45°$ — Prisma Jadanza (*) (fig. 7ª).

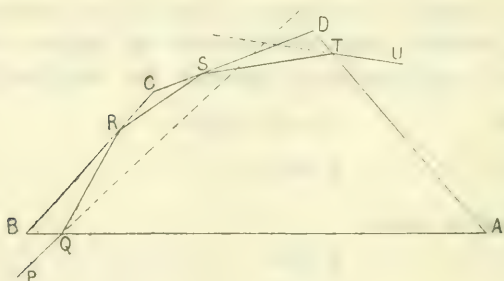



Fig. 7ª

4°) $A = 90°$, $C = 45°$, $\psi = 90°$ — Prisma Bauernfeind (**) (fig. 6ª). (Il cammino del raggio luminoso attraverso il prisma è $P'Q'R'S'T'U'$).

(*) Cfr. N. Jadanza, *Un prisma universale a riflessione* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVI).

(**) Cfr. l. c. a pag. 213 e seguenti.

5°) $A = 90°$, $C = 45°$, $\psi = 90°$ — Prisma della Scuola d'Applicazione francese (fig. 8) (*).

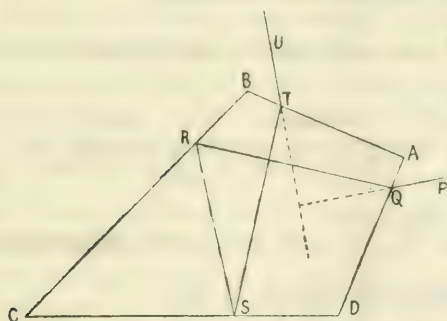



Fig. 8ª

b) In un pı isma quadrangolare può anche darsi il caso (fig. 9ª) di un raggio luminoso PQ che, penetrando nel prisma

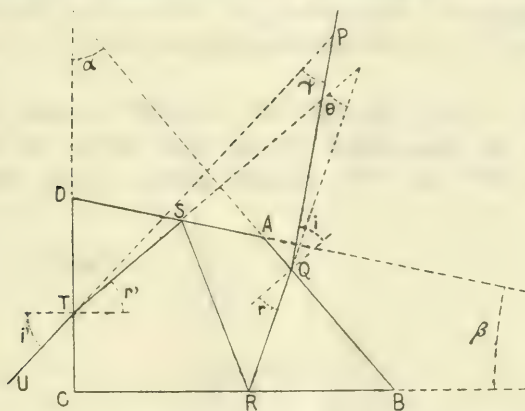



Fig. 9ª

$ABCD$ per un punto della faccia AB, dopo due riflessioni sulle facce opposte BC, AD emerga per un punto della faccia CD opposta alla AB. Indicando con α l'angolo tra la faccia d'incidenza e quella di emergenza e con β l'angolo tra le due altre facce opposte, si otterrà facilmente:

$$\psi = \alpha + i - i' \qquad \ldots(12),$$

$$\theta = \alpha + r - r \qquad \ldots(13),$$

(*) Cfr. A. Lehagre, *Cours de topographie*, première partie, pag. 88.

ed anche

$$\theta = 2\beta \qquad \ldots (14);$$

quindi, ponendo $a = 2\beta - \alpha =$ costante

$$i - i' = \text{arc sen } n \text{ sen } r - \text{arc sen } n \text{ sen } (r - a),$$

si avrà

$$\frac{\partial (i - i')}{\partial r} = \frac{n \cos r}{\sqrt{1 - n^2 \text{sen}^2 r}} - \frac{n \cos (r - a)}{\sqrt{1 - n^2 \text{sen}^2 (r - a)}}.$$

E poichè si ha $\frac{\partial (i - i')}{\partial r} = 0$ per $a = 0$ indipendentemente da r, se ne conchiuderà che quando si ha

$$\alpha = 2\beta \qquad \ldots (15)$$

sarà $r' = r$, $i' = i$ e quindi l'angolo di deviazione ψ sarà costante e propriamente:

$$\psi = \alpha = 2\beta \qquad \ldots (16).$$

Quando $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 22^\circ\, 30'$, $C = 90^\circ$ si avrà il prisma quadrilatero di Bauernfeind (*) che può servire per gli angoli di 45° e di 90° (fig. 10ª). Codesto prisma si può ottenere dal

Fig. 10ª

prisma triangolare rettangolo mediante una sezione inclinata ad un cateto dell'angolo 22° 30'.

(*) L. c., pag. 218.

Esame dei precedenti prismi.

Un prisma quadrangolare dovrà essere giudicato migliore, quando esso potrà nello stesso tempo servire a deviare un raggio luminoso di diversi angoli costanti.

Da questo punto di vista è facile convincersi che il prisma di Wollaston (fig. 5ª) e quello della Scuola d'Applicazione francese (fig. 8ª) non sono da preferirsi ai due prismi di Bauernfeind (fig. 6ª e fig. 10ª). Il primo di questi (fig. 6ª) può servire come *squadro* e come *allineatore;* il secondo (fig. 10ª) può servire per tracciare angoli di 45° e 90°.

Se però nel prisma Jadanza si fa l'angolo $B = 45°$ si otterrà un prisma che serve a tracciare angoli di 45°, 90° e 180°; esso quindi è certamente da preferirsi, come il più semplice, a tutti gli altri.

Il prisma di Bauernfeind che serve anch'esso a tracciare angoli di 45°, 90° e 180° è *pentagonale;* esso è rappresentato dalla fig. 11ª e si ottiene dal quadrangolare (fig. 6ª) sezionandolo

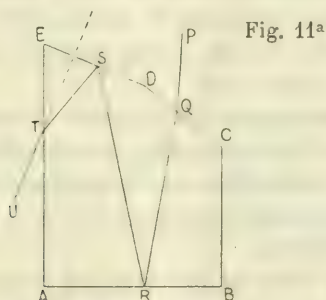



Fig. 11ª

con un piano inclinato di 22° 30′ alla faccia AD. Sulla figura è segnato soltanto il cammino del raggio luminoso che è deviato di 45°.

Torino, dicembre 1891.

Sopra una relazione tra le coordinate sferiche ortogonali e le coordinate topografiche;

Nota dell'Ing. G. B. MAFFIOTTI

1. Le coordinate sferiche ortogonali servono, nel sistema di proiezione di Soldner, a rappresentare sopra un piano i punti della superficie curva terrestre. Il loro calcolo, se basato sugli elementi della triangolazione (lati ed angoli) si può fare colle regole della topografia elementare, finchè i punti non sono molto distanti dalla meridiana assunta come asse delle x. Per i punti molto distanti da quest'asse il calcolo delle coordinate deve essere eseguito colle formole della geodesia, le quali tengono conto della curvatura della terra.

Se anche per questi ultimi punti si conduce il calcolo colle semplici regole della topografia, si commette un errore, che dipende non solo dalla distanza dei punti calcolati dalla meridiana, ma anche dal cammino poligonale che si è dovuto percorrere per giungere ai medesimi.

La presente Nota ha per scopo di valutare quest'errore, nell'ipotesi però che la distanza dei punti dalla meridiana non ecceda quei limiti entro i quali sono trascurabili i termini del 4° ordine; nel qual caso l'errore cercato assume un'espressione notevole per la semplicità della forma e del significato geometrico.

Nei limiti di distanza indicati è anche trascurabile lo schiacciamento della terra, la quale potrà considerarsi come sferica.

2. La ricerca che ci occupa sarà agevolata se supporremo che i vertici della triangolazione, dei quali si determinano previamente le coordinate successive per giungere al punto cercato, siano infinitamente vicini l'uno all'altro, talchè la linea poligonale formata da quei vertici si converta in una curva.

Consideriamo pertanto sulla superficie terrestre una curva qualunque P_1PP' (fig. 1), ed un meridiano OX, che assumeremo come asse delle x. La curva sarà completamente determinata se per ogni punto P di essa è nota la lunghezza $P_1P = l$ misurata a partire da un punto iniziale P_1, e l'angolo α (azimut piano) che l'elemento $PP' = dl$ fa coll'arco di circolo minore PX' parallelo al meridiano OX.

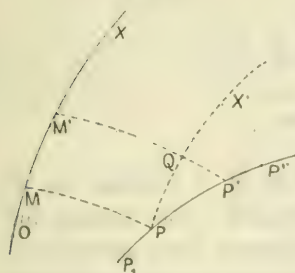



Fig. 1.

È facile scrivere le equazioni differenziali che danno le coordinate sferiche ortogonali $y = PM$, $x = OM$ del punto P rispetto al meridiano OX e all'origine O.

Conduciamo perciò dai punti infinitamente vicini P, P' gli archi di circolo massimo PM, $P'M'$ normali al meridiano OX. L'arco $P'M'$ taglia il circolo minore PX' nel punto Q, determinando un triangoletto PQP' rettangolo in Q, il quale per essere infinitamente piccolo può considerarsi come piano, e dà luogo alle relazioni:

$$(1) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} QP' = PP' \operatorname{sen} \alpha \\ QP = PP' \cos \alpha . \end{array} \right.$$

Gli archi MM', PQ avendo la stessa ampiezza stanno fra loro come i raggi dei circoli cui appartengono. Il raggio del meridiano OX è il raggio r della superficie terrestre: quello del circolo minore PX' parallelo ad OX vale $r \cos \frac{PM}{r} = r \cos \frac{y}{r}$; quindi

$$\frac{MM'}{PQ} = \frac{1}{\cos \frac{y}{r}}$$

od anche, poichè, come abbiamo supposto, i punti che si considerano non sono molto distanti dalla meridiana, e sono trascurabili i termini dell'ordine di $\frac{1}{r^4}$,

$$\frac{MM'}{PQ} = \frac{1}{1 - \frac{y^2}{2r^2}} = 1 + \frac{y^2}{2r^2} .$$

Tenendo conto di questa relazione, ed osservando che $QP' = dy$, $MM' = dx$, le eq. (1) si trasformano nelle

$$(2) \ldots \quad \begin{cases} dy = dl \operatorname{sen} \alpha \\ dx = dl \cos \alpha + \dfrac{y^2}{2r^2} dl \cos \alpha \end{cases}$$

le quali sono le eq. differenziali cercate.

3. Il quadrilatero elementare $PP'M'M$ è limitato da tre archi di circolo massimo, e dall'archetto PP', che essendo infinitamente piccolo può considerarsi egualmente come un elemento di circolo massimo. La somma dei quattro angoli del quadrilatero presenterà quindi sopra quattro retti un eccesso, che, detta $d\omega$ l'area infinitesimale del quadrilatero stesso, sarà espresso da $\dfrac{d\omega}{r^2}$.

L'incremento $d\alpha$ subito dall'azimut α nel passaggio dall'elemento PP' all'elemento successivo $P'P''$ è dato dalla eq.

$$(3) \ldots \quad d\alpha = d\theta - \frac{d\omega}{r^2} \,,$$

nella quale $d\theta$ designa l'angolo infinitamente piccolo formato dai due circoli massimi di cui gli archetti PP', $P'P''$ possono considerarsi come elementi.

Si integri la (3) e si ponga il valore iniziale di θ eguale al valore iniziale di α. Si avrà, osservando che ω è nullo al punto P_1 iniziale della curva:

$$\alpha = \theta - \frac{\omega}{r^2} \,.$$

Sostituendo questo valore di α nelle eq. (2), sviluppando il seno e il coseno della differenza $\theta - \dfrac{\omega}{r^2}$ e trascurando i termini contenenti $\dfrac{1}{r^4}$ si ottiene:

$$(2') \ldots \quad \begin{cases} dy = dl \operatorname{sen} \theta - \dfrac{\omega}{r^2} dl \cos \theta \,, \\ dx = dl \cos \theta + \dfrac{\omega}{r^2} dl \operatorname{sen} \theta + \dfrac{y^2}{2r^2} dl \cos \theta \,. \end{cases}$$

Il secondo membro di queste eq. consta di un termine principale e di termini di correzione, funzioni della curvatura terrestre. I termini principali non sono altro che i differenziali dy', dx' delle coordinate y', x', che si otterrebbero invece di y, x, quando il calcolo venisse fatto colle regole della topografia, senza tener conto cioè della sfericità della terra. Le eq. (2') si possono quindi scrivere come segue:

$$(2'')\dots\dots \quad \begin{cases} dy = dy' - \frac{\omega}{r^2} dx' \\ dx = dx' + \frac{\omega}{r^2} dy' + \frac{y^2}{2r^2} dx' \,. \end{cases}$$

Le coordinate sferiche y, x, e le coordinate topografiche corrispondenti y', x' non differiscono che di una quantità dell'ordine di $\frac{1}{r^2}$; quindi nei termini di correzione delle (2'') possono scambiarsi l'una coll'altra, a meno di un errore dell'ordine di $\frac{1}{r^4}$. Parimenti l'area sferica ω limitata dalle coordinate sferiche dei punti P_1 e P può essere sostituita dall'area piana ω' limitata sul piano degli assi coordinati dalle corrispondenti coordinate topografiche. Si avrà perciò:

$$dy = dy' - \frac{\omega'}{r^2} dx' \,,$$

$$dx = dx' + \frac{\omega'}{r^2} dy' + \frac{y'^2}{2r^2} dx' \,.$$

Integrando e tenendo conto che

$$\int \omega' dx' = \omega' x' - \int x' d\omega' \,,$$

$$\int \omega' dy' = \omega' y' - \int y' d\omega' \,,$$

$$\int y'^2 dx' = \int y' d\omega' \,,$$

e che i valori iniziali di y', x' sono gli stessi valori iniziali di y, x, si otterranno le:

$$(4)\dots\dots \quad \begin{cases} y - y' = - \frac{\omega'}{r^2} x' + \frac{1}{r^2} \int x' d\omega' \,, \\ x - x' = + \frac{\omega'}{r^2} y' - \frac{1}{r^2} \int \frac{1}{2} y' d\omega' \,. \end{cases}$$

Gli integrali che figurano nel 2° membro delle ultime eq. sono i momenti, che diremo m_y, m_x, rispetto agli assi coordinati (fig 2) OY, OX dell'area ω'. Dette quindi y_g, x_g le coordinate del centro di gravità di quest'area, posto cioè:

$$m_y = \omega' x_g = \int x' d\omega' ,$$
$$m_x = \omega' y_g = \int \frac{1}{2} y' d\omega' ,$$

le eq. (4) si potranno scrivere sotto la forma

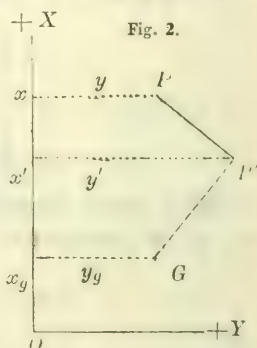
$$(4')\ldots\ldots \begin{cases} y - y' = -\dfrac{\omega'}{r^2} x' + \dfrac{m_y}{r^2} , \\ x - x' = +\dfrac{\omega'}{r^2} y' - \dfrac{m_x}{r^2} , \end{cases}$$

o sotto la forma:

$$(4'')\ldots\ldots \begin{cases} y - y' = +\dfrac{\omega'}{r^2} (x_g - x') , \\ x - x' = -\dfrac{\omega'}{r^2} (y_g - y') . \end{cases}$$

Queste eq., data la curva, permetteranno di determinare le coordinate ortogonali sferiche di un punto qualunque di essa senza eseguire il calcolo sferico di tutti i punti che lo precedono.

4. Indichiamo rispettivamente con P e con P' (fig. 2) le posizioni che il punto calcolato assume nel piano degli assi coordinati in base alle coordinate sferiche y, x, e in base alle coordinate topografiche y', x'. Le differenze $y_g - y'$; $x_g - x'$ rappresenteranno allora le coordinate del centro di gravità G dell'area ω' rispetto ad un sistema di assi parallelo al dato e passante per il punto P'. Chiamando pertanto per brevità *momento dell'eccesso sferico* di un'area il momento dell'area diviso per r^2, e abbandonando il concetto di curva al quale si è fatto ricorso unicamente per utilizzare le risorse del calcolo infinitesimale, e venendo al concetto pratico di poligonale, potremo

Fig. 2.

enunciare il teorema racchiuso nelle equazioni (4″) nel seguente modo:

TEOREMA. — *Le differenze fra le coordinate ortogonali sferiche e le coordinate topografiche di un punto sono eguali ai momenti dell'eccesso sferico dell'area della poligonale che ha servito al calcolo, presi rispetto ad assi paralleli agli assi coordinati dati e passanti per il punto calcolato.*

Il momento rispetto all'asse delle x *dovrà prendersi col segno cambiato.*

5. Dalle eq. (4″) si ricava la seguente:

$$\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}=\frac{\omega'}{r^2}\sqrt{(y_g-y')^2+(x_g-x')^2}.$$

cioè:

$$(5)\ldots\ldots \qquad P'P=\frac{\omega'}{r^2}P'G.$$

Si ricava pure

$$(6)\ldots\ldots \qquad \frac{y-y'}{x-x'}\,\frac{y_g-y'}{x_g-x'}+1=0.$$

Quest'ultima equazione esprime la condizione di perpendicolarità delle due rette $P'G$, $P'P$. Le eq. (4″) poi dimostrano che $y-y'$ ed x_g-x' sono dello stesso segno o di segno contrario secondochè ω' è positivo o negativo, e che l'inverso succede per $x-x'$ ed y_g-y'. Ne segue che, se ω' è positivo, il punto P deve trovarsi a destra di chi stando in P' guarda verso G: se ω' è negativo, deve trovarsi a sinistra. Quindi per l'insieme delle eq. (4″), (5), (6) il teorema del numero precedente si può enunciare così:

Lo spostamento P′P *che bisogna far subire nel piano degli assi coordinati a un punto* P′ *calcolato topograficamente, per portarlo nella posizione vera* P, *corrispondente alle sue coordinate ortogonali sferiche, è eguale al momento, rispetto al punto* P′, *dell'eccesso sferico dell'area* ω' *della poligonale che ha servito al calcolo; ed è diretto perpendicolarmente alla retta* P′G *che unisce il punto* P′ *al centro di gravità* G *di quell'area. La perpendicolare* P′P *dovrà dirigersi a destra o a sinistra di chi stando in* P′ *guarda verso* G, *secondochè l'area* ω' *sarà positiva o negativa.*

6. Faremo del teorema una sola applicazione, che sarà in pari tempo una verifica.

Supponiamo che la poligonale consti di un solo lato $P_1 P_2$. Date le coordinate ortogonali sferiche y_1, x_1 del punto P_1, l'azimut piano α del punto P_2 su P_1. relativamente al meridiano di origine, la lunghezza $l = P_1 P_2$, debbansi calcolare le coordinate sferiche ortogonali y_2, x_2 di P_2.

Il calcolo eseguito colle formole della topografia darebbe per il punto P_2 le coordinate

$$(7)\ldots\ldots \quad \begin{cases} y' = y_1 + l \operatorname{sen} \alpha \\ x' = x_1 + l \cos \alpha . \end{cases}$$

L'area ω' consta in questo caso di un trapezio che si può scomporre in un rettangolo di area $y_1 (x' - x_1)$ e in un triangolo di area $\frac{1}{2}\,(y' - y_1)\,(x' - x_1)$. Rappresentando quindi con E, e con ε rispettivamente gli eccessi sferici di quelle due figure, espressi in arco di circolo di raggio uno, si avrà

$$\frac{\omega'}{r^2} = E + \varepsilon$$

$$m_y = \frac{1}{2}\,E\,(x' + x_1) + \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(2\,x' + x_1)$$

$$m_x = \frac{1}{2}\,E y_1 + \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(y' + 2\,y_1)\,.$$

Applicando ora le eq. (4') e tenendo conto delle (7) si otterrà dopo alcune riduzioni:

$$y_2 = y_1 + l \operatorname{sen} \alpha - \left(\frac{1}{2}\,E + \frac{1}{3}\,\varepsilon\right) l \cos \alpha\,,$$

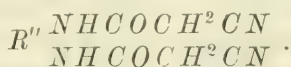
$$x_2 = x_1 + l \cos \alpha + \left(E + \frac{2}{3}\,\varepsilon\right) l \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2}\,E y_1\,.$$

Queste eq. coincidono sostanzialmente con quelle contenute nel modello n° 12 delle *Istruzioni* (*I*) per i lavori trigonometrici del catasto italiano. alle quali equazioni si giunge, come è noto, coll'applicazione del teorema di Legendre.

Azione dell'etere cianacetico sulle basi organiche;

Nota I[a] del Prof. I. GUARESCHI

Sono conosciute le reazioni tra diversi eteri ed alcune basi organiche, specialmente amine: ma lo studio sistematico di un medesimo etere sui vari gruppi di basi organiche non è ancora stato fatto. Questo mio lavoro ha lo scopo di confrontare l'azione dell'etere cianacetico su diversi gruppi di alcali organici. Studio questo importante, senza alcun dubbio, sotto vari aspetti; oltrechè ad ottenere le *cianacetilamine* e composti simili, può condurre alla conoscenza di un metodo per la separazione di una base da un'altra o per separare una base aromatica contenente NH^2 nel nucleo centrale (anilina) da basi aromatiche contenenti NH^2 nelle catene laterali (benzilamina); come può condurre alla conoscenza di basi con catena chiusa. L'etere cianacetico da me prescelto, $\begin{array}{l} CH^2CN \\ | \\ CO.OC^2H^5 \end{array}$, produce infatti con molte amine primarie e diamine dei bellissimi composti, le *cianacetilamine* $R'.NH.COCH^2CN$ e *dicianacetildiamine*

$$R''\begin{array}{l} NHCOCH^2CN \\ NHCOCH^2CN \end{array}.$$

Con alcune basi la reazione ha già luogo a temperatura ordinaria (benzilamina, etilendiamina, pentametilendiamina, camfilamina, diacetonamina), per altre basi occorre l'azione del calore (anilina, ecc.) ed in questo caso insieme alla cianacetilanilide può formarsi la malonanilide corrispondente.

Facendo studiare nel mio laboratorio l'azione dell'anilina sugli eteri monocloro bicloro e tricloroacetico e sull'etere cianacetico, m'accorsi che l'anilina non agisce sull'etere cianacetico così semplicemente come avrebbe potuto prevedersi e che si forma

anche della malonanilide. Questo può essere forse un metodo generale per ottenere le malonanilidi.

È poi possibile che o riducendo il gruppo cianico CN delle cianacetilamine o per trasformazione del CN nel gruppo delle amidine — $C\begin{smallmatrix}\diagup NH^2 \\ \diagdown NH\end{smallmatrix}$ si effettui il passaggio a composti con più atomi di carbonio e di azoto concatenati.

Anche colle basi iminiche (ad esempio. piperidina) può la reazione aver luogo a temperatura ordinaria e formarsi composti stupendamente cristallizzati.

Interessante è lo studio dei prodotti che si formano dall'etere cianacetico con amine acetoniche, quali ad es. la diacetonamina, come riferirò in una seconda memoria.

Mi parve tanto più importante lo studio dell'etere cianacetico in questo senso, perchè l'idrogeno del metilene CH^2 vicino a CN contenuto in esso etere $\begin{matrix} CH^2CN \\ | \\ COOC^2H^5 \end{matrix}$ può, come è noto per altre reazioni, lasciar sostituire il suo idrogeno o con metalli o con radicali alcoolici, e poteva presumersi che anche in alcuni casi dei corpi da me studiati entrasse in reazione pure il gruppo metilenico.

Importanti debbono anche essere i prodotti di ossidazione delle cianacetilamine ed i composti che da essi deriveranno. Questi prodotti non furono ancora da me studiati che in parte.

La formazione dei derivati cianacetilici può servire bene a caratterizzare certe basi forse meglio che adoperando il cloruro d'acetile od il cloruro di benzoile od anche le anidridi corrispondenti. Di derivati cianacetilici se ne conoscono pochissimi ed anche da questo lato non è senza importanza questo studio per il confronto che se ne può fare coi corrispondenti derivati acetilici, cloroacetilici, ecc.

I. van't Hoff (1) ottenne dall'etere cianacetico coll'ammoniaca la cianacetamide $CN.CH^2CO.NH^2$ fusibile a 105°. E. Mulder riuscì ad ottenere la *cianacetilurea* facendo agire il cloruro di cianacetile sull'urea e la *cianacetildimetilurea* dalla dimetilurea (2).

---

(1) *Berichte*, VII, p. 1382.

(2) *Berichte*, 1879, XII, p. 467.

L'etere cianacetico adoperato nelle mie esperienze proveniva dalla fabbrica Kahlbaum; era ridistillato, perfettamente incoloro e bolliva a 204°-206° sotto 745 mm.

Di queste mie ricerche ho già fatto un brevissimo cenno nella seduta 3 luglio 1891 della R. Accademia di Medicina di Torino (3).

I composti che io ho ottenuto dalla benzilamina, etilendiamina, pentametilendiamina, piperidina, ecc., cristallizzano assai bene. L'azione dell'etere cianacetico sulla anilina è descritta nella nota seguente dal Dott. E. Quenda.

Azione dell'etere cianacetico sulla etilendiamina.

L'etilendiamina adoperata era in forma di idrato

$$C^2H^4(NH^2)^2 + H^2O$$

che bolliva a 117°-117°,5 e solidificava in massa cristallina da + 7° a + 8°; era perfettamente incolora.

Appena si mette in contatto l'etilendiamina coll'etere cianacetico, nel rapporto di 1 mol. della prima per 2 mol. del secondo. il liquido si colora in giallo-verdognolo, sviluppa calore e dopo raffreddamento si rappiglia in massa cristallina bianchissima.

Gr. 4,3 di etilendiamina furono mescolati con 11,4 gr. di etere cianacetico e dopo alcuni minuti la miscela era completamente solidificata in massa bianca cristallina. Dopo raffreddamento non si sente quasi più che l'odore intenso, acuto, dell'alcool, il quale si riconosce anche nel distillato. Dopo alcune ore si lava il prodotto con poco etere e si ricristallizza varie volte dall'alcool sino a punto di fusione costante. Alcune volte bastano due cristallizzazioni. Colle quantità impiegate ottenni 9,4 gr. di prodotto (calcolato 10,6 gr.). In altre operazioni ho avuto risultati anche migliori; la quantità di prodotto è teorica, o quasi.

La sostanza cristallizzata, fusibile 190-191°,5, diede alla analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0,2334 di sostanza fornirono 0,4265 di CO^2 e 0,1168 di H^2O.

---

(1) *Giornale della R. Acc. di Medicina di Torino*, 1891, T. 54, p. 480-81.

II. Gr. 0,2235 di sostanza diedero 56,8 cm.^{3} di N a 22° e 746 mm.

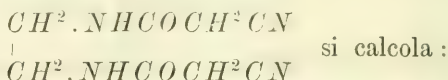
III. Gr. 0,1747 diedero 0,3141 di CO^2 e 0,0862 di H^2O.

IV. Gr. 0,0909 fornirono 23,2 cm.^{3} di N a 19° e 739 mm.

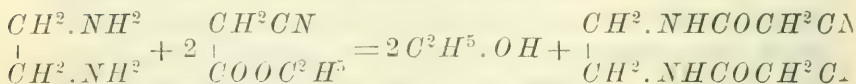
Da cui la composizione centesimale seguente:

	I.	II.	III.	IV.
$C=$	49.82	—	49.10	—
$H=$	5.52	—	5.48	—
$N=$	—	28.20	—	28.50

Per la *dicianacetiletilendiamina*:

$$\begin{array}{l} CH^2.NHCOCH^2CN \\ | \\ CH^2.NHCOCH^2CN \end{array} \quad \text{si calcola:}$$

$$C = 49.50$$
$$H = 5.15$$
$$N = 28.80.$$

Si forma secondo l'equazione seguente:

$$\begin{array}{l} CH^2.NH^2 \\ | \\ CH^2.NH^2 \end{array} + 2 \begin{array}{l} CH^2CN \\ | \\ COOC^2H^5 \end{array} = 2C^2H^5.OH + \begin{array}{l} CH^2.NHCOCH^2CN \\ | \\ CH^2.NHCOCH^2CN \end{array}$$

La dicianacetiletilendiamina cristallizza dall'acqua calda in bei prismi aghiformi simili a pennacchi; dall'alcool si ha in sottili aghi leggieri, disposti in forma di ventaglio; nell'alcool freddo è poco solubile. È pochissimo solubile nell'etere freddo, un poco più nell'etere bollente. Le soluzioni sono neutre. Fonde a 190-191°,5 in liquido incoloro. Scaldata sopra il punto di fusione diventa rossa, si decompone, rigonfia dando ammoniaca, acido cianidrico, odore di conina e residuo carbonoso. Già a freddo e meglio per breve riscaldamento, si scioglie nella potassa ed il liquido neutralizzato con acido cloridrico si colora in giallo.

La dicianacetiletilendiamina già a temperatura ordinaria si ossida col permanganato potassico sviluppando acido cianidrico.

Etere cianacetico e pentametilendiamina

Un bel campione di cadaverina o pentametilendiamina mi fu fornito dalla Casa E. Merck. Anche questa base agisce come la etilendiamina, ma più lentamente e col tempo la miscela coll'etere cianacetico imbrunisce. Il prodotto solido, bianco, spremuto fra carta e cristallizzato dall'alcool, fu sottoposto all'analisi :

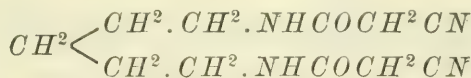
I. Gr. 0,1676 di sostanza secca sul cloruro di calcio diedero 0,3455 di CO^2 e 0,1113 di H^2O.

II. Gr. 0,1293 di sostanza fornirono 27 cm.³ di N a 19° e 743 mm.

Da cui la composizione centesimale :

	I.	II.
$C=$	56.19	—
$H=$	7.27	—
$N=$	—	23.3

Per la *dicianacetilpentametilendiamina :*

$$CH^2 \begin{cases} CH^2.CH^2.NHCOCH^2CN \\ CH^2.CH^2.NHCOCH^2CN \end{cases}$$

si calcola :

$$C = 55.95$$
$$H = 6.80$$
$$N = 23.68.$$

Questo composto cristallizza in piccoli prismi incolori, fusibili a 135-136°. È solubilissimo nell'acqua calda dalla quale cristallizza in aghi piccolissimi intrecciati ; forma facilmente delle soluzioni sovrasature. Si scioglie nell'alcool da cui cristallizza in lamelle sottili lunghe ; è quasi insolubile nell'etere anche a caldo. Le soluzioni sono neutre Scaldato sopra il punto di fusione si decompone.

Già a temperatura ordinaria si ossida col permanganato potassico sviluppando acido cianidrico.

Azione dell'etere cianacetico sulla benzilamina.

L'etere cianacetico reagisce rapidamente a temperatura ordinaria sulla benzilamina e dà una massa bianca cristallina. Anche in soluzione eterea i due corpi reagiscono. Mescolando ad esempio, 9 gr. di benzilamina con 10 a 11 gr. di etere cianacetico (nei rapporti cioè di molecole eguali) si ha poco dopo un prodotto cristallino che, lavato prima con poco etere, si fa cristallizzare dall'acqua o dall'alcool. Da questi due solventi si deposita in lunghi aghi splendenti. La quantità di prodotto ottenuto è teorica. Se il prodotto è un po' giallo si scolora col carbone.

Facendo la reazione a b. m. si può nel distillato riconoscere facilmente l'alcool.

Anche scaldando all'ebollizione una soluzione acquosa di benzilamina con etere cianacetico, si formano, dopo raffreddamento, dei bellissimi aghi splendenti di cianacetilbenzilamina.

Il prodotto di varie preparazioni diede all'analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0,1417 di sostanza fornirono 0,3573 di CO^2 e 0,0788 di H^2O.

II. Gr. 0,1186 di sostanza fornirono 0,2994 di CO^2 e 0,0700 di H^2O.

III. Gr. 0,1734 di sostanza diedero 0,4405 di CO^2 e 0,0962 di H^2O.

IV. Gr. 0,238 di sostanza fornirono 33,8 cm.³ di N a 22° e 740 mm.

Da cui:

	I.	II.	III.	IV.
$C =$	68.7	68.8	69.2	—
$H =$	6.1	6.5	6.1	—
$N =$	—	—	—	15.6

Per la *cianacetilbenzilamina* $C^6H^5 . CH^2 . NHCOCH^2CN$ si calcola:

$$C = 68.9$$
$$H = 5.7$$
$$N = 16.0$$

La cianacetilbenzilamina cristallizza dall'acqua e dall'alcool in lunghi cristalli sottili, leggieri, splendentissimi. È questo uno dei composti più belli; spesso ha l'aspetto dei bei cristalli di caffeina. Solubilissima nell'acqua calda, è invece poco solubile nell'acqua fredda:

1 p. di cianacetilbenzilamina si scioglie in 665 p. di acqua a 22°.

1 p. di cianacetilbenzilamina si scioglie in 769 p. di acqua a 17°.

Solubile nell'alcool a caldo, meno a freddo; quasi insolubile nell'etere tanto a freddo quanto a caldo. Le soluzioni sono neutre. Fonde a 123°-124°,5 in liquido incoloro. Sottoposta a distillazione passa a 339-340° ma in buona parte si decompone sviluppando ammoniaca, odore d'acido cianidrico e lasciando residuo carbonoso.

Non distilla col vapore di acqua nè si scompone. Scaldata con potassa si scioglie, sviluppa ammoniaca e benzilamina ed il residuo pare contenga acido malonico.

La cianacetilbenzilamina si ossida col permanganato potassico, già a temperatura ordinaria, sviluppando acido cianidrico.

Separazione delle amine aromatiche vere dalle aniline

Per separare le amine aromatiche che contengono NH^2 nella catena grassa (ad es: benzilamina $C^6H^5CH^2 . NH^2$) dalle basi che contengono NH^2 nel nucleo centrale (ad es: anilina $C^6H^5 . NH^2$), E. Fischer (1) consiglia di scomporre la soluzione del cloridrato o del solfato delle basi, acidulata e ben raffreddata, con nitrito di sodio sino a che un saggio del liquido trattato con soda ed

(1) J. Tafel, *Berichte*, 1886, p. 1929.

etere, ed evaporato questo, non dia più la reazione dell'anilina coll'ipoclorito di sodio. In queste condizioni la benzilamina e suoi omologhi non sono attaccati dall'acido nitroso e, sovrasaturando il prodotto della reazione con un alcali forte, si estrae la base con etere o per distillazione col vapore d'acqua.

Questo metodo ha l'inconveniente di non essere tanto semplice e di più, richiede che una delle due basi sia decomposta. Nel caso sovraccennato l'anilina resta decomposta, mentre la benzilamina si ricupera inalterata.

Io ho osservato che mentre l'etere cianacetico reagisce a temperatura ordinaria colla benzilamina, non reagisce nelle stesse condizioni coll'anilina. Col metodo che ora brevemente descrivo si ha il vantaggio di separare nettamente le due basi e ricuperarle inalterate.

Si tratta la miscela di anilina e benzilamina con etere cianacetico, possibilmente in quantità di poco superiore a quella corrispondente alla quantità di benzilamina o anche in quantità maggiore; si agita e si lascia a sè la miscela alcune ore. Se dopo 12 o 24 ore la miscela non è cristallizzata, basta agitarla con un poco di etere; la poltiglia cristallina si getta in un filtro e si lava ripetutamente con poco etere. L'etere deposita ancora de' cristalli che si raccolgono e si lavano. Evaporato l'etere o distillato a b. m., secondo la quantità, si distilla il residuo in corrente di vapore d'acqua che trasporta l'*anilina;* il residuo della distillazione fornisce cristalli di cianacetilbenzilamina. Tutti i cristalli di cianacetilbenzilamina si trattano con potassa e si distillano in corrente di vapore; passa prima un poco di ammoniaca, poi la benzilamina che si può estrarre con etere.

Si può procedere anche più semplicemente nel modo seguente: trattata la miscela di anilina e benzilamina con etere cianacetico, si lascia a sè alcune ore ed anche se non è cristallizzata si distilla direttamente in corrente di vapore, passa l'anilina con il lieve eccesso d'etere cianacetico; dal liquido residuo cristallizza da cianacetilbenzilamina, la quale, invece di essere separata e pesata, può direttamente essere trattata con potassa e continuando poi la distillazione si raccoglie la benzilamina.

La separazione è quantitativa.

Da una miscela di 1 gr. di anilina, 1 gr. di benzilamina, e 1,5 gr. di etere cianacetico, ottenni 1,55 gr. di cianacetilbenzilamina, mentre si calcola 1,6 gr.

Da una mescolanza di 2,2 gr. di benzilamina, 2,4 gr. di anilina e 2,9 gr. di etere cianacetico, ottenni 3,3 gr. di cianacetilbenzilamina, mentre si calcola 3,33 gr.

Gr. 2,2 di anilina furono mescolati con 7,1 gr. di benzilamina e 9,2 gr. di etere cianacetico (teoria per la sola benzilamina 7,4 gr.), fornirono 11,23 gr. di cianacetilbenzilamina invece di 11,5 gr. richiesti dalla teoria.

Gr. 4, 2 di benzilamina con 16, 6 gr. di anilina e 16 gr. di etere cianacetico cui s'aggiunsero 50 cm.^{3} di acqua per vedere se anche in queste condizioni la reazione avveniva bene, furono lasciati a sè per 48 ore. Distillando col vapore d'acqua e poi cristallizzando il residuo si ottennero 6, 8 gr. di cianacetilbenzilamina invece di 6,95.

In un'altra esperienza simile con 4, 1 gr. di benzilamina, 16,4 gr. di anilina e 16,45 di etere cianacetico, si ebbero 6,7 gr. di cianacetilbenzilamina invece di 6,60 gr.

Come si vede il metodo dà buoni risultati.

Etere cianacetico e piperidina.

Mescolando 17 gr. di piperidina $C^5H^{10}.NH$ con 22.6 gr. di etere cianacetico, il liquido si colora in giallo-pallido o verdognolo, a poco a poco ispessisce e dopo alcune ore (alle volte dopo mezz'ora) comincia depositare una poltiglia cristallina bianchissima che va facendosi più densa e poi solidifica completamente. Si sviluppa poco calore. Il prodotto, che manda odore acuto di alcool, lavato con etere si scioglie in circa 2 volte il suo peso d'alcool a blando calore, ed alla soluzione s'aggiunge un poco di etere. Così ottengonsi dei grossi prismi incolori che hanno l'aspetto dei cristalli di nitrato potassico. Anche più volte cristallizzato questo prodotto fonde a 88-89°.

Il prodotto grezzo lavato con poco etere può anche ricristallizzarsi dall'acqua, dalla quale si ottiene in grossi prismi.

Mescolando le soluzioni eteree di piperidina e di etere cianacetico non appare subito la reazione, ma dopo un certo tempo agitando il liquido a temperatura ordinaria, tutto si rappiglia in massa cristallina bianchissima. Anche agitando la soluzione acquosa concentrata di piperidina con etere cianacetico, a temperatura ordinaria, si formano dei bei cristalli di cianacetilpiperidina.

Questa sostanza diede all'analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0,2637 di sostanza fornirono 0,6060 di CO^2 e 0,1913 di H^2O.

II. Gr. 0,1105 di sostanza fornirono 17,6 cm.^{3} di N a 19° e 738 mm.

III. Gr. 0,198 di sostanza diedero 0,461 di CO^2 e 0,1442 di H^2O.

IV. Gr. 0,1461 di sostanza diedero 23,6 cm.^{3} di N a 16° e 746 mm.

Da cui:

	I.	II.	III.	IV.
$C =$	62.67	—	63.45	—
$H =$	8.20	—	8.09	—
$N =$	—	17.81	—	18.42

Per la *cianacetilpiperidina:*

$$C^5H^{10}.NCOCH^2CN$$

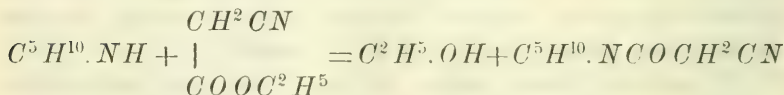
Si calcola:

$$C = 63.10$$

$$H = 7.80$$

$$N = 18.42$$

Si è formata nel modo seguente:

$$C^5H^{10}.NH + \begin{array}{l} CH^2CN \\ | \\ COOC^2H^5 \end{array} = C^2H^5.OH + C^5H^{10}.NCOCH^2CN$$

La *cianacetilpiperidina* cristallizza dall'alcool in grossi prismi incolori; a freddo non è molto solubile nell'alcool. Cristallizza bene anche dall'acqua; è pochissimo solubile nell'etere. Si scioglie in circa 54 p. di acqua a 15° e in 4-5 volte il suo peso di acqua bollente. La soluzione è neutra. Fonde a 88-89°

in liquido incoloro che per raffreddamento subito si rapprende in massa cristallina che rifonde ancora a 88-89° (1).

Si scioglie già a freddo nella soluzione di potassa al 10 % e sviluppa piperidina.

La cianacetilpiperidina è ossidata prontamente dal permanganato potassico e fornisce acido cianidrico ed un acido ben cristallizzato che sarà descritto in seguito.

In una successiva memoria riferirò i risultati ottenuti nell'azione dell'etere cianacetico sulla *fenilidrazina*, sulla *piperazina*, sulla *guanidina*, sulla *allilamina*, sulla *camfilamina*, sulla *etilfenilidrazina*, sulla *tetraidrochinolina*, sulla *tetraidro* β *naftilamina*, sulle diamine aromatiche, sull'*ammonialdeide*, sulla *metilanilina*, sulla *diacetonamina* ed altre basi organiche.

Di speciale importanza deve essere il composto ben cristallizzato, stabile e fusibile a 194-195°, che si ottiene dall'etere cianacetico sulla *diacetonamina* $C^6H^{13}NO$ e che non ha la composizione della cianacetildiacetonamina.

Mi riserbo anche lo studio dell'azione dell'etere cianacetico sugli acidi amidati. Composti pure interessanti debbonsi ottenere dall'etere α cianopropionico.

R. Università. — Laboratorio di Chimica Farmaceutica e Tossicologia.
Torino, 9 Dicembre 1891.

---

(1) Si può far osservare, che il *nitrile piperidilossamico* $C^5H^{10}NCO\,CN$ è liquido, oleoso, bollente a 264° (Wallach e Lehmann).

Azione dell'etere cianacetico sull'anilina;

Nota del Dott. E. QUENDA

L'anilina si comporta coll'etere cianacetico in modo alquanto diverso che non le vere amine aromatiche. Produce la *cianacetilanilina* ma solamente col concorso del calore, ed insieme al derivato cianacetilico si forma anche la *malondianilide.*

In un matraccio munito di refrigerante feci reagire circa molecole uguali di anilina (gr. 45) e di etere cianacetico (gr. 37). Scaldando a b. d'olio la reazione incomincia verso 160°; mantenni la temperatura fra 160° e 170° per 3 a 4 ore, raccogliendo il prodotto che distillava.

Nel distillato che passava quasi tutto a 70°—80° riconobbi in grande quantità l'*alcool* insieme ad un poco di anilina, etere cianacetico ed ammoniaca. La miscela rimasta nel pallone col raffreddamento si rapprese in una massa solida gialliccia che si staccò poi facendola bollire con acqua. Triturata in mortaio si fece bollire a lungo a più riprese con circa quattro litri d'acqua che ne sciolsero la maggior parte (A). Rimase un residuo (B).

Col raffreddamento si depositò il composto A quasi incoloro.

Dopo ripetute cristallizzazioni dall'acqua e dall'alcool diluito (60 %) questo composto si ebbe con punto di fusione costante.

Sottoposto all'analisi, diede i risultati seguenti:

I. gr. 0,2657 di sostanza diedero gr. 0,6542 di CO^2 e gr. 0,1233 di H^2O.

II. gr. 0,1227 di sostanza diedero cm.^{3} 18,2 di azoto a 17° e 748 mm.

III. gr. 0,1172 di sostanza diedero cm^3 18,5 di N a 16° e 737 mm.

Da cui la composizione centesimale seguente:

	I	II	III
$C =$	67,15	—	—
$H =$	5,16	—	—
$N =$	——	16,88	17,80 .

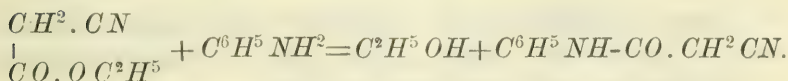
Numeri questi che corrispondono alla composizione della cianacetilanilina;

$$C^6H^5NH - CO . CH^2 . CN .$$

Per la quale si calcola

$$C = 67,5$$
$$H = 5,0$$
$$N = 17,5 .$$

Questo composto si è formato nel modo seguente:

$$\begin{matrix} CH^2 . CN \\ | \\ CO . O C^2H^5 \end{matrix} + C^6H^5NH^2 = C^2H^5OH + C^6H^5NH\text{-}CO . CH^2CN.$$

La cianacetilanilina è pochissimo solubile nell'acqua fredda.

a) Gr. 75,53 di soluzione acquosa satura a 20° fornirono gr. 0,0173 di residuo; cioè 1 p. si scioglie in 4366 p. d'acqua a 20°.

b) Gr. 95,2 di soluzione satura a 22°5 diedero gr. 0,030, cioè 1 p. di cianacetilanilina in 3173 p. di acqua a 22°,5.

È però molto più solubile nell'acqua calda. È pure solubilissima nell'alcool bollente da cui cristallizza in scagliette irregolari splendenti, leggere. Nell'etere invece tanto a caldo che a freddo è quasi insolubile.

La cianacetilanilide fonde a 198°,5 — 200° in liquido incoloro e scaldata lentamente sublima in laminette sottili, trasparenti che conservano costantemente il punto di fusione a 198°,5-200°. Non distilla col vapore d'acqua. Le soluzioni sono neutre. Cogli acidi non forma sali; fatta bollire con soluzione concentrata di potassa caustica sviluppa ammoniaca ed anilina.

La cianacetilanilina si ossida col permanganato potassico, dando acido cianidrico, già a temperatura ordinaria.

L'acetilanilina o acetanilide fonde a 113° e la bromacetilanilina a 134°

La parte insolubile (*B*) in acqua bollente, fatta ripetutamente cristallizzare dall'alcool e scolorata, si ebbe in cristallini bianchi che all'analisi diedero i risultati seguenti:

I. gr. 0,1580 di sostanza diedero gr. 0,4065 di CO^2 e gr. 0,0822 di H^2O;

II. gr. 0,1528 di sostanza fornirono gr. 0,3977 di CO^2 e gr. 0,0812 di H^2O;

III. gr. 0,2166 di sostanza diedero cm.^{3} 22 di N a 22° e 738 mm. da cui si ricava

		I.	II.	III.
C %	=	70,16	70,9	—
H	=	5,7	5,9	—
N	=	—	—	11,34

Questo composto fonde a 223°-224° è insolubile in acqua, tanto a freddo che a caldo — quasi affatto insolubile in etere — solubilissimo invece nell'alcool a caldo.

Scaldato con potassa si scompone e dà nel distillato dell'anilina riconosciuta a tutte le sue reazioni caratteristiche.

La composizione e le proprietà concordano colla composizione e colle proprietà della malondianilide studiata da Freund (*Berichte* XVII, p. 134) e da Bischoff (*Ber.* 1888, p. 1763).

Per la malondianilide

$$CH^2\langle\begin{matrix}CO.NH.C^6H^5\\CO.NH.C^6H^5\end{matrix}$$

infatti si calcola:

C %	=	70,86
N	=	5.51
H	=	11.0

La malondianilide proviene molto probabilmente da successiva scomposizione della cianacetilanilide.

In questo senso saranno studiate anche le tre toluidine.

Torino, R. Università. — Laboratorio del Prof. GUARESCHI.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

CLASSI UNITE

Adunanza del 20 Dicembre 1891

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

RELAZIONE

della seconda Giunta per il settimo **Premio BRESSA**
letta nella seduta del 20 *Dicembre* 1891

Le opere, che la prima Giunta giudicò degne di considerazione, sono le seguenti:

1. **Bertrand**. — *Calcul des probabilités*,
2. **Haeckel**. — *Memorie sui radiolari, sui sifonofori, sulle spugne cornee del mare profondo*,
3. **Hertz**. — *Memoria sulla trasmissione delle azioni elettriche*,
4. **Lie**. — *Theorie der Transformationsgruppen*.

Nella prima, benchè ricca di moltissimi pregi, la Giunta non riscontrò tutte quelle condizioni, che la volontà del testatore prescrive. Essa dovette pertanto, non senza rammarico, escluderla dal numero delle opere che crede possano venire premiate.

Tali sono invece le altre tre opere: del valore di queste farò qui un rapido cenno.

Le Memorie di ERNESTO HAECKEL sopra citate, contengono la descrizione dei radiolari, dei sifonofori e delle spugne cornee del mare profondo, raccolti dalla spedizione del Challenger nel viaggio compiuto dal 1873 al 1876.

È noto che i naturalisti del Challenger fecero abbondanti e preziose raccolte di organismi viventi sul fondo del mare. Il Governo inglese affidò all'HAECKEL lo studio degli animali spettanti ai tre gruppi nominati di sopra. L'incarico non poteva venire affidato a persona più autorevole in tale materia. Fin dal 1860 l'HAECKEL aveva fatto conoscere un gran numero di radiolari. Con la monografia sulle spugne calcaree e sulle meduse egli aveva posto le basi di un nuovo ramo delle discipline biologiche, della morfologia comparata e aveva indicato le proprietà fondamentali del protoplasma.

Dal 1860 al 1888 l'HAECKEL continuò i suoi studi sui radiolari. A quell'epoca appartiene il suo scritto sulle monere che lo condusse a stabilire il regno dei *Protisti*, intermedio fra l'animale e il vegetale.

Con la memoria presentata a questo concorso l'HAECKEL portò da 810 a 4318 il numero delle specie dei radiolari, ma oltre alla importanza della memoria rispetto alla zoologia sistematica è d'uopo considerare il grandissimo valore della parte anatomica e fisiologica di questo lavoro.

Il secondo degli scritti sopra citati riguarda i sifonofori. La delicatezza e la fragilità di questi animali, la loro vita in colonie e i numerosi fenomeni di polimorfismo ne rendono difficilissimo lo studio. La Memoria dell'HAECKEL ha un grande valore non solamente per il numero delle nuove forme descritte, ma anche per le teorie generali che vi sono esposte sulla organizzazione, sulla embriogenia e filogenia e sul concetto di individuo e di colonia.

Nella terza memoria l'HAECKEL descrive sistematicamente le spugne cornee del mare profondo, ne fa lo studio istologico e tratta in generale della posizione del gruppo delle spugne cornee e della intera classificazione del tipo dei Poriferi. In questa memoria sono descritti dei fenomeni importantissimi di simbiosi fra gl'idroidi e le spugne.

Le tre memorie dell'HAECKEL formano insieme un'opera di 2300 pagine con 200 tavole disegnate per gran parte dall'autore. Esse costituiscono senza dubbio il lavoro più importante apparso nel quadriennio 1887-90 in fatto di zoologia; ed esso

acquista ancor maggior valore da ciò, ch'esso è parte di una vastissima opera, con la quale l'autore studiando i fenomeni fondamentali della vita e lo sviluppo e le relazioni degli organismi si acquistò fama di uno dei più grandi naturalisti che abbiano mai esistito e collocò il proprio nome accanto a quelli di Linneo, di Lamarck, di Cuvier e di Darwin.

Passo ora alle memorie dell'Hertz. Queste sono in numero di nove; per l'ampiezza dell'argomento e per la natura stessa di esso non potrò darne qui che un imperfettissimo cenno.

Benchè il numero dei fenomeni elettrici conosciuti e studiati in ogni loro particolare sia oggi grandissimo, le nostre cognizioni intorno all'essenza dell'elettricità e all' intimo meccanismo dei fenomeni stessi sono molto scarse. Le azioni di un corpo elettrizzato o di una calamita o di una corrente si esercitano sopra corpi lontani senza che ci sia dato vedere in qual modo tali azioni si trasmettano nello spazio interposto. Il Faraday fu particolarmente attratto da tale questione e suggerì certi particolari artifici utili a rappresentarci le condizioni, in cui la presenza di un corpo elettrizzato o di una calamita o di una corrente pone lo spazio circostante in quanto alle azioni elettriche o magnetiche, che vi si possono esercitare.

Il Maxwell valendosi di quel potente mezzo d'indagine che è la matematica, si addentrò assai più del Faraday nello studio teorico dell'essenza dei fenomeni elettrici. Egli ammise che alla propagazione delle azioni elettriche serva l'etere luminoso e, procedendo nel campo delle ipotesi, fondò la teoria elettro-magnetica della luce, secondo la quale i fenomeni luminosi sarebbero fenomeni elettro-magnetici.

Qualche verificazione di tale teoria era stata favorevole ad essa, ma erano sempre verificazioni indirette e manchevoli.

L'Hertz si propose di studiare sperimentalmente la propagazione delle azioni elettriche e si valse per ciò delle rapidissime oscillazioni, le quali avvengono quando una scarica elettrica succede in certe condizioni speciali. Poniamo, ad esempio, che un corpo conduttore elettrizzato venga posto in comunicazione con un altro non elettrizzato mediante un filo metallico. Quando il filo soddisfaccia a certe condizioni, l'elettricità, anzichè distribuirsi sopra i due corpi e raggiungere subito l'equilibrio, oscilla rapidissimamente fra l'uno e l'altro corpo e non si ha l'equilibrio se non dopo un gran numero di tali oscillazioni.

Con ingegnose disposizioni sperimentali l'Hertz riuscì a dimostrare che le azioni elettriche cui dànno origine nello spazio circostante quelle oscillazioni si propagano con velocità finita. Fu questa la prima diretta conferma delle idee del Faraday e del Maxwell secondo le quali nessun'azione elettrica si può trasmettere fra due corpi senza che un mezzo interposto vi prenda parte.

L'Hertz mostrò che la propagazione di quelle azioni nei fili metallici e nell'aria avviene in modo simile a quello in cui si propagano le vibrazioni luminose e sonore. Egli misurò la velocità della trasmissione e trovò nel caso dell'aria un valore eguale a quello della luce. Studiò la riflessione delle vibrazioni elettriche sopra specchi metallici e trovò anche per questo rispetto piena analogia con la luce. Mostrò che nei fili e nell'aria si possono avere onde permanenti formate dalle vibrazioni elettriche, come nel caso del suono. Costruito un grande prisma di sostanza isolante, mostrò che un raggio di vibrazioni elettriche fatto cadere sopra una faccia vi si rifrangeva come un raggio di luce. Trovò che l'indice di rifrazione di quella sostanza era presso a poco lo stesso per la luce e per le vibrazioni elettriche. Tutte queste esperienze vengono mirabilmente a confermare la teoria elettromagnetica della luce e ognun vede quanta importanza abbia la opera dell'Hertz, che ravvicina e riconduce alla medesima causa due parti così vaste della fisica, due classi così ampie di fenomeni.

Oltre a questa conseguenza principale delle indicate esperienze, altre ne ottenne l'Hertz, che meritano pure menzione, come ad esempio la dimostrazione che i movimenti elettrici, i quali avvengono nell'interno dei corpi isolanti producono sui corpi esterni azioni elettro-dinamiche e che le radiazioni ultraviolette determinano la scarica fra due corpi che sono a diverso potenziale, quando la differenza di potenziale, senza l'azione di quelle radiazioni, è insufficiente alla scarica.

A dimostrare l'importanza dei lavori dell'Hertz, se ve ne fosse bisogno, basterebbe citare il gran numero d'indagini sperimentali e teoriche, le quali vennero fatte nel campo ch'egli aperse agli studi.

La *Theorie der Transformationsgruppen* del prof. Sophus Lie dell'Università di Lipsia è un'opera di capitale importanza, nella quale sono raccolte le ricerche affatto originali che la scienza deve al Lie intorno ai gruppi di trasformazione in generale e particolarmente di quelle di contatto. I risultati di tali ricerche

si applicano tanto all'analisi ed alle equazioni differenziali della meccanica quanto a vari argomenti di geometria.

La fecondità della teoria del Lie fu riconosciuta generalmente. Anche illustri matematici francesi come Darboux, Poincaré, Picard, Goursat pubblicarono dei lavori basati sull'opera del Lie e ne parlarono con grandissima ammirazione.

Nei concorsi precedenti le Giunte incaricate delle proposte finali disposero i nomi degli autori in ordine di merito, senza che però venisse scemata in tal modo la libertà della votazione dell'Accademia. Nel caso presente la Giunta non si sentì in grado di procedere in quel modo. Essa aveva innanzi a sè tre opere eminenti spettanti a scienze diverse, tra le quali le parve troppo malagevole il confronto. Essa vi presenta pertanto le tre opere senza alcuna distinzione di merito. Il vostro voto dirà quale d'esse meglio risponda alla volontà del fondatore del premio.

A. Naccari, *Relatore.*

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. 4ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Gennaio 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Cossa, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Segretario presenta in dono all'Accademia undici numeri, dal 101 al 111, del *Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia comparata dell'Università di Torino*, i quali contengono lavori dei Professori Salvadori, Camerano e Sacco e dei Dottori Giglio-Tos, Maggiora e Peracca.

Il Socio Camerano offre pure in dono una pubblicazione del Professore Emilio Chaix di Ginevra, riflettente la vallata del Bove (Etna) ed accompagnato da una pregevole carta particolareggiata dell'Etna. Questa pubblicazione riassume le cognizioni geologiche attuali sull'Etna, e contiene pure un notevole contributo alla conoscenza delle piante della regione superiore Etnea. La carta poi ha il merito di presentare in un sol colpo d'occhio non solo la geografia della località, ma anche la posizione relativa delle varie colate di lava a partire dal secolo quattordicesimo.

Il Socio Cossa ricorda con parole di vivo rimpianto la morte dell'Accademico straniero Giovanni Gervasio Stas, professore nella Università di Bruxelles, e riassume le importanti contribuzioni da questo recate alle discipline chimiche in uno scritto che verrà pubblicato negli *Atti*.

Il Socio Segre annunzia pure la morte del professore Leopoldo Kronecker dell'Università di Berlino, avvenuta in quella città il 29 dicembre scorso. Accenna agli alti meriti di questo insigne scienziato, specialmente nell'Analisi matematica, alla quale diede potenti impulsi in molteplici direzioni, dalla teoria dei numeri a quella delle funzioni ellittiche; dalle ricerche sulla teoria generale delle equazioni algebriche, sulla risoluzione dell'equazione di 5° grado, ecc., a quelle sulle forme bilineari e quadratiche, ed ai lavori profondi, mirabili per generalità e fecondità di vedute, sulla teoria aritmetica delle grandezze algebriche. Il Socio Segre soggiunge: la scienza e l'insegnamento che, quasi settantenne, egli coltivava e curava con ardore giovanile, il glorioso *Journal für Mathematik*, che egli dirigeva con molto zelo, possono ben a ragione piangere la grande perdita!

Dietro proposta dei Soci Cossa e Segre rispettivamente, la Classe incarica la Presidenza di esprimere i suoi sensi di condoglianza all'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Bruxelles per la morte dello Stas, ed all'Accademia delle Scienze di Berlino per quella del Kronecker.

Vengono in seguito presentati:

Dal Socio Cossa, un lavoro del Dottore Clemente Montemartini intitolato: *Sull'azione dell'acido nitrico sullo zinco;*

Dal Socio Segre, una Memoria del Prof. Riccardo De Paolis dell'Università di Pisa, intitolata: *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di prima specie.*

Essendo questi due lavori destinati ai volumi delle Memorie, il Presidente li affida a due Commissioni incaricate di esaminarli e riferirne alla Classe in una prossima tornata.

Lo stesso Socio Segre poi legge e presenta per l'inserzione negli *Atti* uno Studio *Sulla teoria generale delle omografie;* Nota prima del Dott. Pilo Predella.

Il Socio Camerano, anche a nome del condeputato Socio Salvadori, legge una sua Relazione sulla Memoria del Professore Federico Sacco intorno alle *Eulimidae*, *Pyramidellidae* e le *Turbonillidae*, la quale fa seguito a parecchie altre Memorie, sia del compianto Prof. Luigi Bellardi, sia dello stesso Prof. Sacco, sui Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria. Secondo le conclusioni della Relazione, la quale sarà inserita negli *Atti*, la Memoria del Prof. Sacco, viene prima ammessa alla lettura, e poscia approvata dalla Classe per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

In questa adunanza viene rieletto, salvo l'approvazione sovrana, alla carica triennale di Segretario della Classe il Socio Basso.

LETTURE

In commemorazione del socio straniero G. S. Stas;

Parole dette dal Socio Prof. ALFONSO COSSA

Nell'adunanza del 22 febbraio 1891 la Classe di Scienze fisiche e matematiche della nostra Accademia, nell'occasione che all'illustre professore Stas tributavansi meritate onoranze per la ricorrenza del cinquantesimo anniversario della sua nomina a Membro della Reale Accademia delle Scienze di Bruxelles, mi onorava coll'incarico di esprimere al nostro Socio straniero i sentimenti della sua profonda ammirazione, e l'augurio che Egli potesse ancora per molto tempo illustrare coi suoi desiderati lavori la chimica, della quale per unanime consenso era ritenuto uno dei più valorosi campioni. — Pur troppo quell'augurio non si è verificato, ed oggi all'annunzio della sua morte

domando che l'Accademia acconsenta che per me si compia al dovere di commemorare con poche parole le più salienti benemerenze scientifiche del compianto nostro collega.

Giovanni Servasio Stas nacque a Lovanio il 21 settembre 1813, un mese dopo che a Scilla di Calabria era nato Raffaele Piria. I due chimici non solo ebbero in comune l'anno della nascita, ma anche i principii della loro carriera scientifica; giacchè entrambi, dopo avere conseguito la laurea in medicina, appassionati per la chimica ebbero la invidiata fortuna di poterla imparare nel laboratorio di Dumas, del quale furono gli allievi prediletti. Il Piria esordì (1838) con quel classico lavoro sulla Salicina, che lasciava già presagire a quale altezza egli sarebbe poi salito nelle ricerche di chimica organica. L'argomento della prima pubblicazione di Stas fu pure un pregevole studio sopra un glucoside, la florizina; ma il chimico belga cambiò ben presto d'indirizzo ne'suoi studi, e rivolse interamente il suo ingegno a ricerche d'indole analitica, proponendosi il difficile compito di stabilire colla massima possibile precisione i numeri che esprimono i pesi relativi coi quali gli elementi si combinano tra loro. — I risultati di questo studio, continuato con una costanza impareggiabile per oltre un trentennio, furono in due riprese pubblicati col titolo: *Ricerche sulle leggi delle proporzioni chimiche, sui pesi atomici ed i loro mutui rapporti.* Stas ha trovato che non esiste alcun comune divisore tra i numeri che esprimono i pesi dei corpi semplici che si uniscono per formare le combinazioni definite, e pertanto ha dimostrato la insussistenza della ipotesi di Prout. Contro il rigore col quale vennero eseguite le ricerche di Stas perdette ogni parvenza di probabilità l'ingegnosa idea di Dumas, il quale, affascinato dall'ipotesi dell'unità della materia, ammetteva che la materia unica, se non era l'idrogeno, potesse essere una sostanza avente un peso atomico inferiore della metà o di tre quarti. Contro questo rigore dovettero pur cedere le sottili obbiezioni di Marignac, che voleva adattare i risultati ottenuti da Stas alle esigenze della ipotesi di Prout, ammettendo che la legge delle proporzioni definite sia da ritenersi come un *limite*, intorno al quale sono possibili piccole variazioni.

Nell'opera classica dello Stas, che meritò l'onore grandissimo della Medaglia Davy, conferita dalla Società Reale di Londra, il genio si esplica nella molteplicità dei metodi rigorosi ideati

e seguiti per ottenere una stessa misura; negli artificii sottili posti in opera per eliminare per quanto è possibile gli errori di osservazione, e nel fino criterio col quale sono valutati quelli inevitabili.

L'alto valore dello Stas nella chimica analitica si manifestò anche in altri suoi lavori, tra i quali emerge quello che ebbe origine da un celebre processo per avvelenamento con la nicotina. Il metodo ingegnoso ideato dal chimico belga per rintracciare e diagnosticare quantità anche piccolissime di un alcaloide velenoso fu subito universalmente adottato, ed è ancora seguito nelle ricerche di chimica legale.

Quando, or sono più di dieci anni, l'illustre Lockyer pubblicò le sue interessanti osservazioni sulla disassociazione delle linee caratteristiche degli spettri degli elementi, Stas intraprese una serie di ricerche sulla natura chimica delle radiazioni luminose. Questo suo lavoro è rimasto finora inedito, ma dal saggio che l'illustre autore comunicò all'Accademia delle Scienze del Belgio nella solenne adunanza del 1890, appare che egli ha ottenuto dalle sue osservazioni un risultato importantissimo, avendo dimostrato che gli spettri calorifici ed elettrici degli elementi non sono sovrapponibili, e che gli elementi sono immutabili colle forze di cui si può attualmente disporre.

Le produzioni scientifiche del chimico belga, che ho brevemente ricordato, rimarranno nella storia della scienza; saranno in ogni tempo studiate con profitto, e giustificheranno l'affermazione colla quale si può, senza esagerazione, riassumere l'elogio del loro autore; essere stato lo Stas tra i chimici del suo tempo, quello che più si è avvicinato allo scopo da tutti desiderato, di rendere la chimica degna di essere compresa nel novero delle scienze esatte.

Sulla teoria generale delle omografie;

Nota I del Dott. PILO PREDELLA

Un'*omografia generale* (§ 2) si studia molto facilmente; gli spazi fondamentali e gli invarianti assoluti bastano per determinarla completamente (20); ma può avvenire che uno o più spazi fondamentali $F[h_2-1]$ $F[h_3-1]$ ecc. vadano a sovrapporsi e a svanire in un altro spazio fondamentale $F[h_1-1]$ di dimensioni superiori. Lo studio di queste *omografie particolari* è assai più complicato. — Gli spazi fondamentali $F[h_2-1]$, $F[h_3-1]$, ecc. non si presentano in una prima analisi e bisogna ricercarli nello spazio $F[h_1-1]$ (§ 3). — Ma c'è di più; in questo caso i punti uniti e gli invarianti assoluti non bastano più per determinare l'*omografia;* in compenso però si presentano $n+1$ coppie di punti, coppie *caratteristiche* (che si riducono ad $n+1$ punti uniti nel caso dell'*omografia generale*) le quali insieme agli invarianti assoluti determinano l'*omografia.*

La considerazione, che credo nuova, di queste $n+1$ coppie di punti chiarisce molto bene le proprietà dell'*omografia.* Col loro mezzo un'*omografia* qualunque, invece di essere data dalle solite $n+2$ coppie di punti corrispondenti, che non dicono nulla nel carattere dell'*omografia* che determinano, si può sempre supporre data da $n+1$ coppie *caratteristiche* e dagli invarianti assoluti, che tengono così luogo della $n+2^{esima}$ coppia. Ne viene fra l'altro il teorema di Weierstrass (45) e una semplice costruzione delle *omografie* (46).

Alcuni dei risultati di questa Nota furono già da me ottenuti in un altro lavoro sulle omografie (*). Qui però non faccio alcun uso di considerazioni al limite e le questioni sono risolte da un altro punto di vista.

(*) *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.* Annali di mat. Serie 2ª Tomo XVII. Fasc. 2; questa Memoria sarà citata semplicemente col nome « *Omografie* ».

§ 1.

Preliminari.

La relazione bilineare:

$$1. \qquad \Sigma a_{ik}\, y_i\, \xi_k = 0 \quad (i, k = 1, \ldots . n+1)$$

fra le coordinate ξ_i dei piani di uno spazio lineare S_n (prima figura) e le coordinate y_i dei punti dello stesso spazio (seconda figura), definisce un'*omografia* di S_n in sè stesso.

Supponiamo che il determinante $[a_{ik}]$ modulo dell'*omografia* non sia nullo cioè che l'*omografia* non sia *degenere*.

Ad ogni punto y (seconda figura) corrisponde un punto x (prima figura) di coordinate:

$$2. \qquad \begin{array}{c} r x_1 = a_{11} y_1 + \ldots . . + a_{n+1,1} y_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r x_{n+1} = a_{1\,n+1} y_1 + \ldots . . + a_{n+1,\,n+1} y_{n+1} \end{array}$$

e ad ogni piano ξ (prima figura) corrisponde un piano η (seconda figura) di coordinate:

$$3. \qquad \begin{array}{c} \rho \eta_1 = a_{11} \xi_1 + \ldots . . + a_{1\,n+1} \xi_{n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho \eta_{n+1} = a_{n+1\,1} \xi_1 + \ldots . . + a_{n+1,\,n+1} \xi_{n+1} . \end{array}$$

Per trovare i punti uniti basterà porre nelle (2) $x = y$, e si avrà:

$$4. \qquad \begin{array}{c} (a_{11} - r) x_1 + \ldots . . + a_{n+1,\,1} x_{n+1} = 0 . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n+1} x_1 + \ldots . . + (a_{n+1,\,n+1} - r)\, x_{n+1} = 0 . \end{array}$$

Queste equazioni coesistono quando.

$$5. \qquad D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \ldots . . a_{n+1,\,1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1\,n+1} \ldots a_{n+1,\,n+1} - r \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa equazione di grado $n+1$ in r fornisce i valori di r che messi successivamente nelle (4) dànno i punti uniti dell'omografia. — Sia r' una radice di $D(r)=0$; r' renderà il determinante di caratteristica $n-h'+1$ (*) (dove h' è almeno uguale ad uno); allora le equazioni (4) si riducono ad $n-h'+1$ indipendenti che determinano uno spazio $F[h'-1]$ di punti uniti che diremo *spazio fondamentale*.

La radice r' sarà almeno h'—pla di $D(r)=0$ (Omografie § 3). Alle altre radici $r''\ldots r^{(\sigma)}$ corrisponderanno rispettivamente gli spazi fondamentali $F[h''-1]\ldots\ldots F[h^{(\sigma)}-1]$; e si avrà

$$6. \qquad h'+h''+\ldots\ldots+h^{(\sigma)}\leq n+1.$$

7. Quando r' è proprio radice h'pla di $D(r)=0$, r'' radice h''pla, ecc., $r^{(\sigma)}$ radice $h^{(\sigma)}$pla diremo che l'omografia è generale; allora

$$h'+h''+\ldots\ldots+h^{(\sigma)}=n+1.$$

Dalla (6) si ricava immediatamente quest'importante teorema del SEGRE (*Omografie*, § 3).

8. « Gli spazi fondamentali di punti $F[h'-1]\ldots F[h^{(\sigma)}-1]$ di una omografia sono indipendenti, cioè appartengono ad uno spazio ad $h'+h''+\ldots+h^{(\sigma)}-1$ dimensioni ».

Dalle (3) considerando che il determinante

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & \ldots\ldots & a_{1\,n+1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n+1,1} & \ldots & a_{n+1,n+1}-\rho \end{vmatrix}$$

è identico a $D(r)$ con uno scambio delle colonne nelle righe, si ricava correlativamente che in corrispondenza alla radice $r'\ldots r^{(\sigma)}$ di $D(\rho)=0$ esistono σ fondamentali di piani $\Phi[h'-1]$, $\Phi[h''-1]$, $\ldots\Phi[h^{(\sigma)}-1]$, tutti indipendenti, cioè appartenenti ad uno spazio di piani ad $h'+h''+\ldots+h^{(\sigma)}-1$ dimensioni. Diremo *coniugati* due spazi come $F[h'-1]$ e $\Phi[h'-1]$ corrispondenti alla stessa radice.

(*) Un determinante si dice di caratteristica $n-h'+1$ quando non sono nulli tutti i suoi minori di ordine $n-h'+1$ ma sono nulli tutti quelli di ordine superiore.

9. « In corrispondenza alle radici $r' \dots r^{(\sigma)}$ abbiamo dunque i σ spazi fondamentali di punti: $F[h'-1] \dots F[h^{(\sigma)}-1]$ e i loro spazi fondamentali di piani coniugati: $\Phi[h'-1] \dots \Phi[h^{(\sigma)}-1]$ i cui sostegni indicheremo con $G[n-h'] \dots G[n-h^{(\sigma)}]$ ».

Gli spazi fondamentali di punti e di piani hanno le seguenti proprietà scoperte dal SEGRE:

10. « Ad ogni $S[h']$ passante per $F[h'-1]$ corrisponde un $S'[h']$ prospettivo, il centro di prospettiva giace in $G[n-h']$ sostegno dello spazio $\Phi[h'-1]$ coniugato di $F[h'-1]$ ».

11. « Quando $S[h']$ varia descrivendo la stella di sostegno $F[h'-1]$, il centro di prospettiva descrive lo spazio $G[n-h']$; gli spazi $S[h']$ passanti per $F[h'-1]$ e i centri di prospettiva sono in relazione omografica ».

12. « Tutti gli spazi fondamentali di punti sono contenuti in $G[n-h']$ meno $F[h'-1]$ che vi può essere contenuto o no ».

13. « La retta che unisce due punti corrispondenti x_i ed y_i taglia $G[n-h']$ $G[n-h'']$ ... $G[n-h^{(\sigma)}]$ rispettivamente nei punti $x_i - r'y_i$, $x_i - r''y_i$, ... $x_i - r^{(\sigma)}y_i$ ».

E correlativamente invertendo le due figure:

14. « Lo spazio d'intersezione di due piani corrispondenti η_i e ξ_i giace rispettivamente cogli spazi fondamentali di punti $F[h'-1]$ ... $F[h^{(\sigma)}-1]$ nei piani $\eta_i - r'\xi_i$, ... $\eta_i - r^{(\sigma)}\xi_i$ ».

Dai teoremi (13) e (14) si ricava:

15. « Le punteggiate formate da due punti corrispondenti e dai punti dove la loro congiungente taglia $G[n-h'] \dots G[n-h^{(\sigma)}]$ sono omografiche fra loro e omografiche ai fasci formati da due piani corrispondenti (scambiate però le due figure) e dai piani che dalla loro intersezione proiettano rispettivamente $F[h'-1] \dots F[h^{(\sigma)}-1]$ perchè sono omografici ai numeri $0, \infty, r' \dots r^{(\sigma)}$ ».

16. « I $\sigma - 1$ rapporti anarmonici:

$$\frac{r''}{r'}, \dots \frac{r^{(\sigma)}}{r'}$$

che si possono formare coi $\sigma + 2$ punti

$$x_i, \ y_i, \ x_i - r'y_i, \dots x_i - r^{(\sigma)}y_i$$

o coi $\sigma+2$ piani

$$\eta_i\,,\ \xi_i\,,\ \eta_i-r'\xi_i\,,\ldots\eta_i-r^{(\sigma)}\xi_i$$

sono invarianti assoluti dell'omografia perchè passando con una proiettività dall'omografia data ad un'altra quei rapporti anarmonici non cambiano » (*).

§ 2.

Omografie Generali.

Abbiamo visto (7) che in un'omografia *generale* in S_n, se $F[h'-1]\ldots F[h^{(\sigma)}-1]$ sono gli spazi fondamentali di punti,

$$h'+h''+\ldots+^{(\sigma)}=n+1$$

Da questa relazione e per i teoremi (8) e (12) si ricava:

17. « Gli spazi fondamentali di un'*omografia generale* oltre essere indipendenti determinano come spazio a cui appartengono tutto S_n; e il sostegno dello spazio coniugato di uno di essi non sega questo ed è lo spazio determinato dagli altri perchè p. es. $G[n-h']$ deve contenere (12) $F[h''-1]\ldots F[h^{(\sigma)}-1]$ i quali appunto determinano uno spazio ad $n-h'$ dimensioni. »

Chiameremo *caratteristica* dell'omografia generale il gruppo di numeri:

18. $$[(h'-1)\,(h''-1)\,\ldots\,(h^{(\sigma)}-1)]$$

Prendiamo i vertici $1;\ldots h'$ della piramide di riferimento in $F[h'-1]$, i vertici $h'+1,\ldots h'+h''$ in $F[h''-1]$ ecc., gli ultimi $h^{(\sigma)}$ vertici in $F[h^{(\sigma)}-1]$ e vediamo cosa diventano le relazioni (2). Siccome nelle (2) i coefficienti della colonna r^{esima} sono le coordinate del punto corrispondente del vertice r^{esimo} della

---

(*) Gli importanti teoremi (12, 13, 14, 15, 16) sono del prof. SEGRE. Veggasi SEGRE *Sulla teoria e classificazione delle omografie*, ecc. Mem. della R. Acc. dei Lincei, anno 1883-84, e gli spazi fondamentali di un'omografia R. Acc. dei Lincei Vol. II, Serie IV. Semplicissime dimostrazioni (analitiche e geometriche) degli stessi teoremi si trovano nella mia Memoria già citata.

piramide di riferimento, si ricava che con quella scelta dei vertici di riferimento tutti i coefficienti sono nulli meno quelli della diagonale. Inoltre in corrispondenza allo spazio $F[h'-1]$ dovendo $D(r)=0$ avere una radice r' multipla secondo h', i coefficienti dei primi h' termini lungo la diagonale saranno uguali ad r' ecc.

Le (2) pigliano dunque questa forma semplicissima:

Siccome $\frac{r''}{r'} \ldots \frac{r^{(\sigma)}}{r'}$ sono gli invarianti assoluti dell'omografia si deduce che:

20. « Dati gli spazi fondamentali e gli invarianti assoluti di un'omografia generale la corrispondenza è determinata » perchè scegliendo ecc. si possono scrivere le (19).

21. Per costruire dunque un'omografia generale di caratteristica (18) basta descrivere σ spazi indipendenti $F[h'-1], \ldots F[h^{(\sigma)}-1]$ e dare arbitrariamente i rispettivi invarianti assoluti; la corrispondenza omografica che riesce determinata è appunto l'omografia che si voleva (*).

(*) Si può domandare come si trova geometricamente il corrispondente di un punto qualunque M. Se gli spazi fondamentali sono $n+1$ punti, per trovare il corrispondente di M proiettiamo da $n-1$ di essi gli altri due e il punto M, otterremo tre piani; ed al piano che proietta M dovrà corrispondere un piano formante coi tre un rapporto anarmonico dato (che è un invariante dell'omografia). Ripetendo l'operazione n volte otterremo n piani nei quali deve trovarsi M' corrispondente di M che resta così completamente determinato. Se gli spazi fondamentali $F[h'-1]$, $F[h''-1] \ldots\ldots F[h^{(\sigma)}-1]$ non sono tutti punti, conduciamo da M lo spazio $S[\sigma-1]$ che incontra ciascuno di essi in un punto. (Il prof. BERTINI in una sua Nota: *Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque. Rend. del R. Ist. Lombardo*, Serie II, Vol. XX nel § 1, n. 2, dimostra appunto che « Essendo $F[h'-1]$

22. Due omografie generali proiettive hanno la stessa caratteristica e rispettivamente gli stessi invarianti assoluti perchè con una proiezione gli spazi fondamentali si trasformano in spazi fondamentali e gli invarianti assoluti (rapporti anarmonici ecc.) non cambiano; ma anche viceversa, e infatti:

Abbiansi in S_n ed in S'_n due omografie colla stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti. Fissiamo in S_n i vertici di riferimento come abbiamo fatto per ottenere le (19) ed arbitrariamente il punto unità, e così in S'_n.

Le due omografie saranno allora rappresentate da identiche relazioni. Passando quindi con una proiettività dagli $n+1$ vertici di riferimento e dal punto unità della prima omografia rispettivamente agli omonimi punti della seconda passeremo dalla prima alla seconda. Badiamo che fissati gli $n+1$ punti di riferimento e il punto unità in S_n, i loro corrispondenti in S'_n pei quali si passa dalla prima omografia alla seconda sono scelti, i primi h' arbitrariamente in un $F[h'-1]$ cioè in una totalità $\infty^{h'-1}$, gli h'' che seguono in una totalità $\infty^{h''-1}$, ecc. e finalmente il punto unità in S_n cioè in una totalità ∞^n. Complessivamente il gruppo degli $n+2$ punti fissati in S_n si può scegliere in una totalità $n+h'(h'-1)+h''(h''-1)+\ldots+h^{(\sigma)}(h^{(\sigma)}-1)=n+\Sigma\, h(h-1)$ volte infinita di gruppi.

23. Date dunque due omografie generali aventi la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti esistono $\infty^{n+\Sigma h(h-1)}$ proiettività colle quali si passa dall'una all'altra.

§ 3.

Caratteristica di un'omografia qualunque.

Siano $F[h'_1-1]$, $F[h_1''-1]\ldots F[h_1^{(\sigma)}-1]$ gli spazi fondamentali di punti di un'omografia qualunque in S_n.

Ad $F[h'_1-1]$ è coniugato uno spazio fondamentale di piani di sostegno $G[n-h'_1]$.

$F[h''-1]\ldots\ldots F[h^{(\sigma)}-1]$ spazi indipendenti e tali che $\Sigma h=n+1$, per un punto M passa uno ed un solo $S[\sigma-1]$ appoggiato in un punto a ciascuno di questi spazi »), Nello spazio $S[\sigma-1]$ avremo un'omografia subordinata con σ punti uniti e cogli stessi invarianti della data, e allora per trovare il corrispondente di M procederemo come si è detto sopra.

Supponiamo che $F[h'_1-1]$ seghi $G[n-h'_1]$ in un $F[h'_2-1]$. In $G[n-h'_1]$ sarà contenuta un'omografia subordinata i cui spazi fondamentali saranno $F[h'_2-1]$ $F[h''_1-1] \dots F[h_1^{(\sigma)}-1]$ (*): e nella quale ad $F[h'_2-1]$ sarà coniugato uno spazio fondamentale di piani (piani per $G[n-h_1']$) il cui sostegno sarà un certo $G[n-h'_1-h'_2]$. Supponiamo che $F[h'_2-1]$ seghi $G[n-h'_1-h'_2]$ in un $F[h'_3-1]$. In $G[n-h'_1-h'_2]$ sarà contenuta un'omografia subordinata i cui spazi fondamentali saranno $F[h'_3-1]$ $F[h''_1-1]$ $\dots F[h_1^{(\sigma)}-1]$. Così proseguendo finiremo col trovare uno spazio $G[n-h'_1-h'_2-\dots-h'_{p'-1}]$ in cui sarà contenuta un' omografia subordinata i cui spazi fondamentali saranno $F[h'_{p'}-1]$, $F[h_1''-1] \dots F[h_1^{(\sigma)}-1]$; dove $F[h'_{p'}-1]$ non segherà il sostegno $G[n-h'_1-h'_2-\dots-h'_{p'}]$ del suo spazio coniugato (**).

In $G[n-h'_1-h'_2-\dots-h'_{p'}]$ è contenuta un'omografia subordinata in cui gli spazi fondamentali sono $F[h_1''-1]$, $F[h_1'''-1]$, $\dots F[h_1^{(\sigma)}-1]$. Così nello spazio $G[n-h'_1-h'_2-\dots h'_{p'}]$ non c'è più traccia dello spazio fondamentale $F[h'_1-1]$, e d'altra parte abbiamo scoperto nello spazio $F[h'_1-1]$ degli altri spazi $F[h'_2-1], \dots F[h'_{p'}-1]$ ciascuno immerso nel precedente per la stessa loro definizione, e la cui importanza si farà più manifesta in seguito. Si ha

$$h'_1 \geq h'_2 \geq \dots \dots \geq h'_{p'}.$$

In $G[n-h'_1-h'_2-\dots h'_{p'}]$ riguardo allo spazio fondamentale $F[h_1''-1]$ rifacciamo la stessa analisi fatta in S_n riguardo allo spazio $F[h'_1-1]$. Entro lo spazio $F[h_1''-1]$ verremo a scoprire gli spazi $F[h_2''-1] \dots F[h''_{p''}-1]$; e così via riguardo ad

(*) Perchè il sostegno $G[n-h_1']$ dello spazio coniugato di $F[h_1'-1]$ contiene (12) $F[h_1''-1] \dots\dots F[h_1^{(\sigma)}-1]$, e contiene per ipotesi $F[h_2'-1]$.

(**) Questo deve avvenire. Infatti le dimensioni degli spazi $G[n-h_1']$, $G[n-h_1'-h_2']$, $G[n-h'_1-h_2'-h_3']$, ... che man mano si trovano vanno decrescendo, ma non possono diventare minori di $h_1''+\dots+h_1^{(\sigma)}-1$; perchè gli spazi $G[n-h_1']$, $G[n-h_1'-h_2']$, $G[n-h_1'-h_2'-h_3']$, ... contenendo (12) gli spazi $F[h_1''-1], \dots F[h_1^{(\sigma)}-1]$ contengono anche lo spazio $S[h_1''+h_1'''+\dots+h_1^{(\sigma)}-1]$ a cui questi appartengono. Dunque finiremo col trovare uno spazio $F[h'_{p'}-1]$ che non sega più il sostegno del suo spazio coniugato. Se $G[n-h_1']$ non sega $F[h_1'-1]$, $p'=1$. Che $G[n-h_1']$ possa segare $F[h_1'-1]$ risulta chiaro dalle (41).

$F[h_1'''-1]$, ecc. fino al penultimo $F[h_1^{(\sigma-1)}-1]$, nel quale troveremo gli spazi $F[h_2^{(\sigma-1)}-1]\ldots F\left[h^{(\sigma-1)}_{p(\sigma-1)}-1\right]$.

Troveremo allora lo spazio S_m

$$m=n-h'_1-h'_2-\ldots-h'_{p'}-h_1''-h_2''-\ldots h''_{p''}-\text{ecc.}$$
$$-h_1^{(\sigma-1)}-h_2^{(\sigma-1)}-\ldots-h^{(\sigma-1)}_{p'^{\sigma-1)}},$$

dove non ci sarà più traccia degli spazi fondamentali $F[h'_1-1]$, $F[h_1''-1]\ldots F[h_1^{(\sigma-1)}-1]$; cioè dove sarà contenuta un'omografia subordinata coll'unico spazio fondamentale $F[h_1^{(\sigma)}-1]$. In questa omografia il sostegno dello spazio coniugato di $F[h_1^{(\sigma)}-1]$ sarà un certo $G[m-h_1^{(\sigma)}]$, nel quale sarà contenuta un'omografia subordinata con un unico spazio fondamentale $F[h_2^{(\sigma)}-1]$, immerso in $F[h_1^{(\sigma)}-1]$. Il sostegno dello spazio coniugato di $F[h_2^{(\sigma)}-1]$ sarà un certo spazio $G[m-h_1^{(\sigma)}-h_2^{(\sigma)}]$, nel quale sarà contenuta un' omografia subordinata con un unico spazio fondamentale $F[h_3^{(\sigma)}-1]$, ecc., così proseguendo arriveremo ad un sostegno $G\left[m-h_1^{(\sigma)}-\ldots-h^{(\sigma)}_{p(\sigma)-1}\right]$, in cui tutti i punti saranno uniti (*). Indichiamo questo spazio con $F\left[h^{(\sigma)}_{p(\sigma)}-1\right]$ (**), e quindi

$$h^{(\sigma)}_{p(\sigma)}-1=m-h_1^{(\sigma)}-\ldots-h^{(\sigma)}_{p(\sigma)-1};$$

da questa relazione ricordando il valore di m si ricava:

$$24.\qquad h'_1+\ldots+h'_{p'}+h_1''+\ldots+h''_{p''}+\text{ecc.}\ldots$$
$$\ldots+h_1^{(\sigma)}+\ldots+h^{(\sigma)}_{p(\sigma)}=n+1$$

o più brevemente

$$\Sigma h=n+1.$$

Poniamo;

$$25.\qquad h'_1+\ldots+h'_{p'}=g'\ \ldots\ h_1^{(\sigma)}+\ldots+h^{(\sigma)}_{p(\sigma)}=g^{(\sigma)}$$

(*) Nella peggior ipotesi questo avverrà quando $G\left[m-h_1^{(\sigma)}-\ldots h^{(\sigma)}_{p(\sigma)-1}\right]$ sarà un punto.

(**) Così veniamo a scoprire anche nell' ultimo spazio $F[h_1^{(\sigma)}-1]$, gli spazi $F[h_2^{(\sigma)}-1]\ldots F\left[h^{(\sigma)}_{p(\sigma)}-1\right]$ ciascuno immerso nel precedente. Risulterà dalle (41) che qualunque sia l'ordine con cui si prendono $F[h_1'-1]\ldots F[h_1^{(\sigma)}-1]$ si trovano in essi sempre gli stessi spazi.

e

$$g = h'_1 + h'_1 + \dots + h_1^{(\sigma)}$$

sarà

$$g' + \dots + g^{(\sigma)} = n + 1 .$$

Dalle (41) risulterà che $g' \dots g^{(\sigma)}$ sono i gradi delle radici $r' \dots r^{(\sigma)}$ in $D(r) = 0$.

26. Chiameremo *gruppo caratteristico* dello spazio fondamentale $F[h'_1 - 1]$ il gruppo $(h'_1 - 1,\ h'_2 - 1,\ \dots h'_{p'} - 1,)$ e così per gli altri spazi $F[h''_1 - 1], \dots F[h_1^{(\sigma)} - 1]$. Chiameremo *caratteristica dell'omografia* il complesso

$$\left[(h'_1 - 1,\ h'_2 - 1,\ \dots h'_{p'} - 1)\ (h''_1 - 1,\ h''_2 - 1,\ \dots h''_{p''} - 1) \dots (h_1^{(\sigma)} - 1,\ h_2^{(\sigma)} - 1,\ \dots h^{(\sigma)}_{p^{(\sigma)}} - 1)\right]$$

dei gruppi caratteristici degli spazi fondamentali.

Se $p' = 1$ chiameremo lo spazio $F[h'_1 - 1]$ semplice, se $p' = 2$ doppio, ecc. se $p' > 1$ multiplo.

In un'omografia *generale* tutti gli spazi fondamentali sono *semplici* (17). La definizione (26) di caratteristica è in accordo colla (18).

§ 4.

Coppie caratteristiche di punti corrispondenti e spazi caratteristici di un'omografia.

Dell'*omografia* qualunque più sopra studiata consideriamo uno spazio *multiplo* per es. $F[h'_1 - 1]$ che per fissare le idee supporremo quadruplo; poniamo per brevità:

$$h'_1 = \alpha\ , \quad h'_2 = \beta\ , \quad h'_3 = \gamma\ , \quad h'_4 = \delta\ ,$$

sarà (25):

27. $$\alpha + \beta + \gamma + \delta = g' .$$

Dal paragrafo precedente risulta:

28. Nell'omografia contenuta in S_n, $F[\alpha - 1]$ è uno spazio fondamentale e sega il sostegno $G[n - \alpha]$ in $F[\beta - 1]$, che è quindi immerso in $F[\alpha - 1]$ e $G[n - \alpha]$.

29. Nell'omografia contenuta in $G[n-\alpha]$, $F[\beta-1]$ è fondamentale e sega il sostegno $G[n-\alpha-\beta]$ in $F[\gamma-1]$ che è quindi immerso in $F[\beta-1]$ e $G[n-\alpha-\beta]$.

30. Nell'omografia contenuta in $G[n-\alpha-\beta]$, $F[\gamma-1]$ è fondamentale e sega il sostegno $G[n-\alpha-\beta-\gamma]$ in $F[\delta-1]$ che è quindi immerso in $F[\gamma-1]$ e $G[n-\alpha-\beta-\gamma]$.

31. Nell'omografia contenuta in $G[n-\alpha-\beta-\gamma]$, $F[\delta-1]$ è fondamentale e non sega il sostegno $G[n-\alpha-\beta-\gamma-\delta]$ (27) $=G[n-g']$ del suo spazio coniugato.

In $G[n-g']$ è contenuta un'omografia in cui non c'è più traccia dello spazio fondamentale $F[\alpha-1]$.

Fissiamo in $F[\alpha-1]$, α punti indipendenti:

$$A_1 \ldots A_\delta \ldots A_\gamma \ldots A_\beta \ldots A_\alpha ,$$

dei quali i primi δ in $F[\delta-1]$, i primi γ in $F[\gamma-1]$, i primi β in $F[\beta-1]$.

Nell'omografia contenuta in $G[n-\alpha-\beta]$ i punti $A_1 \ldots A_\delta$ sono punti (30) del sostegno $G[n-\alpha-\beta-\gamma]$ dello spazio coniugato di $F[\gamma-1]$, e quindi sono centri di prospettiva (11) di δ coppie di spazi corrispondenti $S[\gamma]$, $S'[\gamma]$ passanti per $F[\gamma-1]$. In ciascuna di queste coppie di spazi scegliamo una coppia di punti corrispondenti

$$(B_1 B'_1) \ldots (B_\delta B'_\delta).$$

I punti $B_1 B'_1$ saranno allineati con A_1, ecc., i punti $B_\delta B'_\delta$ saranno allineati con A_δ (*). I punti $A_1 \ldots A_\gamma$, $B_1 \ldots B_\delta$ determinano un $S[\gamma+\delta-1]$ e sono quindi indipendenti (**). In

(*) Abbiamo denotato e denoteremo colla lettera B le coppie di punti allineati coi punti A, e così denoteremo colla lettera C quelli allineati con B, colla lettera D quelli allineati con C.

(**) Ed infatti badiamo che ai δ S_γ : $(A_1 \ldots, A_\gamma B_1) \ldots (A_1 \ldots A_\gamma B_\delta)$ corrispondono rispettivamente i δ S'_γ : $(A_1 \ldots A_\gamma B'_1) \ldots (A_1 \ldots A_\gamma B'_\delta)$ prospettivi ai primi secondo $A_1 \ldots A_\delta$. Ora fra i punti $A_1 \ldots A_\delta$ e i δ S_γ c'è una corrispondenza omografica (11); ma i punti $A_1 \ldots A_\delta$ sono indipendenti e determinano un $F[\delta-1]$, devono dunque gli S_γ determinare un $S[\gamma-\delta-1]$ che è anche determinato dai punti $A_1 \ldots A_\gamma$, $B_1 \ldots B_\delta$ il che dimostra che questi punti sono indipendenti.

questo $S[\gamma+\delta-1]$ sono poi anche contenuti i punti $B'_1 \ldots B'_\delta$, perchè si trovano rispettivamente sulle rette $A_1 B_1 \ldots A_\delta B_\delta$.

Abbiamo fatto queste considerazioni sull'omografia contenuta in $G[n-\alpha-\beta]$, quindi i punti $A_1 \ldots A_\gamma$, $B_1 \ldots B_\delta$ sono contenuti in $G[n-\alpha-]\beta$; ora procediamo. Nell'omografia contenuta in $G[n-\alpha]$, i punti $B_1 \ldots B_\delta$, $A_{\delta+1} \ldots A_\gamma$ sono punti (29) del sostegno $G[n-\alpha-\beta]$ dello spazio coniugato di $F[\beta-1]$ e quindi sono centri di prospettiva (11) di γ coppie di spazi corrispondenti S_β, S'_β passanti per $F[\beta-1]$. In ciascuna di quelle coppie di spazi scegliamo una coppia di punti corrispondenti

$$(C_1\, C'_1) \ldots (C_\delta\, C'_\delta)\, (B_{\delta+1}\, B'_{\delta+1}) \ldots (B_\gamma\, B'_\gamma).$$

I punti $C_1\, C'_1$ saranno allineati con $B_1 \ldots$ i punti $C_\delta\, C'_\delta$ con B_δ $B_{\delta+1}\, B'_{\delta+1}$ con $A_{\delta+1} \ldots B_\gamma\, B'_\gamma$ con A_γ.

I punti $A_1 \ldots A_\beta$, $B_1 \ldots B_\gamma$, $C_1 \ldots C_\delta$ determinano un $S[\beta+\gamma+\delta-1]$ e sono quindi indipendenti: in questo $S[\beta+\gamma+\delta-1]$ sono anche contenuti i punti $B'_1 \ldots B'_\gamma$, $C'_1 \ldots C'_\delta$ (*)

Finalmente nell'omografia contenuta in S_n i punti

$$C_1 \ldots C_\delta\,,\ B_{\delta+1} \ldots B_\gamma\,,\ A_{\gamma+1} \ldots A_\beta$$

sono punti (28) del sostegno $G[n-\alpha]$ dello spazio coniugato di $F[\alpha-1]$ e quindi (11) sono centri di prospettiva di β coppie di spazi corrispondenti S_α, S'_α passanti per $F[\alpha-1]$.

In ciascuna di quelle coppie di spazi scegliamo una coppia di punti corrispondenti:

$$(D_1\, D'_1) \ldots (D_\delta\, D'_\delta)\, (C_{\delta+1}\, C'_{\delta+1}) \ldots (C_\gamma C'_\gamma)\, (B_{\gamma+1} B'_{\gamma+1}) \ldots (B_\beta B'_\beta).$$

I punti D_1, D'_1 saranno allineati con $C_1 \ldots D_\delta, D'_\delta$ con C_δ, $C_{\delta+1}\, C'_{\delta+1}$ con $B_{\delta+1} \ldots C_\gamma\, C'_\gamma$ con B_γ, $B_{\gamma+1}\, B'_{\gamma+1}$ con $A_{\gamma+1} \ldots$ e $B_\beta\, B'_\beta$ con A_β.

I punti $A_1 \ldots A_\alpha$, $B_1 \ldots B_\beta$, $C_1 \ldots C_\gamma$, $D_1 \ldots D_\delta$ determinano un $S[\alpha+\beta+\gamma+\delta-1]$ e sono quindi indipendenti, questo spazio contiene anche i punti $A_1 \ldots A_\alpha$, $B'_1 \ldots B'_\beta$, $C'_1 \ldots C'_\gamma$, $D'_1 \ldots D'_\delta$, ed è quindi uno spazio unito dell'omografia che (essendo (27) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=g'$) indicheremo con $H[g'-1]$.

(*) Si dimostra come nella nota precedente.

In sostanza abbiamo trovato un certo spazio $H[g'-1]$, in cui abbiamo scelto i punti:

32. $A_1 \ldots A_\alpha$, $B_1 \ldots B_\beta$, $C_1 \ldots C_\gamma$, $D_1 \ldots D_\delta$

che determinano come spazio a cui appartengono $H[g'-1]$, e ai quali corrispondono rispettivamente i punti:

33. $A_1 \ldots A_\alpha$, $B'_1 \ldots B'_\beta$, $C'_1 \ldots C'_\gamma$, $D'_1 \ldots D'_\delta$;

e i punti corrispondenti

$$(B_1 B'_1) \ldots (B_\beta B'_\beta)\,(C_1 C'_1) \ldots (C_\gamma C'_\gamma)\,(D_1 D'_1) \ldots (D_\delta D'_\delta)$$

sono allineati rispettivamente con

$$A_1 \ldots A_\beta,\; B_1 \ldots B_\gamma,\; C_1 \ldots C_\delta .$$

Concludiamo poi facilmente che

34. « Il gruppo dei g' punti (30) venne scelto in una totalità $\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+\gamma(\gamma-1)+\delta(\delta-1)+\beta+\gamma+\delta$ volte infinita di gruppi che hanno le stesse proprietà ».

35. « In $H[g'-1]$ è contenuta un'omografia subordinata coll'unico spazio fondamentale quadruplo $F_{\alpha-1}$, quindi lo spazio $H[g'-1]$ non sega $G[n-g']$ » (*).

Lo spazio $H[g'-1]$ si chiamerà spazio *caratteristico* relativo allo spazio fondamentale $F[\alpha-1]$ o alla radice r' di $D(r)=0$. I gruppi di punti (32) e (33) si chiameranno gruppi *caratteristici* di punti dello spazio $H[g'-1]$ e le g' coppie (30, 31) di punti corrispondenti coppie caratteristiche.

36. « In $H[g'-1]$ esiste una totalità $\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+\gamma(\gamma-1)+\beta+\gamma+\delta$ volte infinita di gruppi *caratteristici* di punti ».

In $G[n-g']$ è contenuta un'omografia subordinata in cui non c'è più traccia (31) di $F[\alpha-1]$: rifacendo nello spazio $G[n-g']$ la ricerca precedente riguardo allo spazio fondamentale $F[h''_1-1]$ troveremo lo spazio caratteristico $H[g''-1]$ e proseguendo troveremo gli spazi *caratteristici* $H[g'''-1] \ldots H[g^{(\sigma)}-1]$ contenenti rispettivamente le loro coppie *caratteristiche* di punti corrispondenti.

(*) Se $H[g'-1]$ segasse $S[n-g']$ in un punto questo sarebbe unito, e dovrebbe essere un punto di $F[\alpha-1]$ il che non può essere (31).

37. « Gli spazi caratteristici $H[g'-1]\ldots H[g^{(\sigma)}-1]$ sono indipendenti e determinano quindi (25) tutto S_n ».

Ed infatti $H[g'-1]$ non sega lo spazio a cui appartengono gli altri perchè non sega (35) $G[n-g']$ in cui questi sono contenuti e medesimamente $H[g''-1]$ non sega lo spazio a cui appartengono $H[g'''-1]\ldots H[g^{(\sigma)}-1]$; ecc. $H[g^{(\sigma)-1}-1]$ non sega $H[g^{(\sigma)}-1]$.

Siccome poi i punti del gruppo (32) sono indipendenti e determinano $H[g'-1]$ si ricava:

38. « I σ gruppi caratteristici (32) relativi rispettivamente agli spazi $H[g'-1]\ldots H[g^{(\sigma)}-1]$ formano $n+1$ punti indipendenti. »

Concludendo:

39. « In un'omografia qualunque di caratteristica:

$$\left|(\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1,\ \delta-1)\ (h''_1-1,\ h''_2-1,\ldots,\ h''_{p''}-1)\right.$$
$$\left.\ldots(h_1^{(\sigma)}-1,\ h_2^{(\sigma)}-1,\ldots h^{(\sigma)}_{p^{(\sigma)}-1})\right|.$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=g',\ h''_1+\ldots+h''_{p''}=g'',\ldots h_1^{(\sigma)}+\ldots+h^{(\sigma)}_{p^{(\sigma)}}=g^{(\sigma)},$$

dove (25) $g'+g''+\ldots=g^{(\sigma)}=n+1.$

esistono σ spazi caratteristici: $H[g'-1]$, $H[g''-1]\ldots H[g^{(\sigma)}-1]$, tutti indipendenti (36) e determinanti quindi S_n.

In $H[g'-1]$ è contenuta un'omografia subordinata con un unico spazio fondamentale multiplo $F[\alpha-1]$ di caratteristica $(\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1,\ \delta-1)$.

In $H[g'-1]$ si possono scegliere g' punti indipendenti (*gruppo caratteristico*):

$$A_1\ldots A_\alpha\ B_1\ldots B_\beta\ C_1\ldots C_\gamma\ D_1\ldots D_\delta.$$

I punti $A_1\ldots A_\alpha$ sono uniti; $B_1\ldots B_\beta$ coi loro corrispondenti $B'_1\ldots B'_\beta$ sono allineati rispettivamente con $A_1\ldots A_\beta$; $C_1\ldots C_\gamma$ coi loro corrispondenti $C'_1\ldots C'_\gamma$ sono allineati con $B_1\ldots B_\gamma$; $D_1\ldots D_\delta$ coi loro corrispondenti $D'_1\ldots D'_\delta$ allineati con $C_1\ldots C_\delta$. E così riguardo agli altri spazi $H[g''-1]\ldots H[g^{(\sigma)}-1]$; si hanno allora in tutto $n+1$ coppie *caratteristiche* di punti corrispondenti ».

40. Le $n+1$ coppie caratteristiche di punti corrispondenti insieme alla condizione che in $H[g'-1] \ldots H[g^{(\sigma)}-1]$ le omografie subordinate abbiano un solo spazio fondamentale e insieme agli invarianti assoluti determinano l'omografia » (*).

Infatti: Prendiamo per vertici di riferimento $1 \ldots n+1$ rispettivamente i punti caratteristici di $H[g'-1]$: $A_1 \ldots A_\alpha$ $B_1 \ldots B_\beta$ $C_1 \ldots C_\gamma$ $D_1 \ldots D_\delta$, e poi sempre nello stesso ordine i punti caratteristici di $H[g''-1] \ldots H[g^{(\sigma)}-1]$, e vediamo se le relazioni omografiche

$$rx_1 = a_{11} y_1 + \ldots + a_{n+1\,1} y_{n+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$rx_{n+1} = a_{1\,n+1} y_1 + \ldots + a_{n+1\,n+1} y_{n+1}$$

sono determinate e che forma vengono a prendere.

Intanto osserviamo che al vertice r^{esimo} della piramide di riferimento, considerato come appartenente alla figura y, corrisponde un punto le cui coordinate sono $a_{r1}\, a_{r2} \ldots a_{r\,n+1}$; cioè sono i termini della colonna r^{esima} del modulo.

Interpretiamo i punti senza apice come appartenenti alla figura y.

Ai vertici $1 \ldots \alpha$ (che sono i punti $A_1 \ldots A_\alpha$) corrispondono i vertici $1 \ldots \alpha$, quindi tutti i coefficienti delle prime α colonne sono nulli meno $a_{11} \ldots a_{\alpha\alpha}$.

Ai vertici $\alpha+1 \ldots \alpha+\beta$ che sono i punti $B_1 \ldots B_\beta$ corrispondono i punti $B'_1 \ldots B'_\beta$ che sono in linea retta rispettivamente colle coppie di vertici $(1, \alpha+1)$, $(2, \alpha+2) \ldots (\beta, \alpha+\beta)$; dunque tutti i coefficienti, delle β colonne che seguono le α già considerate, sono nulli meno $(a_{\alpha+1,1}\; a_{\alpha+1\,\alpha+1})$ $(a_{\alpha+2,2}\; a_{\alpha+2,\alpha+2}) \ldots (a_{\alpha+\beta,\beta}\; a_{\alpha+\beta,\alpha+\beta})$; e $a_{\alpha+1,}: a_{\alpha+1,\alpha+1}$ è la coordinata del punto B' sulla retta che unisce i punti di riferimento $1, \alpha+1$. Prendendo sopra questa retta il punto unità convenientemente, il rapporto $a_{\alpha+1,1}: a_{\alpha+1,\alpha+1}$ prenderà il valore che ci piace diverso da zero; e così dicasi per $a_{\alpha+2,2}: a_{\alpha+2,\alpha+2}$, ecc. Così continueremo riguardo ai punti $C'_1 \ldots C'_\gamma$ $D'_1 \ldots D'_\delta$, ecc. Siccome poi nello spazio $H[g'-1]$ c'è un solo spazio fondamentale, l'equazione $D(r)=0$, (5) della omografia subordinata contenuta in $H[g'-1]$ deve avere una sola radice r'; quindi $a_{11} = a_{22} =$

(*) Questo teorema dà ragione della denominazione di *coppie caratteristiche*, perchè data la caratteristica dell'omografia quelle coppie possono sempre essere scelte, e viceversa date quelle coppie e gli invarianti assoluti l'omografia è determinata ed ha appunto quella caratteristica.

$\ldots = a_{\alpha+\beta+\gamma+\delta,\alpha+\beta+\gamma+\delta} = r'$, ecc. riguardo a $H[g''-1]$... Guidati da queste osservazioni troviamo facilmente che il modulo dell'omografia contenuta in S_n prende la forma seguente, dove i termini non scritti sono nulli:

(41)

Supponendo dati gli invarianti assoluti dell'omografia, vengono ad essere determinati tutti gli elementi del modulo (*), cioè riesce determinata l'omografia, e questo dimostra il (39).

(*) Dati gli invarianti assoluti dell'omografia sono determinati a meno di un fattore di proporzionalità le radici $r, r'' \ldots$ di $D(r)=0$, cioè, tutti i termini lungo la diagonale. I termini fuori della diagonale sono poi determinati perchè $\lambda_1 : r'$ è la coordinata di B_1. ecc.

Guardando alla forma del modulo si trova:

41. «Lungo la diagonale (in corrispondenza allo spazio caratteristico $H[g'-1)]$ abbiamo g' termini $=r'$, i quali costituiscono quattro gruppi; il I di α, il II di β, il III di γ e il IV di δ termini; i posti degli altri termini non nulli si scoprono facendo scorrere dal basso all'alto il II gruppo di α posti, il III di β, il IV di γ posti.

E così (in corrispondenza allo spazio $H_{g''-1}$) avremo lungo la diagonale p'' gruppi di termini $=r''$, il I gruppo di h''_1, il II di h''_2, l'ultimo di $h''_{p''}$ termini. I posti degli altri termini diversi da zero si scoprono facendo scorrere il II gruppo di h''_1 posti, il III di h''_2, ecc. (*).

42. Scegliendo il punto unità in un certo spazio ad $\alpha+h_1''+h_1'''+\ldots+h_1^{(\sigma)}-1=(27)\,g-1$ dimensioni (dove $\alpha-1$, $h_1''-1$, $h_1'''-1\ldots$ sono le dimensioni degli spazi fondamentali); i termini fuori della diagonale $(\lambda_1\ldots\lambda_\beta$, $\mu_1\ldots\mu_\gamma$, $\nu_1\ldots\nu_\delta$, ecc.) possono prendere valori prefissati arbitrari diversi da zero.

Premettiamo intanto che se si vuole che il punto unità sulla retta che unisce due punti di riferimento, sia un certo punto U prefissato, basta scegliere il punto unità di S_n sopra il piano che proietta U dallo spazio determinato da tutti i punti di riferimento meno quei due; e così volendo che i punti unità, sopra r rette che uniscono coppie di punti di riferimento, siano punti

(*) Per mezzo del (41) possiamo scrivere le relazioni fra x e y che dànno un'omografia con una data caratteristica; i vertici di riferimento sono però in posizione particolare, per averli in posizione qualunque basterà fare una trasformazione di coordinate e risolvere poi rispetto alle x. Per es.: Volendo le relazioni fra x e y di un'omologia, riferita ad una qualunque piramide di riferimento, seguendo questo metodo troviamo:

$$rx_1=(a_1b_1-r')y_1+a_2b_1y_2+\ldots+a_{n+1}b_1y_{n+1}$$
$$rx_2=a_1b_2y_1+(a_2b_2-r')y_2+\ldots+a_{n+1}b_2y_{n+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$rx_{n+1}=a_1b_{n+1}y_1+a_2b_{n+1}y_2+\ldots+(a_{n+1}b_{n+1}-r')y_{n+1}$$

dove insomma il termine $a_{ik}=a_ib_k$ per $i\gtrless k$ e per $i=k$, $a_{ii}=a_ib_i-r'$.

Le a_i sono le coordinate del piano di omologia e le b_i le coordinate del centro, se $\sum a_ib_i=0$ centro e piano sono in posizione unita.

prefissati, basterà scegliere arbitrariamente il punto unità di S_n in un certo spazio lineare ad $n-r$ dimensioni.

Ora siccome $\lambda_1 : r', \ldots \lambda_\beta : r'$, $\mu_1 : r', \ldots \mu_\gamma : r'$, $\nu_1 : r', \ldots \nu_\delta : r', \ldots$ sono le coordinate dei punti $B'_1 \ldots B'_\beta$, $C'_1 \ldots C'_\gamma$, $D'_1 \ldots D'_\delta$, ecc., se vogliamo che $\lambda_1 \ldots \lambda_\beta$, $\mu_1 \ldots \mu_\gamma$, $\nu_1 \ldots \nu_\delta$, ecc. abbiano valori arbitrari, basterà prendere i punti unità convenientemente sulle rette $(1, \alpha+1)$, $(2, \alpha+2)$, ecc., cioè scegliere il punto unità di S_n in uno spazio ad $n-(\beta+\gamma+\delta+h''_2+\ldots h''_{p''}+h_2'''+\ldots+h'''_{p'''}+$, ecc.$)=\alpha+h_1''+h_1'''+\ldots+h_1^{(\sigma)}-1=(27)\; g-1$ dimensioni.

Dai teoremi (36, 42) ricaviamo:

43. « Il gruppo degli $n+2$ punti (che scelti rispettivamente come vertici di riferimento e punto unità riducono il modulo dell'omografia alla forma (41), dove i termini fuori della diagonale hanno valori prefissati arbitrari) si può scegliere in una totalità $n+\Sigma h(h-1)$ volte infinita di gruppi dove $h-1$ sono tutti i numeri della caratteristica dell'omografia ».

Dalle definizioni di *caratteristica* e di invarianti assoluti, risulta:

44. « Due omografie proiettive hanno la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti ».

Dal teorema (43) si ricava poi:

45. « Date due omografie aventi la stessa caratteristica e gli stessi invarianti assoluti esistono $\infty^{n+\Sigma h(h-1)}$ proiettività colle quali si passa dall'una all'altra » (*).

Infatti basta scegliere nell'una e nell'altra i vertici di riferimento e il punto unità in modo che il modulo si riduca alla forma (41), allora passando dai vertici di riferimento e dal punto unità dell'una agli omonimi dell'altra si passerà dall'una all'altra.

46. Per costruire un'omografia data la caratteristica e gli invarianti assoluti basta descrivere arbitrariamente i σ spazi $H[g'-1] \ldots H[g^{(\sigma)}-1]$ e fissare in essi le coppie caratteristiche; (38) queste coppie insieme agli invarianti assoluti determinano (39) l'omografia (**).

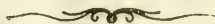
(*) Da questo teorema è facile dedurre quello di WEIERSTRASS *Sulle forme bilineari*. (V, *Omografie*, § 10).

(**) Questa costruzione di un'omografia qualunque è molto più semplice di quella di STAUDT generalizzata per lo spazio ad n dimensioni dal professor BERTINI, Nota citata.

Fissati gli spazi caratteristici e le coppie caratteristiche si determina geometricamente la corrispondenza proiettiva in S_n nel seguente modo. Sia M un punto di uno spazio caratteristico, per es. di $H[g'-1]$. Agli S_α determinati da $F[\alpha-1]$ e da ciascuno dei punti $B_1 \ldots B_\beta$. $C_1 \ldots C_\gamma$, $D_1 \ldots D_\delta$ corrispondono rispettivamente gli S'_α determinati da $F[\alpha-1]$ e dai punti $B'_1 \ldots B'$, $C'_1 \ldots C'_\gamma$, $D'_1 \ldots D'_\delta$ prospettivi o omologici ai primi rispettivamente secondo i punti $A_1 \ldots A_\beta$, $B_1 \ldots B_\gamma$, $C_1 \ldots C_\delta$. Se M è un punto di questi S_α si determina subito il suo corrispondente; se M è fuori, conduciamo per M e in $H[g'-1]$ un $S[\beta+\gamma+\delta-1]$ qualunque che incontrerà (essendo (27) $g'=\alpha+\beta+\gamma+\delta$) ciascuno di quegli S_n in un punto; trovando i corrispondenti di questi punti determineremo $S'[\beta+\gamma+\delta-1]$ corrispondente di $S[\beta+\gamma+\delta-1]$ nel quale si troverà M'. Ripetendo quest' operazione r volte troveremo uno spazio di dimensioni $r(\beta+\gamma+\delta)-(r-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-1=\alpha+\beta+\gamma+\delta-1-r\alpha$ $=g'-1-r\alpha$ nel quale dovrà trovarsi il punto M', che sarà completamente determinato quando $r \geq \frac{g'-1}{\alpha}$.

Così si determina la corrispondenza proiettiva negli spazi caratteristici.

Nello spazio, $S[g-1]$ ad $\alpha+h_1''+\ldots+h_1^{(\sigma)}-1$ dimensioni, determinato dai σ spazi fondamentali, l'omografia essendo *generale* si determina la corrispondenza, come è indicato nella nota al teorema (21).

Ciò premesso, il corrispondente di un piano $S[n-1]$ qualunque di S_n sarà il piano che contiene gli spazi corrispondenti degli spazi dove $S[n-1]$ taglia gli spazi caratteristici e lo spazio $S[g-1)$, cioè sarà un $S'[n-1]$ perfettamente determinato e determinabile.

RELAZIONE intorno alla Memoria del Dott. F. Sacco, intitolata: « *I Molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria* – Eulimidae, Pyramidellidae *e* Turbonillidae »

L'A. nella memoria, che la Classe ci ha incaricato di esaminare, continua lo studio dei Molluschi terziarii del Piemonte e della Liguria, iniziato dal compianto collega prof. L. Bellardi e in parte già proseguito dallo stesso dott. Sacco.

L'A. ha condotto questa memoria collo stesso metodo delle precedenti che vennero stampate nei volumi accademici.

Nella famiglia *Eulimidae* l'A. stabilisce due nuovi sottogeneri: *Hordeulina* e *Sulcosubularia.*

Nella famiglia *Pyramidellidae* sono nuovi i sottogeneri: *Turritodostomia* e *Cyclodostomia.*

Nella famiglia *Turbonillidae* è nuovo il sottogenere *Pyrgolampros.*

Le specie o varietà descritte come nuove sono circa un centinaio, delle quali l'A. dà le figure nelle 2 tavole unite al lavoro.

I vostri commissari osservano che la memoria del dott. Sacco è redatta con lodevole concisione e per questa ragione e pel numero delle forme nuove che l'A. fa conoscere, la credono degna di essere letta alla Classe, e, qualora questa lo approvi, di essere stampata nei volumi accademici.

T. Salvadori.
Lorenzo Camerano, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 5ª, 1891-92

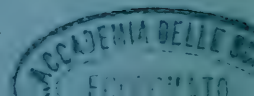
Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Gennaio 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio Direttore della Classe, Cossa, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, con parole di rimpianto il Presidente annunzia alla Classe la morte recente di tre Soci corrispondenti dell'Accademia, che furono: Ernesto von Brücke, Professore di Fisiologia a Vienna, Domenico Turàzza, Professore di Meccanica e Idraulica a Padova ed Achille De Zigno, pure dell'Ateneo Padovano. Deplora infine la perdita che gli studi di Zoologia applicata fecero recentemente nella persona del Conte Alessandro Pericle Ninni, membro dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Il Socio Camerano presenta in dono all'Accademia, a nome dell'autore Dott. Daniele Rosa, un opuscolo intitolato: *Die exotischen Terricolen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums*, estratto dagli Annali del Museo stesso.

Il Socio Segretario Basso presenta pure in dono due lavori del Professore Stanislao Vecchi dell'Università di Parma, che trattano della *Teoria geometrica* delle prospettive sopra super-

ficie curve; e poi, per incarico del Socio GIBELLI, presenta ancora una monografia del GIBELLI stesso, in collaborazione con F. FERRERO, estratto dal giornale *Malpighia* ed intitolato *Ricerche di anatomia e di morfologia intorno allo sviluppo dell'ovolo e del seme della Trapa natans* L.

Il Socio COSSA, anche a nome del condeputato Socio NACCARI, legge una sua Relazione sulla Memoria del Dott. Clemente MONTEMARTINI, intitolata: *Sull'azione dell'acido nitrico sullo zinco*. Giusta le conclusioni favorevoli di tale Relazione, la quale sarà inserita negli *Atti*, il lavoro in discorso viene prima ammesso alla lettura e poscia se ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

Vengono in seguito letti ed accolti per la inserzione negli *Atti* i tre lavori seguenti:

1° *Sugli schisti silicei a radiolarie di Cesana presso il Monginevra;* Nota del Dott. C. F. Parona, Professore di Geologia nella R. Università di Torino, presentata dal Socio Spezia;

2° *Sulle ghiandole tubulari del tubo gastroenterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa;* Nota terza del Socio BIZZOZERO, presentata dall'autore stesso;

3° *Sopra le linee uniformemente illuminate di una superficie qualunque;* Nota del Dott. Mario Pieri, presentata dal Socio BRUNO.

Infine il Socio NACCARI presenta per la consueta pubblicazione le *Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno* 1891 *all'Osservatorio della R. Università di Torino*, e calcolate dal Dott. G. B. RIZZO, Assistente all'Osservatorio.

LETTURE

Sugli schisti silicei a radiolarie di Cesana presso il Monginevra (1);

Nota del Prof. C. F. PARONA

Il professore Gastaldi nella parte seconda de' suoi *Studii geologici sulle Alpi occidentali* (2) accenna brevemente alla successione di roccie, che si osserva passando dalla valle del Chisone a Cesana per il colle di Sestrières. Dice che il colle è tagliato in un enorme orizzonte di calceschisto, il quale si estende oltre a Cesana a formare la base del M. Chaberton, racchiudendo qua e là delle lenti di serpentina e di eufotide. Osserva che una di queste masse si incontra discendendo dal colle di Sestrières verso Cesana, che vi si associa della variolite e che è coperta da un grosso banco di ftanite ematoide, la quale passa al diaspro. Anche il signor Bonney (3), a proposito della sezione del colle di Sestrières, fa cenno di questa massa di serpentina. Egli nota ad ovest, verso Cesana, il micaschisto, il quale affiora vicinissimo alla serpentina, sebbene il contatto sia celato da detrito; gli sembra che la serpentina lo attraversi come una massa intrudente. Osserva che la serpentina, dapprima molto sconnessa per compressione, si fa gradatamente normale; la ascrive al solito tipo alpino e la descrive come roccia nero-verdognola, contenente cristalli di bronzite e di bastite e somigliante alla serpentina lacertina; aggiunge che la roccia diventa molto brecciata dal lato est della massa e che è accompagnata, in rapporti oscuri, da uno

(1) Ved. *Cenno preventivo* nei Rend. d. R. Ist. Lombardo, Adun. 18 giugno, 1891.

(2) Mem. d. R. Comit. Geol., vol. 2°, 1874, pag. 28.

(3) F. G. Bonney, *Notes on two Traverses of the Cristalline Rochs of the Alps*. Quart. Journ. of the Geolog. Society. 1889, vol. XLV, pag. 81.

schisto verde compatto, qua e là di colore rossiccio, cui succede il calceschisto. Egli non parla della sviluppatissima formazione ftanitica, associata agli schisti verdi.

La massa serpentinosa, della quale fanno parola i due autori citati, costituisce precisamente il fianco meridionale del M. Cruzeau (m. 1716), là dove la valle della Ripa da Bousson piega a nord verso Cesana; essa si erge scoscesa, nuda e nera per modo che riesce facile il vederla anche a distanza.

Percorrendo la strada che da Cesana conduce al colle di Sestrières e che gira sul fianco del M. Cruzeau, io osservai, a partire dal punto nel quale la morena lascia scoperta la serpentina, le seguenti roccie, la cui determinazione io devo alla cortesia dell'amico Dr. Brugnatelli, il quale si propone di compiere e di pubblicare uno studio particolareggiato sopra di esse.

1. Oficalce scagliosa, brecciata, varicolore, assai alterata. Tanto all'esame macroscopico che al microscopico risulta costituita di serpentino, calcite e fibre di amianto Nel serpentino al microscopio si osservano dei granuli di un minerale fortemente birifrangente, che per l'angolo di estinzione sembra essere un pirosseno. Vi è pure abbastanza diffusa la magnetite in granuli e cristalli.

2. Serpentina compatta: dei diversi campioni raccolti alcuni hanno color verde scuro e sono ricchi di lamine di diallagio e di bastite, altri, più scuri, hanno aspetto più compatto ed omogeneo. Al microscopio mostrano tutti la *Balkenstructur*, caratteristica dei serpentini derivati dai pirosseni e la *Maschenstructur*, la quale indicherebbe, che la roccia in parte può essere derivata da olivina; come elementi principali, oltre il serpentino, presentano il diallagio in grande quantità, la bastite e l'iperstene. È inoltre molto frequente il ferro titanato, sempre accompagnato da leucoxeno e vi si osservano delle plaghe di calcite; nei campioni più omogenei la magnetite ed il ferro titanato sono abbondantissimi.

3. Alla serpentina si sostituiscono improvvisamente ed irregolarmente degli schisti silicei rossi, compatti, assai contorti e pieghettati, con interstrati diasprigni. All'esame microscopico risultano più o meno ricchi di avanzi di radiolarie e constano essenzialmente di quarzo in granuli minutissimi: sparse qua e là nella massa sonvi delle plaghe di calcite ed in grande abbondanza dei microliti allungati secondo una dimensione, isolati op-

pure associati in fascetti e ciuffetti; sono trasparenti, fortemente birifrangenti con estensione parallela e di colore leggermente giallognolo. Il dott. Brugnatelli non crede finora di potersi pronunciare con sicurezza circa la natura di questi microliti, il cui aspetto gli ricorda però molto l'epidoto.

In tutta la massa è estremamente diffusa la limonite, che dà il colore alla roccia. Nelle sezioni della varietà diasprigna si osservano delle vene di opale ed in quelle dei campioni provenienti dal contatto colla serpentina e cogli schisti verdi seguenti si nota abbondante sostanza cloritica e dei ciuffetti di glaucofane (1). Questi schisti silicei fanno gradatamente passaggio agli:

4. Schisti verdi e rossi abbastanza potenti e come gli schisti silicei assai contorti; essi furono già esaminati da Bonney (2) ed il dott. Brugnatelli così descrive i campioni da me comunicatigli. Sono caratterizzati dalla presenza di numerosi noduletti subsferici od ellittici, di colore verde chiaro, rossigno o grigio. La roccia somiglia ad una spilosite, ma non ha la composizione data dagli autori per questi prodotti di metamorfismo di contatto degli schisti colle diabasi. Al microscopio si osserva che sono costituiti, come gli schisti silicei, da quarzo in granuli minuti: vi è molto abbondante la calcite granulare e in larghe plaghe e la clorite; vi si notano pure delle plaghe di materia isotropa di colore verde chiaro. Immensamente diffusi sono poi i microliti già riscontrati negli schisti silicei: i nodoletti sopra citati sono formati dall'accumularsi di questi microliti in forma di anelli, la cui parte centrale è, come la base della roccia, di granuli di quarzo, cui si associano la magnetite e laminette di oligisto, assai diffusi in tutta la roccia (3).

---

(1) Il dott. Greim, al quale io comunicai diversi campioni di questa roccia, gentilmente mi scrive che uno di essi è della stessa composizione e struttura dei Kieselschiefers di Hausberg, Löhnberger Weg presso Weilburg, già da lui descritti (Dott. G. Greim, *Beitrag zur Kenntniss des Kieselschiefers.* Verhandl. d. Physik.-Med. Gesellsch. z. Würzburg, XXIV Bd., n. 7. 1891).

(2) Bonney, Mem. cit., Append., pag. 103.

(3) Questi schisti verdi si collegano evidentemente con quelli, che si ritrovano salendo da Cesana al forte di sbarramento presso Clavières. Gastaldi (Loc. cit.) dice che quivi la strada taglia un banco di serpentino eufotico qua e là variolitico, con spalmature di ematite speculare ed epidoto, cui seguono lenti di gesso e di corniola. Già Lory (Bull. d. l. Soc. géol. Franc., 2. sér., t. XVIII, pag. 769, 1861) e De Vignet (*Note sur un coupe*

5. La serie degli schisti è poi disturbata da intrusioni di una roccia varicolore brecciata e con grosse varioliti. È una diabase con struttura porfirica, molto compatta di color bruno-verdastro. Qua e là disseminati porfiricamente si osservano dei cristalli bianchi o leggermente verdi di feldispato. Al microscopio la pasta si mostra microfanero cristallina e composta di listerelle di plagioclasio e di augite e tra queste della calcite e delle lacinie di clorite. Gl'interclusi sono costituiti da un plagioclasio colla caratteristica geminazione polisintetica secondo la legge dell'albite, alla quale si associa frequentemente quella di Carlsbad. Il plagioclasio è alquanto alterato e tra i prodotti di alterazione si notano la calcite e l'epidoto. Fra i varii campioni alcuni presentano la caratteristica facies variolitica.

Il Gastaldi accennò alla presenza di eufotide lungo la strada da Sestrières a Cesana ed il prof. Sismonda quivi raccolse diversi campioni di questa roccia, che si conservano nel Museo geologico di Torino. Percorrendo la stessa strada io osservai numerosi ciottoli e massi erratici di eufotide, senza riuscire però a rintracciarne l'affioramento.

6. Segue il calceschisto, costituito quasi intieramente da calcite e da quarzo granulare; vi si associano come elementi secondari l'ortose, qualche rara laminetta di muscovite e la pirite. Un campione quivi raccolto dal prof. Sismonda si presenta formato da quarzo granulare, da glaucofane in ciuffetti raggiati, da muscovite, da un pirosseno incoloro (salite?) da epidoto e rutilo in piccola quantità.

7. Compreso nel calceschisto si osserva più avanti un ammasso di oficalce tipica, costitutita essenzialmente da calcite e serpentina: nella massa è abbondantemente diffusa la magnetite in cristalli microscopici (1).

---

des calcaires du Briançonnais, Bull. Soc. Géol. Franc. 2. sér., t. XXIII, 1866, pag. 182, pl. IV) avevano riscontrate queste roccie verdi, situate tra i calcoschisti e le *cargneules* ed i gessi e le avevano considerate come una facies particolare dei calcoschisti stessi.

(1) L'ing. Zaccagna (*Sulla Geologia delle Alpi occidentali*. Boll. Comit. Geol., 1887, vol. 8. pag. 387) riscontrò nel versante francese, al di là del M. Salza, delle roccie verdi, che si presentano in condizioni molto simili, Nota che la serpentina di queste masse, identica a quella eocenica, ha ancora comune con essa l'associazione di eufotide, di oficalci, di ftaniti con identici

*
* *

Contrariamente a quanto pensava Gastaldi, il quale riteneva azoiche le sopradescritte roccie, comprendendole nella sua zona delle *pietre verdi*, il Lory sostenne e persistette nell' opinione, che una gran parte delle roccie formanti questa zona potesse essere ascritta al Trias (1).

Queste idee di Lory non furono accettate da Baretti (2), il quale negò che i calceschisti, non solo, ma anche le carniole, i gessi ed i calcari del Chaberton potessero essere triasici. Egli li ritenne assai più antichi ed accennò alla identità di questi calcari con quelli di Levone, Rivara, Issiglio, Vidracco, Lessolo e Montaldo al piede delle Alpi Graie, che sono accompagnati da schisti argillosi, ftaniti, grovacche e diaspri.

Successivamente (3) ravvisò nelle roccie cristalline recenti della valle di Susa superiore, quali le enormi masse di calceschisti, colle serpentine, eufotidi variolitiche e schisti amfibolici, i rappresentanti dei terreni di Lessolo, Levone e riconfermò la identità delle ftaniti di Cesana e del Monginevra con quelle di

---

caratteri litologici. Anche la diabase, che trovasi nelle vicinanze inserita nel calceschisto, è identica a quella eocenica ed ha con questa la particolarità di fornire colla decomposizione delle masse sferoidali. Non di rado nelle masse testacee della roccia in decomposizione trovasi una crosta variolitica identica a quella della massa del Mont Genèvre. Osserva inoltre (pag. 388) che la diabase e l'eufotide, da cui le serpentine superiori sembrano avere origine, hanno l' apparenza di roccia eruttiva, poichè presentano una conformazione in masse grossolanamente ovoidali disposte senza regolarità fra gli strati. — Queste analogie risultano evidenti anche dalle osservazioni di dettaglio raccolte dall'ing. Lotti (*Descriz. geolog. dell'isola d'Elba*, 1886. Roma, pag. 75 sulle roccie ofiolitiche eoceniche dell'isola d'Elba e sui loro rapporti colle ftaniti e coi diaspri.

(1) Ch. Lory, *Observations sur la stratigr. des Alpes Graies et Cottiennes*, Bull. d. l. Soc. Géol. de France, 3. sér., T. I, 1872-73, pag. 278. — *Sur la constitut. et la struct. des massifs des schistes cristallins des Alpes occidentales.* Compt. rend. d. l. 4.me Sess. Congrès. Géol. Internat. Londres, 1888, pag. 86.

(2) M. Baretti, *Otto giorni nel Delfinato.* Boll. d. Club Alp. Ital., n. 20, vol. VI, 1873, pag. 24.

(3) M. Baretti, *Stud. geolog. sul Gruppo del Gran Paradiso.* Memorie Accad. Lincei, Roma, 1877, cap. IV, pag. 77, 78 e 79.

Rivara e di Vidracco. In base poi alla determinazione dei coralli del Chaberton fatta dal Michelotti, ascrisse i calcari del M. Chaberton, di Rivara, Levone, Muriaglio, Lessolo, ecc. al Siluriano inferiore, ritenendo di conseguenza spettanti al Cambriano le roccie sottoposte, grés, grovacche, quarziti, gessi, ftaniti, carniole, nel tempo stesso che il Gastaldi (1) nuovamente insisteva sull'età prepaleozoica delle serpentine.

Più tardi l'ing. Zaccagna (2) nel suo importante lavoro, che tanto giovò alla migliore conoscenza della costituzione geologica delle Alpi occidentali, ammise come arcaici i calceschisti dell'alta valle di Susa, accompagnati da amfiboloschisti, micaschisti, serpentine ed altre roccie caratteristiche della zona delle *pietre verdi*. Recentemente però giudicò come permiani gli schisti serpentinosi intercalati fra i calceschisti e la massa del Chaberton (3) e che evidentemente sono la continuazione di quelli, che al M. Cruzeau si accompagnano alle ftaniti ed alle serpentine.

Sul principio dello scorso anno il prof. Kilian (4), riferendo sui risultati di rilevamenti fatti nelle prossime Alpi francesi, propose una serie stratigrafica, concordante in gran parte colle interpretazioni addottate da qualche anno dagli ingegneri Zaccagna e Mattirolo, nella quale gli schisti lucidi e gli schisti calcareo-talcosi soggiaciono al Carbonifero. Secondo il sig. Kilian, in questi schisti che occupano vasti tratti fra Bardonnèche, Oulx e Cesana e nel Queyras, si rimarcano dei banchi di calcare cristallino nerastro e delle numerose intrusioni di serpentine. Più recentemente poi ebbe a dichiarare, che gli schisti calcareo talcosi del Queyras sono anteriori al Permiano e che al presente nulla autorizza ad attribuirli ad una età determinata della serie paleozoica (5).

---

(1) B. Gastaldi, *Sui rilevamenti geologici fatti nelle Alpi piemontesi durante la campagna del* 1877 (Lett. a. Q. Sella). Accad. d. Lincei, 1878, serie 3ª, vol. 2.

(2) Zaccagna D. *Sulla Geologia delle Alpi occidentali.* Boll. d. Comit. geol. 1887, vol. 8, pag. 377 e 388.

(3) Bertrand, *Sur le schistes lustrés du Mont Cenis.* Bull. d. l. Soc. géol. de France, Avril 1891, nota a pag. 883.

(4) W. Kilian, *Contributions à la connaissance géologique des chaînes alpines entre Moutiers* (Savoie) *et Barcellonette* (Basses-Alpes). *Terr antér. au jurassiq.* — Compt. Rend. Paris, 5 Janvier, 1891.

(5) W. Kilian, *Note sur l'histoire et la structure géolog. des chaînes alpines de la Maurienne, du Briançonnais et des régions adiacentes.* Bull. d. l. Soc. Géol. de France, 3. Sér., T. XIX, 1891.

Anche il dott. Diener (1) osservò, che la base del M. Chaberton è costituita da una potente massa di calceschisti, con inserzioni di pietre verdi e, egli dice, di quarziti, cui fanno seguito dei grès antracitosi, grovacche, gessi, quarzite e besimaudite: tutte roccie che assegnerebbe al Permiano. Della sovrastante massa calcare, la parte inferiore attribuisce al Trias e la superiore alla Creta, basandosi sui fossili quivi scoperti e, come già dissi, risultati dapprima siluriani al Michelotti e poi, secondo Neumayr, riconosciuti cretacei da Meneghini.

Ora il rinvenimento di fossili negli schisti silicei, così strettamente connessi colle serpentine, e cogli schisti verdi, conferma definitivamente, che queste roccie non possono essere ascritte all'azoico. In rapporto poi al posto, che loro spetta nella serie fossilifera, converrà innanzi tutto ricordare, che anche nelle Alpi Marittime le serpentine sono associate a talcoschisti ed a calceschisti. Questi schisti furono ritenuti dapprima, dal prof. Taramelli (2), più antichi del Carbonifero e risultarono poi allo Zaccagna (3) riferibili al Trias inferiore od alla parte superiore del Permiano. Agli stessi schisti seguono e sono associate delle quarziti, che si ritengono rappresentanti del Trias inferiore, alle quali sovrastanno in stretto rapporto dei calcari a lastre, marmorei, brecciati, carniolici (fossiliferi a Villanova di Mondovì (calcare di Esino), che sono certamente triasici (4).

---

(1) C. Diener, *Das Gebirgsbau der Westalpen.* Wien, 1891, pag. 18.

(2) T. Taramelli, *Relaz. di una seconda gita nelle Alpi Marittime per lo studio dei Serpentini in rapp. colle formaz. fossilif. quivi recentem. scoperte.* Boll. d. Soc. Geol. Ital.; vol. I, 1882.

(3) D. Zaccagna, *Sulla costituz. geolog. delle Alpi Marittime.* Boll. d. Comit. Geolog., XV, 1884, pag. 168.

(4) La triasicità di queste serpentine fu ammessa anche dal prof. De-Stefani, il quale, contemporaneamente allo Zaccagna, scriveva (*Sulle Serpentine italiane.* Att. d. R. Ist. Veneto, vol. II, ser. VI, 1884, pag. 9) « Secondo le descrizioni del Taramelli riterrei che a questa medesima età (Trias) rispondessero almeno in massima parte le serpentine delle Alpi Marittime, le quali certo continueranno in molti luoghi delle Alpi occidentali » — Anche lo scrivente (*Valsesia e Lago d' Orta*, Att. d. Soc. Ital. di Sc. Nat., Milano, 1886, vol. 29; cap. IV) seguendo il Gerlach, accettava le idee di Favre e di Lory, ed ascriveva al Trias le serpentine del Col d'Olen colla multiforme serie degli schisti verdi e cogli schisti lucidi che la accompagnano. — È noto che nei Pirenei (Gastaldi, Mem. cit., 1874, pag. 11-16) le ofiti sono frequentemente accompagnate da gesso, da carniola e da calcare dolomitico; il Virlet d'Aoust le ascrisse al Muschelkalk, mentre il Noguès ammise parec-

Nella Liguria occidentale, inferiormente ai calcari dolomitici, del M. S. Carlo, del M. Torbi e della Mod del Gazo sopra Sestri Ponente, riferiti al Muschelkalk, la roccia predominante è la serpentina antica, compresa tra i calceschisti, i quali non di rado penetrano nel calcare in piccole zone interstratificate. A questi schisti succedono quarziti ed anageniti, le quali talvolta trovansi subito al di sotto del calcare. Questa formazione ofiolitica cogli schisti concomitanti fu considerata nel 1884 come spettante al Trias inferiore dal Prof. Issel e dall'Ing. Mazzuoli (1); ora però gli ingegneri Mazzuoli e Zaccagna credono di doverla riferire al gruppo arcaico (2).

Nel Canavese affiorano in più luoghi dei calcari molto simili a quelli ora ricordati e giacciono sulla serpentina, la quale, secondo quanto ha rilevato il prof. Issel (3), è superiore agli argilloschisti, alle ftaniti ed ai diaspri. Lo stesso prof. Issel, che scoprì le radiolarie nelle roccie diasprigne del Canavese, prima ch'io le rinvenissi in quelle dell'alta Dora Riparia, mi scriveva recentemente, che le argille, gli schisti, le ftaniti e i diaspri di Baldissero, essendo sottostanti ai calcari dolomitici del Trias e intimamente collegati alle arenarie rosse del *Bunter*, appartengono verosimilmente al Trias inferiore; quanto alla lherzolite, crede che potrebbe essere posteriore, ma non più antica (4).

---

chie fasi d'eruzione dal Trias o dal Lias all'Eocene inferiore. Più recentemente il Dieulafait (*Étude sur les roches ophitiques des Pyrénées*, Ann. d. Sc. géol., Paris 1884. T. 16, pag. 72) osservò invece, che le roccie ofiolitiche nei Pirenei mostrano una prima manifestazione importante nel Siluriano e Devoniano, poi una seconda nei terreni rapportati generalmente al Permiano e al Trias e che in nessun punto esse oltrepassano l'orizzonte del Trias superiore. — Secondo lo stesso autore (*Les serpent. et les terr. ophiolith. de la Corse*, *leur âge*. Compt. rend., Accad. Sc., Paris, 1883, t. 97, pag. 811) gli schisti ardesiaci, che comprendono tutti i depositi ofiolitici della Corsica, appartengono al Trias inferiore o al Permiano. Bertrand e Killian (*Mission d'Andalousie; Trembl. de Terre*, 1884 ecc., Accad. de France, t. 30, 1889) descrivono dicchi e filoni d'ofite nel Trias, Lias e Creta d'Andalusia.

(1) L. Mazzuoli ed A. Issel, *Nota sulla zona di coincidenza delle formazioni ofiolitiche eocenica e triasica della Liguria occidentale.* Boll. Com. Geol., 1884.

(2) Issel e Squinabol, *Note esplicative della Carta Geologica della Liguria e territ. confinanti.* Genova, 1891, pag. 22.

(3) Issel A. *Della formaz. lherzolitica di Baldissero nel Canavese*, Boll. d. Comit. Geolog., 1890.

(4) L'analogia fra le roccie del Canavese e quelle dei dintorni di Cesana, già notata dal prof. Baretti, mi risulta confermata anche dall' esame della

Ritornando al Chaberton, troviamo che mancano le arenarie e le quarziti in corrispondenza dell'affioramento degli schisti verdi e rossi della casa cantoniera, oltre il ponte della Dora, lungo l'ascesa da Cesana al forte di sbarramento e che evidentemente, ripeto, costituiscono il proseguimento ad ovest di quelli associati agli schisti silicei e diasprigni del M. Cruzeau. Essi si adagiano sui calceschisti arcaici, secondo l'opinione già ricordata di Zaccagna e paleozoici, anteriori al Permiano, per Kilian, di età quindi non corrispondente a quelli, che nelle Alpi Marittime si associano alle quarziti ed alle serpentine e che si ritengono triasici o permiani. Sono poi coperti da lenti di cargnole e di gessi, alle quali succede la gran massa dei calcari dolomitici. Come i calcari del Gad d'Oulx e del Colle des Acles, questi del Chaberton furono dal prof. Portis ascritti al Muschelkalk inferiore, se non nel complesso, in parte (1); ed il prof. Kilian li riferisce pure al Trias, insieme alla soggiacente zona delle *cargneules* e colle quarziti (2).

Ammesso il riferimento al Trias di queste *cargneules* e di questi gessi (3), parrebbe di poter ascrivere allo stesso periodo

---

collezione di roccie del prof. Sismonda, (R. Museo Geologico di Torino). Vi sono due serie di campioni, l'una di Vidracco e l'altra di Montalto ed in tutte e due, secondo l'ordine indicato dal prof. Sismonda, troviamo questa successione, dal basso all'alto: *Schisti verdi e diaspro rosso*, *arenaria rossa*, *calcare brecciato e calcare grigio scuro.* — Erratici di diaspri si riscontrano anche più ad occidente del Malone ed io ne tengo un pezzo, favoritomi dall'ing. Mattirolo, che lo raccolse alla casa Vigada presso Corio. — Ciottoli di diaspro si rinvengono nei conglomerati elveziani delle colline di Torino, da Superga a Casalborgone e nel conglomerato di Cà Nuova presso Rivalba, questi diaspri sono associati a massi arrotondati e per lo più colossali di assai svariate roccie cristalline, fra le quali notai frequentissima la lherzolite ed un granito rosso affatto identico a quello di Belmonte.

(1) PORTIS A., *Nuove località fossilifere in Val di Susa.* Boll. Comit. Geol., 1889, vol. X, pag. 182.

(2) W. KILIAN, Not. cit., 1891.

(3) Volendo accennare a confronti colla serie triasica d'altre regioni alpine, questi gessi potrebbero forse corrispondere a quelli, che nelle Alpi centrali coronano la serie del Trias inferiore; ad ogni modo tanto i gessi del Chaberton, quanto le arenarie del Canavese, per la loro situazione immediatamente sottostante a calcari, che per dati paleontologici si riferiscono al Muschelkalk inferiore, sono da ritenersi corrispondenti ai gessi e alle arenarie rosse del Trias inferiore lombardo-veneto (*Servino*, *Werfener-Schiefer*) anzichè alla formazione gessifera permiana (piano dei calcari a *Bellerophon*) ed alle arenarie di Groden (piano del Verrucano). — Secondo il prof. KILIAN (*Sur la structure du massif de Varbuche* (*Savoie*), Chambéri, 1891, pag. 10;

i sottostanti schisti verdi e rossi e gli schisti silicei e diasprigni, che quivi sembrano sostituire le quarziti, e considerarli come indipendenti dai calcoschisti. Non disconosco però io stesso, che questo riferimento non è del tutto giustificato per la mancanza di fossili caratteristici e per la stessa incertezza di confine tra le roccie permiane e triasiche.

È noto infatti che le quarziti, le quali rappresenterebbero, come già dissi, il Trias inferiore sono talvolta così intimamente connesse colle besimauditi, che si ascrivono al Permiano (*anageniti*, *appenniniti* — Suretta-Gneiss, Verrucano) da rendere, come osserva l'ing. Zaccagna (1), difficile il segnare fra esse una esatta linea di separazione. Di più non bisogna trascurare il fatto, che a Brémont le quarziti triasiche riposano sopra schisti verdi e rossastri e che sopra i laghi di Marinet le quarziti formano uno scaglione corrispondente ad una zona di schisti similmente verdi, qua e là chiazzati di rosso vinato, che verso est si disperdono fra le anageniti permiane (2).

Non mi consta però che queste roccie schistose corrispondano effettivamente a quelle, che accompagnano gli schisti silicei di Cesana.

Io ne dubito, perchè è difficile l'ammettere dei rapporti di associazione o di interstratificazione di un deposito di mare profondo con roccie, quali sono le anageniti e le quarziti, che ci si presentano come formazioni a *facies* torrenziale o lagunare più o meno profondamente modificate da metamorfismo dinamico. Mentre non trovo contraddizione nel ritenere, che agli schisti rossi, verdi e silicei di Cesana, succedano regolarmente i calcari dolomitici del M. Chaberton, di formazione decisamente marina, considerando le *cargneules* ed i gessi, che quivi ed altrove si trovano alla base della massa dolomitica, di origine secondaria e prodottisi per fenomeni di soluzione e di trasformazione chimica sui calcari stessi (3).

---

nota) i calcari, le dolomie ed i gessi del Chaberton corrispondono ai calcari ed alle dolomie a Gyroporelle e Diplopore del luganese e le quarziti ai gres (Werfener-Schiefer) della stessa regione.

(1) Zaccagna D., Mem. cit., 1887, pag. 57.

(2) Zaccagna D., Mem. cit., 1887, (Sez. attraverso le Alpi Cozie; terr. stratificati) pag. 46.

(3) Secondo il De Stefani (*Sull' origine dei Diaspri.* Proc. verb. Soc. Tosc. di Sc. Nat., 1879, maggio; *Le Roccie eruttive dell'Eocene Sup. nell'Appennino.* Boll. d. Soc. Geol. Ital., VIII, 1889, pag. 261), il Fuchs (Jahrb. f.

Se non è assolutamente accertata l'età triasica di tali schisti, resta però dimostrato il loro carattere di sedimenti marini dal rinvenimento di avanzi di rizopodi. Se poi consideriamo che nel Canavese la lherzolite e la serpentina, come osservò il professor Issel (1), non si trovano sotto, ma sopra alle roccie diasproidi ed agli schisti, che loro fanno seguito e se io non erro, nel ritenere la serie degli schisti del M. Cruzeau disturbata dalla serpentina, che si presenta coll'apparenza di massa eruttiva, allora si può inoltre ritenere che la serpentina stessa o meglio la roccia da cui deriva per alterazione non sia più antica del Trias (2).

Min. Geol. u. Pal. 1883, II Supl., pag. 561) e anche il GREIM (*Beitrag z. Kennt d. Kieselschiefers*, 1891, pag. 30-33) gli schisti silicei si devono ritenere come formazioni di mare profondo, per il fatto che contengono numerose spoglie di radiolarie. D'altra parte però è opportuno ricordare, che il prof. PANTANELLI (*Radiol. negli schisti silicei di M. Catini in Val di Cecina.* Proc. verb Soc. Tos. Sc. Nat., 1885, marzo, pag. 169) non ammette la formazione di queste roccie alla profondità di 4000 a 5000 m., osservando la loro vicinanza ad arenarie ed a strati litorali; egli è propenso a ritenerli depositati a profondità minori, che essi in origine contenessero, colla radiolarie, anche le foraminifere e che la scomparsa di queste ultime possa essere attribuita ad eccesso di acido carbonico dipendentemente dall'emersione delle serpentine. Infatti i rapporti di giacitura dei tripoli di Sicilia dimostrano possibile la formazione di depositi ricchissimi di radiolarie a poca profondità marina e in un sistema lagunare (BALDACCI, *Descrizione geol. dell' isola di Sicilia*, Roma, 1886).

(1) ISSEL. Not. cit., 1890, pag. 3.

(2) La loro emersione verrebbe a corrispondere, secondo la cronologia delle eruzioni proposta dal DE LAPPARENT (*Traité de Géol.*, 1885, pag. 1294), al *periodo melafirico*, che si sarebbe esteso dal Permiano al Trias. — Analogamente il prof. TARAMELLI (*Il terremoto ligure del* 23 *febbr.* 1887. - Roma, 1888. Estr. Ann. dell'Uff. centr. di Meteor. e di Geodin., pag. 33) pensa, che lo sviluppo delle roccie serpentinose antiche equivalga a quello che, all'incirca nella stessa epoca ed a non grande distanza, presentarono i porfidi quarziferi ed amfibolici dell'Estérel, delle Alpi Pennine e del bacino ticinese. Anche COLE e GREGORY (*The Variolitic Rochs of Mont Genèvre.* Quart. Journ. of the Geolog. Soc. XLVI n. 182, 1890, pag. 331) dicono che le roccie eruttive del M. Ginevra sono, probabilmente post-carbonifere. — Sull'età delle serpentine devo tuttavia ricordare che il prof. KILIAN (*Struct. géol. des Chaines alpines*, 1891. Bull. Soc. géol. d. France, pag. 625), ritenendo almeno paleozoica l'età degli schisti lucidi, crede che le serpentine, le varioliti e le eufotidi che li attraversano, senza raggiungere il Trias autentico, non possano, fino a nuova prova, essere considerate triasiche. A questo riguardo è assai probabile che nuovi fatti concludenti possano essere scoperti in seguito a particolareggiato rilievo del M. Chaberton; interessante montagna che, come osserva giustamente, il prof.

* * *

Gli schisti rossi silicei contengono una grande quantità di radiolarie, le quali, sfortunatamente sono in gran parte conservate in modo così imperfetto e furono tanto sformate dalle azioni meccaniche e chimiche subite dalla roccia, da non prestarsi ad una determinazione nemmeno generica. Non ho mancato di verificare, se mai gli schisti contenessero dei noduli , come quelli nei quali le traccie di questi rizopodi si presentano più rispettate, ma non mi venne dato di trovarne.

Ebbi modo però di constatare, ch'essi sono in generale meno sciupati laddove la roccia assume un carattere diasprigno. Ho esaminato un gran numero di sezioni sottili e disegnai colla maggiore diligenza le forme, che, avendo il contorno abbastanza conservato o presentando qualche indizio dei caratteri ornamentali, poteva credere determinabili. In generale rimane il solo contorno, mentre di rado si osservano traccie della elegante ornamentazione caratteristica e le radiolarie si manifestano come macchie trasparenti ed incolori, sul fondo rosso-intenso e ben poco trasparente della roccia.

I ciuffi cristallini (epidoto?) assai copiosi nella rocisa ed ai quali già accennai, si riscontrano in qualche raro caso nell'interno delle radiolarie.

Nell'esaminare le figure raccolte mi fece meraviglia la poca diversità sia dei generi , come delle forme specifiche di questa fauna in confronto di quella da me rinvenuta nei noduli calcareo selciosi di un calcare giurese (1). Non potendo assolutamente ammettere per giuresi i descritti schisti fossiliferi di Cesana, mi rivolsi all'autorità del dottor Rüst, l'autore delle splendide monografie sulle radiolarie della Creta e del Giura e che sta ora preparandone un' altra su quelle del Trias e dei terreni paleo-

---

Kilian (l. cit., pag. 618) reclama sollecite ricerche , anche per risolvere la questione sull' età degli strati , d' onde provennero i fossili che Michelotti giudicò per paleozoici e che poi, secondo Neumayr (Dentschr. d. k. Akad. d. Wiss., math.-nat. Cl. Bd. XL, 1880, pag. 404) sarebbero stati riconosciuti per cretacei dal Meneghini.

(1) Parona, *Radiolarie nei noduli selciosi del calcare giurese di Cittiglio presso Laveno*, 1890. Boll. d. Soc. Geol. Ital., vol. IX.

zoici; gli comunicai i miei disegni, qualche sezione sottile, e lo informai della situazione stratigrafica della roccia in discussione.

Il dott. Rüst ebbe la gentilezza di correggere parecchie delle mie determinazioni generiche e specifiche, di constatare la cattiva conservazione delle forme e quindi la scarsità di quelle determinabili: m'avvertì inoltre, che non aveva riscontrato specie di radiolarie proprie di terreni più antichi del Giura e che l'abbondanza delle Euchitonidi e delle Theosyringie poteva lasciar sospettare, che si trattasse della fauna di un orizzonte corrispondente agli strati ad Aptici.

Sorpreso da questa risposta, continuai nell'esame di altre sezioni sottili, senza riuscire a trovare forme, che permettessero di confermare colla scorta della paleontologia gli apprezzamenti fatti con criterî stratigrafici sulla posizione degli schisti a radiolarie.

Poichè è assai improbabile, se non impossibile, che si possano dimostrare più recenti del Trias inferiore queste roccie, deve recare a tutta prima meraviglia la copia di forme, non dirò caratteristiche, ma particolarmente abbondanti in terreni più recenti, quasi si trattasse di una precomparsa di forme. Tale precomparsa però dobbiamo ritenerla più apparente che reale e dovuta innanzi tutto alla conoscenza troppo imperfetta di questa fauna, la quale, come già dissi, è in minima parte riconoscibile, sicchè non è improbabile, che fra gli altri siano andati perduti appunto i rappresentanti di quei tipi, che il signor Rüst ritiene proprii dei terreni più antichi (1). Dobbiamo anche aggiungere, che troppo poco finora si conoscono le radiolarie fossili, e specialmente dei periodi pregiuresi, per lasciar sperare che questi rizopodi prestino criteri veramente attendibili per fissare l'età delle roccie che li contengono. Infatti lo stesso dott. Rüst riconosce che è impossibile, date le odierne cognizioni paleontologiche sulle radiolarie, indicare uno sviluppo successivo e la

---

(1) Ho cercato di stabilire un confronto fra la fauna di queste roccie diasprigne e quelle dei diaspri affatto simili, che nell'Appennino accompagnano le serpentine di Rovegno nel Bobbiese e di Bardi nel Piacentino, senza poter riuscire a constatare una sicura differenza di forme, probabilmente perchè anche in queste roccie appenniniche le reliquie organiche non risultano meglio conservate di quelle dei diaspri alpini.

trasformazione di un tipo inferiore a un tipo più elevato in organizzazione, partendo dagli strati più antichi per venire a quelli più recenti (1).

Anzi si ritiene, che fino al presente non si conoscano sostanziali differenze fra le radiolarie fossili e le viventi e che certe forme mesozoiche non siano diverse dalle attuali (2).

Giudicando dunque più apparente che reale questo disaccordo fra la stratigrafia e la paleontologia, presento senz'altro l'elenco delle forme riscontrate e che sono figurate nella tavola, che correda la presente nota (3).

Fig. 1. *Cenosphaera gregaria*, Rüst.
» 2. *Cenosphaera clathrata*, Par.
» 3. *Cenosphaera pachiderma*, Rüst.
» 4. *Cenellipsis* f. n.
» 5. *Cenellipsis macropora*, Rüst.
» 6. *Cenellipsis* f. n.
» 7. *Cenellipsis jaspidea*, Rüst.
» 8. *Trochodiscus* sp.
» 9. } *Trochodiscus?* sp.
» 10. }
» 11. } ? *Stylotrocus*, *Spongotrochus*.
» 12. }
» 13. ? *Druppocarpus* sp.
» 14. } *Ellipsidium* sp.
» 15. }
» 16. } *Lithopium* sp.
» 17. }

---

(1) Rüst, *Geolog. Ausbreitung der Radiolarien* (Jahresb. Naturhist. Gesel. Hannover) 1888; ved. Ann. Géol. Univ., Dagincourt, T. V, pag. 1233.

(2) G. Steinmann u. L. Döderlein, *Elem. der Paläontologie*. Leipzig, 1890, pag. 44.

(3) Pantanelli, *I Diaspri della Toscana e i loro fossili*. Accad. d. Lincei 1880. — Rüst, *Beiträge zur Kenntniss der fossilen Radiolarien aus Gesteinen der Jura* (Palaeontogr. XXXI, Bd.) 1885. — *Beiträge zur Kennt. d. foss. Radiol. a. Gest. der Kreide* (Pal., XXXIV Bd.) 1888. — Parona, *Radiol. nei noduli selc.* ecc. 1890.

32
29.
34
33.
30.
24
46.
37
39
44

Lit. Bruni-Pavia

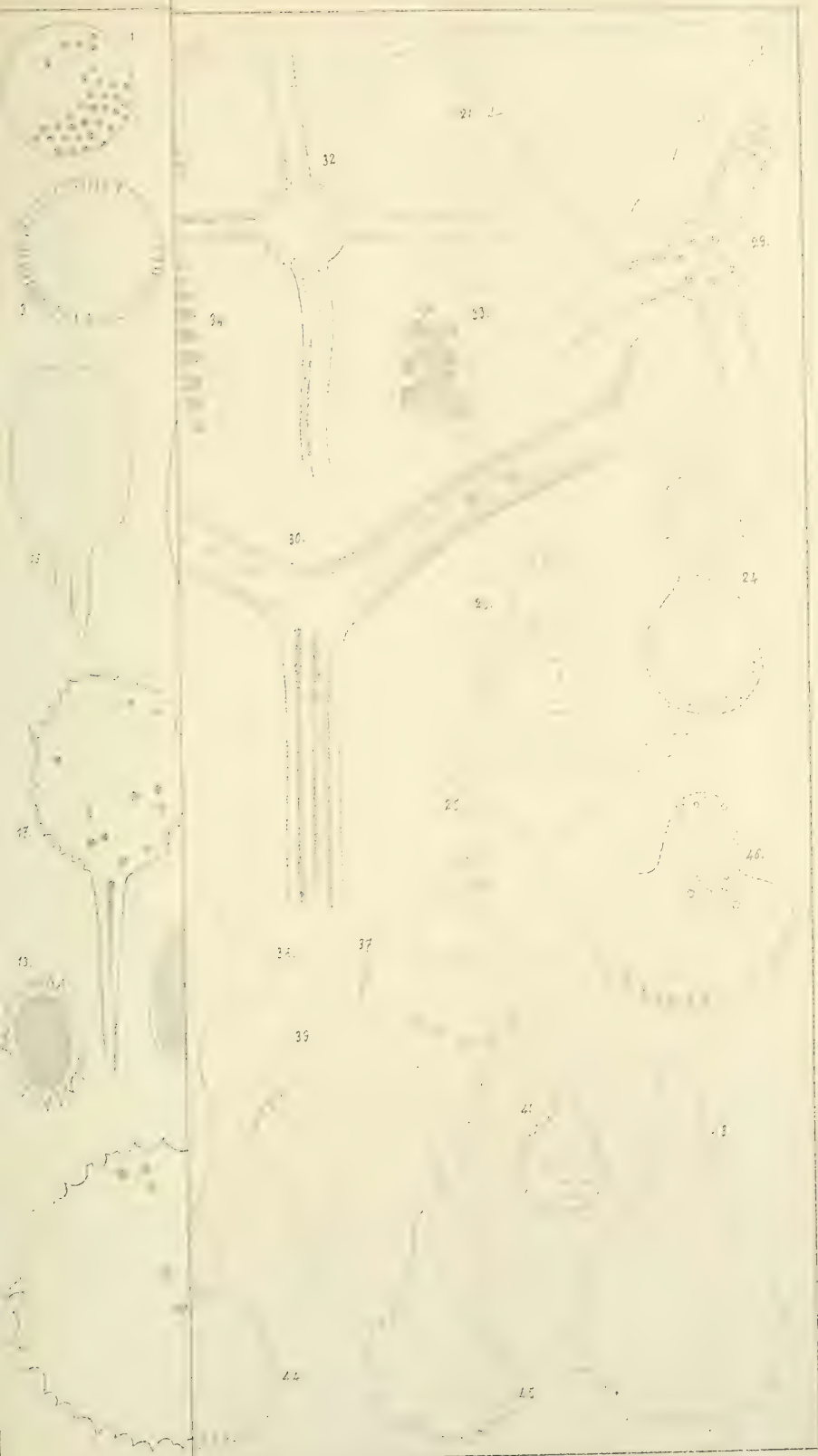
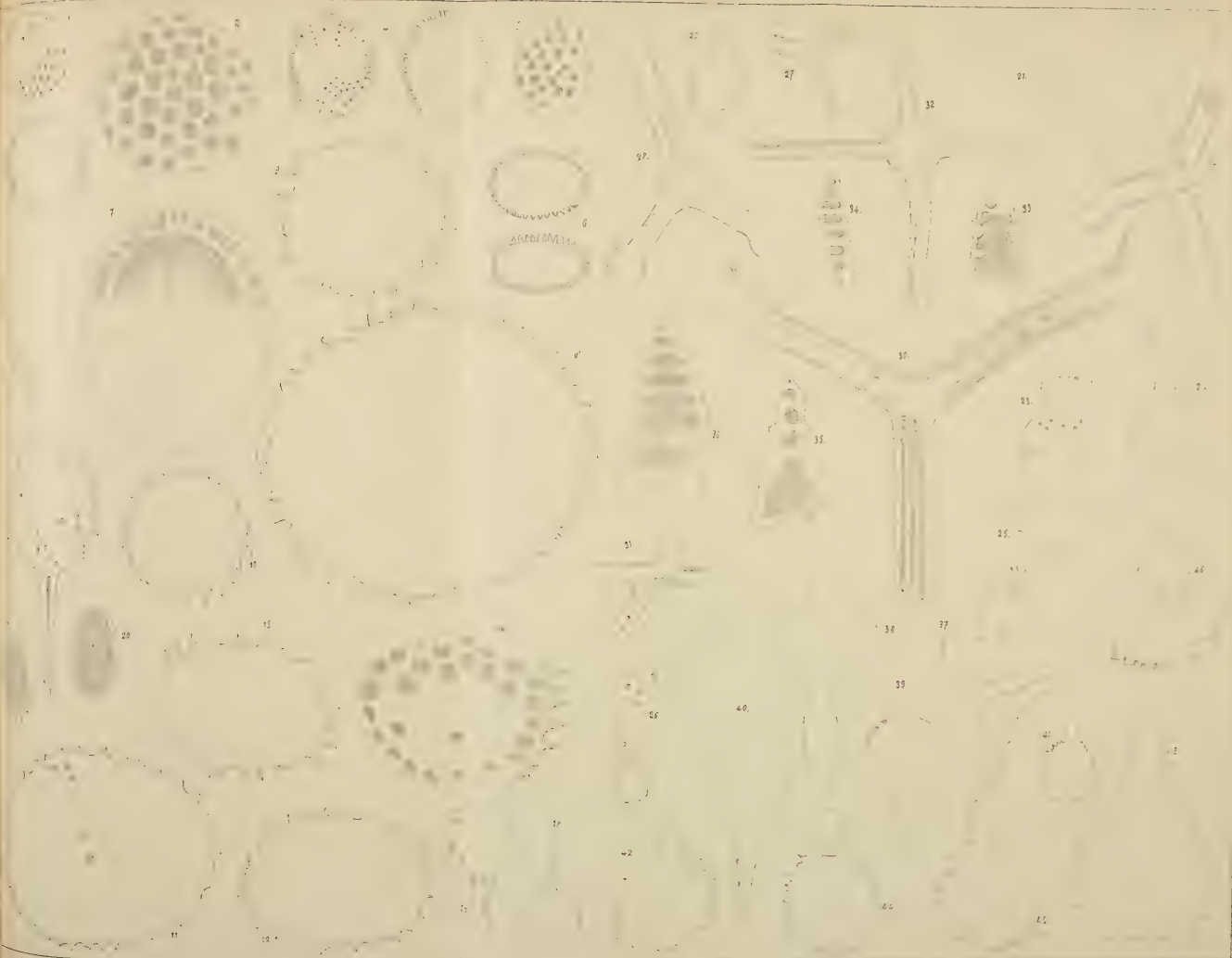



Fig. 18. } ? *Xiphostylus* sp.
» 19. }
» 20. *Druppula* sp
» 21. *Spongotripus pauper*, Rüst.
» 22. *Sethocapsa* sp.
» 23. } *Dicolocapsa* sp. ?
» 24. }
» 25. *Trigonocyclia trigonum*, Rüst.
» 26. *Rhopalastrum* sp. ?
» 27. }
» 28. } *Rhopalastrum* sp.
» 29. }
» 30. *Dictyastrum* sp.
» 31. *Hagiastrum* sp.
» 32. *Hagiastrum* cfr. *egregium*, Rüst.
» 33. } *Dictyomitra ? cretacea*, Rüst.
» 34. }
» 35. *Dictyomitra Haeckelii*, Pant.
» 36. *Dictyomitra* cfr. *nerinea*, Rüst.
» 37. }
» 38. }
» 39. } *Theosyringium* sp.
» 40. }
» 41. }
» 42. } *Sethocapsa* sp.
» 43. }
» 44. *Sethocapsa ? cometa*, Pant.
» 45 ? *Stichocapsa* sp. o *Cyrtocapsa* f. n.
» 46. *Dicolocapsa* f. n.

Sulle ghiandole tubulari del tubo gastro-enterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa;

Nota Terza
del Socio Prof. G. BIZZOZERO

Ghiandole del duodeno del topolino grigio.

Fu con vivo interesse che incominciai lo studio di queste ghiandole, poichè certe particolarità, già da tempo conosciute nella loro struttura, dovevano mettere alla riprova la solidità della mia teoria sulla origine dell' epitelio intestinale.

Paneth (1), infatti, fino dal 1887 aveva trovato che nel fondo cieco delle ghiandole tubulari del *mus musculus* e del ratto esistono delle cellule contenenti dei granuli grossi e lucenti, le quali stanno disposte fra le cellule dell' epitelio ghiandolare e possono considerarsi esse pure quali elementi secernenti. Orbene, quali sono i rapporti che corrono fra questi e gli elementi secernenti sostanza mucosa? Com'è che queste cellule, descritte da Paneth, si trovano in quella parte della ghiandola, in cui, secondo la mia opinione, suol trovarsi il focolaio di rigenerazione dell'epitelio intestinale?

A queste domande aveva già cercato di rispondere Paneth; ma le sue ricerche non ebbero, rispetto ad esse, risultato soddisfacente. Egli venne soltanto alla conclusione, che queste cellule a granuli sono affatto distinte e diverse dalle cellule mucose.

Ecco, infatti, in breve com'egli (2) le descrive: « A fresco, su preparazioni ottenute raschiando la mucosa, si constata che i granuli sono discretamente rifrangenti, meno, però, che il grasso. La loro grossezza è variabile, il più delle volte superiore a quella

(1) Paneth, *Centralbl. f. Physiol.*, 1, p. 255, 1877, e *Arch. f. mikr. Anat.* vol. XXXI, 1888.
(2) *Arch. f. m. Anat*, vol XXXI, p. 178.

dei granuli mucosi delle cellule caliciformi del topo e anche del tritone. Nelle ghiandole ci sono sovente parecchie cellule a granuli, e sovente ancora una o due soltanto. Talora non c'è che pochi granuli in una cellula. — L'azione su di essi dei diversi reattivi è la seguente: L'acqua e la potassa non li attaccano; nella potassa essi si raggrinzano alquanto, e diventano più rifrangenti. L'etere li scioglie lentamente, al pari dell'alcool. Gli acidi diluiti li sciolgono rapidamente, ed essi non ricompaiono più quando si neutralizzano gli acidi colla potassa. L'acido osmico li conserva bene, e loro dà una tinta brunomogano. Si colorano vivamente coll'eosina, ematossilina, safranina, verde di iodio, e la colorazione resiste alla lavatura nell'alcool più tenacemente che quella dei nuclei. Di più, essi non modificano la tinta della materia colorante, e perciò si distinguono dai granuli delle cellule caliciformi, che sono anche più piccoli. Col verde di iodio diventano azzurro-turchese, mentre le cellule caliciformi appaiono verde-oliva, colla safranina diventano rosso di robbia, mentre le cellule caliciformi o sono omogene e appena colorate, ovvero sono riempite di granuli rosso-giallastri . . . . Raramente si vede una cellula caliciforme colla sua teca panciuta nelle vicinanze del fondo delle ghiandole, ma in tal caso la differenza fra essa e le cellule a grani è evidente . . . . Le cellule a grani debbono considerarsi come una specie particolare di elementi ghiandolari differenti dalle cellule caliciformi. Il prodotto di secrezione elaborato da esse ha caratteri morfologici e chimici diversi da quelli dei grani delle cellule caliciformi . . . . Non si conosce alcuna regione nei mammiferi ove si trovino elementi analoghi. . . . . Nella più parte delle sezioni dell'intestino del topo il fondo della maggioranza delle ghiandole è riempito di cellule a grani, fra le quali si trovano delle cellule epiteliali ordinarie. Si trovano altresì delle ghiandole nelle quali non c'è che una cellula contenente grani, o delle cellule contenenti grani piccoli e poco numerosi, disposti nella porzione della cellula rivolta verso il lume della ghiandola. Gli elementi del fondo cieco possiedono dei grani più voluminosi che quelli degli elementi situati più in alto. . . Non v'ha dubbio che le cellule a grani derivino dalle cellule epiteliari. Si trovano tutte le transizioni fra queste e quelle. Ma che avviene di esse?. . . » A questa domanda le osservazioni di Paneth non permisero di dare una risposta soddisfacente.

Nè migliori risultati ebbero le ricerche più recenti di Ni-

colas (1), intraprese con metodi più perfezionati e cogli obbiettivi più perfetti che ora si posseggano. Egli constatò l'esistenza delle cellule di Paneth non solo nell'uomo, nel topo e nel ratto, ma ancora nel pipistrello e nello scoiattolo; accertò, contro la opinione di Paneth, ch'esse contengono sempre un nucleo; vide alcune particolarità di struttura de' grani, e notò che alcune cellule epiteliali contengono uno o due corpi (*enclaves*) sferici o semilunari, in parte colorabili colla safranina, e simili a quei corpi che da parecchi vennero descritti in altre porzioni dell'epitelio intestinale di altri animali. Egli ritiene probabile che le cellule, quando siano diventate piene di grani, li svuotino nel lume ghiandolare, e per un po' di tempo rimangano coll'aspetto di cellule strette e fortemente colorabili; ma poi tornino a secernere grani nel loro protoplasma, per scaricarsene di nuovo nel lume della ghiandola, e ripetere così, per un periodo per ora non determinabile, il loro ciclo secretorio. Queste cellule non avrebbero, quindi, neppure secondo Nicolas, un rapporto qualsiasi colle cellule mucose; esse secernono un prodotto speciale, figurato, di cui non si possono precisare nè la composizione chimica, nè la funzione.

Dopo questa esposizione si comprende facilmente per qual ragione io fossi desideroso di conoscere per mie proprie osservazioni i rapporti che hanno fra loro le cellule di cui si è tenuto discorso. Ecco i risultati delle mie ricerche (2):

Le ghiandole duodenali del topolino (fig. 1ª) sono corte, sicchè anche ad assai forte ingrandimento possono essere comprese in un sol campo del microscopio. Il che naturalmente facilita la comparazione degli elementi che le tappezzano. Sono rettilinee, o appena sensibilmente incurvate, ed hanno l'estremità profonda leggermente claviforme. Sono applicate strettamente l'una contro l'altra, e quindi il connettivo interposto è scarsissimo.

Delle tre specie di cellule che le tappezzano (protoplasmatiche, mucose e a granuli), le *protoplasmatiche* presentano quelle

---

(1) Nicolas, *Journal international d'Anatomie et de Physiol.*, 1891, v. VIII, pag. 1.

(2) Per l'indurimento sono a preferirsi la soluzione acquosa concentrata di acido picrico, tanto raccomandata da Paneth (immersione per 2 giorni nella soluzione, lavatura per 1 giorno nell'acqua, alcool), e i liquidi di Flemming e di Hermann (immersione in essi per 1 o 2 giorni, lavatura nell'acqna corrente per 1 giorno, alcool).

stesse modificazioni che abbiamo notato nelle ghiandole tubulari precedentemente studiate. Nel fondo cieco (fig. 1ª *a*) mostrano il nucleo ovale spinto nella parte più profonda della cellula: i contorni di questa sono meno distinti, e la sua estremità libera è limitata da una linea di contorno sottile. — Venendo più in su nella ghiandola, un po' prima della sua metà comincia ad apparire all'estremità libera un palese orlo striato, che va rapidamente ingrossando (fig. 1ª *b*), fino a diventare, prima ancora che la ghiandola sbocchi, quasi eguale a quello che riveste la superficie dei villi. Anche qui, adunque, non si può dire che l'orlo striato distingua l'epitelio del villo da quello delle ghiandole. — I nuclei restano basali in tutta la ghiandola; è soltanto alla base dei villi che cominciano a portarsi verso il mezzo delle cellule; nel tempo stesso diventano un po' più piccoli e più rotondeggianti, e la loro sostanza cromatica si colora più tenacemente colla safranina.

Quanto al protoplasma, io non ho trovato differenze notevoli, come, p. es., quelle che esistono nelle ghiandole rettali del coniglio. Tanto nelle ghiandole quanto sui villi esso appare come una finissima rete, con trabecole a direzione prevalentemente longitudinale (rispetto all'asse della cellula). Naturalmente, nel dir ciò io prescindo dai casi in cui l'intestino stia assorbendo del grasso, poichè in questi casi il protoplasma delle cellule della superficie libera ne è riccamente provvisto, mentre ne manca quello delle ghiandole (1).

La grandezza delle cellule, al solito, aumenta alquanto. Nella fig. 2ª io ho messo a raffronto alcune cellule del fondo cieco ghiandolare (*A*) con altre tolte dalla metà superiore di un villo (*B*). Queste ultime sono alquanto curvate dalla pressione che su di esse si esercita dal basso; ma ciò non è costante, e, d'altra parte, la forma generale della cellula muta assai a seconda dello stato di contrazione del villo, della presenza od assenza di goccioline di grasso nell'epitelio, e di altre condizioni che non ci interessa di studiare. Le cellule del fondo cieco ghiandolare avevano (in preparati induriti in liquido di Hermann)

---

(1) Ciò si accerta facilmente in preparati induriti in liquido di Flemming, passati in alcool e poi in olio di cedro, sezionati in paraffina, e passati in silolo, in alcool, e alfine conservati in glicerina. Le gocciole adipose, annerite dall'osmio, si conservano benissimo.

una lunghezza di 15-20 μ, una larghezza di 4, 5 μ; quelle del villo erano lunghe in media 24 μ, larghe 6-8 μ.

Quanto alle *cellule mucose*, il loro numero è relativamente assai scarso. In molte ghiandole (su sezioni di 5 μ di spessore) se ne vedono 2-3; in non poche non se ne vedono affatto; in poche sono 4 o più, fino a 7 od 8. — Per quanto spetta alla loro posizione, non si trovano mai o quasi mai nel fondo cieco ghiandolare. Cominciano di solito ad una certa distanza da esso (fig. 1ª *c*), e si continuano, succedendosi a lunghi intervalli, per tutta la ghiandola, e, poi, per tutta la superficie libera della mucosa, fino verso l'estremità dei villi. — Hanno forma di calice piuttosto allungato.

La loro porzione superficiale è occupata dalla sostanza mucosa; la profonda, invece, dal nucleo, che non è nè schiacciato contro la membrana ghiandolare, nè sottile e lungo come è in altre ghiandole. Il nucleo è di solito ovale, circondato da scarsissimo protoplasma, e differisce poco, all'aspetto e per la posizione, da quello dell'epitelio protoplasmatico vicino. — Anche nei villi le cellule mucose conservano la forma allungata; però il nucleo (fig. 2ª *B*) si porta un po' più verso il mezzo della cellula; il protoplasma aumenta di volume, circondando il nucleo ed occupando tutta la parte profonda della cellula; la sostanza mucosa, invece, appare come un grosso blocco che occupa la estremità libera allargata della cellula, e ne fuoresce per continuarsi col muco contenuto nel lume della ghiandola.

La sostanza mucosa, quando sia esaminata in ghiandole fresche (1), senza liquido d'aggiunta, o dilacerate da pochi istanti in liquido di Müller, appare sotto forma di fini granuli sferici, piuttosto pallidi (fig. 4ª *a*).

Questa struttura però, come succede di solito anche nelle altre ghiandole, si perde facilmente sotto l'influenza dei liquidi che aggiungiamo ai tessuti per indurirli, esaminarli, ecc. Paneth ha osservato che i granuli si conservano quando per l'indurimento si adoperi l'immersione prolungata per un giorno o più nell'acido picrico, ed io posso confermare la sua osservazione, ed aggiungere che una conservazione anche migliore si ha indurendo col liquido di

(1) Nell'animale appena ucciso l'epitelio aderisce tenacemente alla superficie della mucosa e della membrana delle ghiandole; per ottenerlo sarà bene usare animali uccisi da un paio d'ore.

Hermann. Però, sì con quello che con questo la struttura granulare non appare egualmente bene in tutte le cellule; in alcune è appena accennata, in altre la sostanza mucosa ha acquistato aspetto omogeneo, senza che si possa rilevare la ragione della differenza.

La sostanza mucosa, nei pezzi induriti con alcool od acido picrico, ingiallisce fortemente sotto l'influenza di una soluzione acquosa di safranina. Il colore, però, si perde aggiungendo, per conservare il preparato, della glicerina od anche la soluzione di zucchero. Si riesce a conservarla in preparati all'acido picrico, aggiungendo una soluzione di zucchero già previamente colorata colla safranina.

Nei pezzi induriti col liquido di Flemming, e, meglio ancora, con quello di Hermann, la sostanza mucosa si colora elegantemente coll'azzurro di metilene o colla ematossilina, mentre tutte le altre parti del tessuto restano scolorate. È specialmente questa reazione, come vedremo, che mi servì alla soluzione del quesito che m'ero proposto.

Per ultimo, per quanto spetta alle *cellule di Paneth*, da principio mi pareva che la conclusione mia non potesse esser diversa da quella cui erano arrivati i miei predecessori in questo studio. Queste cellule, sia per la loro forma, che per la grossezza, la disposizione, la forte rifrangenza, e le reazioni dei loro granuli, mi parevano affatto diverse dalle cellule mucose. Senonchè uno studio più approfondito mi dimostrò, che tra una forma cellulare e l'altra esistono sempre graduate forme di passaggio, sì che venni condotto man mano alla ferma convinzione che le cellule di Paneth non sono che la forma giovane delle cellule mucose.

Ciò appare con diversissimi metodi di preparazione. Se, ad es., esaminiamo sezioni sottilissime di ghiandole indurite in liquido di Flemming, colorate con safranina (1) e chiuse in damar, a tutta prima sembra che tra le cellule di Paneth e le mucose non vi sia nulla di comune. Quelle (fig. $1^a c$) sono a base assai larga, spesso piramidali; il loro nucleo è disposto trasversalmente alla base dell'elemento, e presenta un contorno fatto irregolare da frequenti insenature; nel loro protoplasma stanno numerosi

---

(1) È bene sciogliere la safranina in acqua di anilina; le sezioni colorate si lavano o in alcool, o in alcool picrico o in alcool cromico 1 $^{00}/_{00}$ (Martinotti).

i granuli caratteristici, rotondeggianti od ovali, vivamente colorati in rosso, e di grossezza relativamente notevole. Questa grossezza, però, non è eguale per tutti; essa, di solito, è minore in quella parte della cellula che è rivolta verso il lume ghiandolare; maggiore, invece, nella parte ove sta il nucleo. I granuli paiono sospesi in una sostanza trasparentissima, incolora; è soltanto su sezioni estremamente sottili, ed esaminate coi migliori obbiettivi che si riesce a determinare che i granuli stanno come nelle maglie di una rete protoplasmatica a trabecole sottilissime (fig. 7ª), la quale è stata ritratta con molta fedeltà in parecchie figure di Nicolas (1).

Le cellule mucose, all'incontro, hanno forma di calice (fig. 1ª *e*) privo di piede; nel fusto, relativamente grosso, sta il nucleo ovale; la cavità del calice è distesa dal muco che si presenta come una massa omogenea, colorata in roseo dalla safranina. Nessuna traccia nel muco di struttura granulare, e tanto meno di granuli fortemente colorati colla safranina.

Ma, continuando nell'esame, capitano di frequente agli occhi delle forme di passaggio Si vedono, anzi tutto, delle cellule di Paneth che (come è già stato osservato da altri) non giacciono nel fondo cieco, ma stanno più in su (fig. 1ª *c'*), magari più in su del mezzo della ghiandola. Esse, naturalmente, non hanno più forma piramidale; sono diventate più lunghe e sottili, avvicinandosi così alla forma delle vere cellule mucose; come in queste, il loro nucleo tende a disporsi parallelo all'asse più lungo della cellula. Contengono ancora numerosi granuli fortemente colorati, ma la grossezza di questi è alquanto diminuita.

Altre cellule si riconoscono ancora appartenenti alla categoria delle cellule di Paneth, a cagione dei granuli safraninofili che contengono; ma i granuli sono diventati minuti o minutissimi (fig. 1ª *d*, fig. 5ª *a* e *b*), il corpo cellulare e il nucleo hanno acquistato la forma delle parti corrispondenti delle cellule mucose, ed inoltre è avvenuta una notevole modificazione della sostanza interposta ai granuli: *questa è diventata più copiosa, ed ha acquistato la proprietà di colorarsi in roseo colla safranina precisamente colla stessa intensità del muco delle cellule mucose.*

L'ultima forma di transizione è rappresentata da cellule in tutto simili alle cellule mucose, ma che conservano ancora,

---

(1) Loc. cit., Tav. III.

sparsi nel loro muco, dei granuli estremamente fini e intensamente colorati in rosso, che sono un ricordo della loro derivazione primitiva. —

La colorazione colla safranina non è la sola che dimostri codeste particolarità.

Se delle sezioni indurite in liquido di Flemming vengono colorate colla vesuvina, le cellule mucipare spiccano fra le interposte cellule protoplasmatiche per la maggiore omogeneità e rifrangenza del loro contenuto mucoso, e pel colorito più intenso che gli venne impartito dalla vesuvina. Or bene, quelle cellule mucipare che stanno più nel profondo delle ghiandole, presentano spesso, sparsi nel loro muco, dei granuli brillanti affatto simili, per la rifrangenza e la nettezza dei contorni, a quelli che stanno nelle cellule di Paneth, dai quali differiscono soltanto pel minor diametro.

Figure ancora più eleganti e persuasive si hanno colorando le sezioni con azzurro di metilene o con ematossilina, che colorano assai poco i nuclei, mentre colorano intensamente la sostanza mucosa. La fig. 3ª è tratta da un preparato colorato coll'azzurro di metilene. Vi si scorgono le cellule di Paneth *a a* che stanno nel fondo cieco. Più in su si vedono due cellule *b b* della stessa specie, ma che contengono dei granuli più piccoli, massime in vicinanza dell'estremità libera della cellula; la sostanza che sta fra questi granuli minuti ha già acquistato un colore azzurro simile a quello caratteristico della sostanza mucosa. Finalmente in *c* si vede la sezione ottica obliqua di una cellula che, quantunque presenti ancora dei granuli estremamente minuti, tuttavia, per l'aspetto e la colorazione della sostanza interposta ai granuli, per nulla si distingue dalle vere cellule mucose.

Avuti questi risultati, io ho voluto tentare di ottenerne la controprova, usando della reazione gialla che presenta il muco quando le sezioni di pezzi induriti nell'alcool o nell'acido picrico vengano trattate con soluzione *acquosa* di safranina. Preferii le sezioni indurite coll'acido picrico, perchè questo, meglio dell'alcool, fa spiccare i contorni cellulari; disposi le sezioni sotto il coproggetti, immerse in una goccia d'acqua, ed a questa sostituii una soluzione acquosa concentrata di safranina. — Il risultato non poteva essere più favorevole. Dopo una mezz'ora si ottiene il differenziamento completo: i granuli delle cellule di Paneth appaiono di colore rosso vivo, come il protoplasma ed il nucleo, e la sostanza interposta ad essi è incolora, o di una tinta appena leg-

germente giallognola; le cellule mucipare perfette sono, invece, distese da una gocciola omogenea di sostanza mucosa rigonfiata e colorata in giallo; fra quelle cellule e queste, poi, vi ha una serie di forme di passaggio, rappresentate da cellule il cui secreto contiene dei granuli rossi che diventano sempre più piccoli, immersi in una sostanza che diventa sempre più copiosa e intensamente colorata in giallo (1).

Con questi varî metodi, adunque, io aveva messo in evidenza degli elementi di transizione fra le cellule di Paneth e le cellule mucose, i quali, prescindendo dalle altre modificazioni, presentano questa particolarità, che il loro secreto è costituito da granuli che presentano le reazioni dei granuli di Paneth, immersi in una sostanza che presenta, invece, quelle della sostanza mucosa. Questa sostanza intergranulare mi era di solito apparsa di aspetto omogeneo; non mai, neppure coll'indurimento coll'acido picrico, aveva veduto ben evidente in essa quella struttura granulare, che appunto l'acido picrico conserva nel muco, se non di tutte, di un certo numero di cellule mucose. È chiaro come fosse importante per me di riconoscere questa struttura granulare, perchè ciò sarebbe riuscito un altro ed importante argomento per accertare la natura mucosa della sostanza in discorso.

Raggiunsi il mio intento usando, per l'indurimento, il liquido di Hermann. Se sezioni sottilissime (meno di 5 μ di spessore) di pezzi in tal modo induriti si colorano coll'ematossilina e si esaminano a forte ingrandimento, si vede (fig 6 *a*) che la colorazione azzurra si è fissata esclusivamente sul secreto delle cellule mucose — tutte le altre parti del tessuto sono rimaste incolore — e che questo secreto consta di granuli sferici o alquanto poliedrici per reciproca pressione, a contorno poco marcato, e di grossezza sensibilmente eguale in una stessa cellula. Per ottenere questo risultato è necessario che la sezione sia estremamente sot-

(1) Potei conservare questi preparati usando di una soluzione acquosa concentrata di zucchero, colorata colla safranina. In questi preparati, che conservo da più di un anno, si vede che in non poche cellule di Paneth i granuli hanno assunto un colore rosso-giallo, mentre nelle altre sono sempre di color rosso vivo; il che dimostra che anche i veri grani di Paneth non sono sempre eguali fra loro. Ciò viene confermato anche nei preparati induriti in liquido di Flemming o di Hermann, colorati con safranina, e passati in alcool, olio di bergamotto e balsamo: la colorazione aderisce assai più tenacemente ai granuli piccoli che ai grossi.

tile, che l'obbiettivo sia ottimo e ad immersione omogenea, e che la luce sia viva; se la luce naturale è debole, le si sostituisca la luce artificiale. Se non si hanno queste condizioni, la struttura granulare non sempre appare, perchè, avendo i granuli un contorno poco marcato, i loro contorni non appaiono, e il blocco mucoso fa l'impressione di una massa azzurra omogenea. La colorazione violetta è più vivace, e i granuli sono più distinti nelle cellule mucose delle ghiandole, che in quelle della superficie dei villi. Coll'ematossilina i granuli delle cellule di Paneth rimangono incolori.

Se, invece, al trattamento coll'ematossilina si fa precedere la colorazione colla safranina (1), allora si ottiene una doppia colorazione: i granuli delle cellule di Paneth (così come i nuclei, massime quelli in mitosi) acquistano un color rosso brillante, mentre i granuli dei blocchi mucosi diventano di colore azzurro. Orbene, se in questi preparati si esaminano i blocchi di secreto di quelle cellule che dissi di transizione, *si vede che constano di due sorta di granuli*: di granuli *violetti*, fra cui stanno disposti dei granuli di vivace color *rosso*. Quantunque i primi abbiano contorni poco marcati, ed i secondi siano minutissimi, tuttavia, esaminando con un obbiettivo omogeneo apocromatico e con larga apertura dell'apparecchio Abbe, la differenza di colore dei granuli appare spiccatissima (fig. 6 *b*).

Queste osservazioni dimostrano, adunque, che le cellule di Paneth *rappresentano forme giovani di cellule mucose.* Esse secernono dei granuli grossi, lucenti, safraninofili, che versano nel lume della ghiandola. Invecchiando, continuano per un certo

(1) Le sezioni sottilissime si fissano sul coproggetti per mezzo di una soluzione tenuissima d'albumina, e si liberano dalla paraffina col silolo, e da questo coll'alcool assoluto. Poi il vetrino si mette a nuotare su di una soluzione tenue di safranina (8 goccie di soluzione acquosa concentrata di safranina in 1 gr. di acqua) raccolta in un vetro da orologio, si fa scaldare fino a che comincino a svilupparsi vapori, indi si lascia a sè per un paio d'ore. Successivamente: lavatura per alcuni *m''* in alcool assoluto, immersione in ematossilina per 15 *m'*, lavatura di alcuni *m''* nell'acqua distillata, passaggio per alcuni *m''* in alcool acidulato con *HCL* (0,5 %), infine lavatura per alcuni minuti in acqua *di fonte*, passaggio per 30 *m''* in alcool assoluto, bergamotto e damar. Bisogna curare che la colorazione coll'ematossilina non sia troppo intensa, perchè in tal caso nelle cellule di transizione i finissimi granuli safraninofili non riescono visibili entro il grosso blocco colorato in azzurro.

tempo a secernere granuli di questa stessa natura, ma più piccoli; e, nel tempo stesso, secernono granuli che si colorano intensamente coll'ematossilina. In un periodo ulteriore la produzione di granuli safraninofili cessa affatto, ed il blocco di secreto è tutto costituito da granuli colorabili coll'ematossilina; la cellula è così diventata una schietta cellula mucosa. Mentre questi cambiamenti hanno luogo nell'interno della cellula, questa assume anche la forma di calice propria delle cellule mucose, e gradatamente si sposta dal fondo delle ghiandole verso il loro sbocco e, poi, fin sui villi.

Le cellule di Paneth a granuli minuti erano state vedute anche da Nicolas; ma egli le considerava come la forma giovane della cellula di Paneth, di cui la forma adulta avrebbe secreto granuli più grossi: mentre dalle mie ricerche appare, come s'è veduto, precisamente l'opposto. Una volta poteva sembrar strano il fatto che le cellule mucose, invecchiando, mutassero la natura chimica del loro secreto. Ma non può sembrar strano ora che abbiamo visto, come in tutti gli animali fin qui studiati abbia luogo, dal più al meno, una modificazione dei caratteri del muco man mano si va dal fondo della ghiandola verso il suo sbocco. Queste differenze, che abbiamo ora osservato nel duodeno del *mus musculus*, non sono certamente maggiori di quelle che ho descritto nelle cellule mucose del retto di coniglio, le quali, a seconda della loro posizione nella ghiandola, si comportano così diversamente di fronte all'acido acetico e alle sostanze coloranti. —

La produzione cellulare nelle ghiandole tubulari del duodeno di topo è attivissima: ciò viene dimostrato dalle numerose mitosi che si vedono in ogni ghiandola e che hanno attirato l'attenzione di tutti coloro che in questi ultimi anni si sono occupati dell'argomento (1). Esse stanno, di regola, nella metà profonda della ghiandola; è raro trovarne nella metà superficiale, e ancor più raro in vicinanza dello sbocco. Le mitosi cominciano nel fondo cieco; talora se ne vedono proprio all'apice del fondo cieco, comprese fra due cellule di Paneth.

Il corpo delle cellule in mitosi mi apparve sempre di aspetto protoplasmatico. A differenza di ciò che si osserva così di fre-

(1) Recentemente Reinke descrisse alcune curiose particolarità di struttura di questi nuclei in mitosi.

quente nelle ghiandole rettali del cane, non vidi nuclei in mitosi in cellule che già contenessero del muco; il che, però, non vuol dire che non ci siano.

Mucosa intestinale di animali sprovvisti di ghiandole.

Riconosciuto quale parte importante abbiano le ghiandole tubulari nella rigenerazione dell'epitelio intestinale, è ora interessante di vedere, come questa rigenerazione abbia luogo in quegli animali il cui intestino manca di ghiandole tubulari. In questo caso sono forse le cellule epiteliari della superficie libera che, nel posto stesso dove esercitano la loro funzione, si moltiplicano per mitosi?

Per la risposta a questo quesito esamineremo l'intestino di alcuni di questi animali. È necessario che l'esame sia fatto non in una, ma in alcune specie, perchè l'intestino di alcune ci presenta il processo di rigenerazione nella sua espressione più semplice; mentre quello di altre, per es. del tritone, ci dà delle figure già più complicate, e quindi può rappresentare una forma di passaggio verso l'intestino provvisto di ghiandole degli animali superiori.

Intestino del tritone.

Nell'animale adulto, misurato dallo stomaco all'ano, è della lunghezza di circa 14-18 cm. Esso non è tutto della stessa grossezza; è più grosso nella parte anteriore, dove misura (in preparati induriti in liquido di Kleinenberg ed alcool) un diametro di 2-2.5 mm., mentre nella parte posteriore ha il diametro di poco più di un millimetro. — Spaccato pel lungo, la sua mucosa non ci presenta vere villosità. Essa forma, invece, delle ripiegature (pliche) contigue l'una all'altra, e aventi diversa configurazione e disposizione a seconda della parte dell'intestino in cui risiedono. Nella parte posteriore esse sono disposte longitudinalmente rispetto all'asse maggiore dell'intestino, hanno decorso regolarmente ondulato, e i rapporti che hanno fra loro sono tali, che le convessità di una plica si adattano alle concavità delle pliche che immediatamente le stanno ai lati (fig. 8). Nella parte anteriore dell'intestino, invece, quanto più ci avviciniamo allo stomaco, il decorso delle pliche si fa irregolare, le ondulazioni si trasformano

in zig-zag, ed i zig-zag delle diverse pliche si vanno confondendo fra loro. Inoltre, nella metà posteriore dell'intestino le pliche, essendo l'intestino più sottile, sono più basse, più grosse, più avvicinate l'una all'altra, e non arrivano che ad una diecina; mentre nella anteriore sono assai più alte, sottili, e, in ogni sezione trasversa d'intestino, si scorgono nel numero di 14-16.

La mucosa intestinale è sprovvista di ghiandole tubulari. A questo riguardo io mi trovo in disaccordo con Paneth, il quale (l. c., p. 174) scrive: « Beim Triton hingegen, dessen Dünndarm sehr schöne, sogar verzweigte Krypten hat, setzt sich das Epithel unterschiedlos, mit einem sehr deutlichen Stäbchenbesatz versehen, in dieselben fort » e conferma il suo dire con una figura (l. c., fig. 7 *a*), la quale rappresenterebbe una ghiandola che, biforcandosi, terminerebbe con due fondi ciechi. Io credo che Paneth abbia bensì veduto la figura che ha disegnato, ma non l'abbia interpretata esattamente. Essa non rappresenta altro che la sezione verticale di pliche intestinali, applicate l'una contro l'altra, e che danno, così, l'apparenza d'una ghiandola. Le pliche intestinali nel loro decorso spesso si biforcano. Orbene, se si fanno sezioni nel punto in cui la biforcazione è appena avvenuta, le due pliche originanti da essa sono ancora applicate l'una contro l'altra, e simulano la sezione longitudinale di una ghiandola; mentre quanto più le sezioni si fanno lontane dalla biforcazione, tanto più le pliche si allontanano l'una dall'altra, e si rendono reciprocamente indipendenti. Credo che se Paneth avesse fatto delle sezioni in serie, si sarebbe facilmente persuaso di ciò. La figura da lui data rappresenta una plica ancor bassa, che sta sorgendo fra due assai più alte.

Il suddescritto decorrere onduloso delle pliche intestinali fa sì, che quando si fa una sezione verticale delle pareti dell'intestino, le cellule epiteliari non sono tutte sezionate longitudinalmente, come succederebbe se la mucosa avesse una superficie liscia. Anche praticando una sezione esattamente trasversale dell'intestino (fig. 9), alcune pliche sono tagliate trasversalmente, altre, invece (e sono le più numerose) sono tagliate sotto varii gradi di obliquità. Di conseguenza, anche le cellule epiteliari che le rivestono capitano assai spesso tagliate obliquamente o trasversalmente. Il che rende i preparati d'epitelio di tritone meno dimostrativi e meno chiari di quel che si supporrebbe, conoscendo la notevole grandezza degli elementi che lo costituiscono.

L'epitelio, *studiato sulla metà più alta delle pliche*, fu già oggetto di molte descrizioni (fra le più recenti cito quelle di Paneth e di Nicolas), sì che non v'è bisogno ch'io mi ci soffermi. È costituito (fig. 11 A) da grandi elementi protoplasmatici a grosso orlo striato, fra cui stanno delle cellule caliciformi. Queste ultime hanno un nucleo ovale, allungato nel senso dell'asse più lungo della cellula, e (contro quello che si osserva in altri animali) non schiacciato contro la base della cellula, ma disposto, anzi, ad una certa distanza da essa. Esso suol colorarsi un po' più intensamente dei nuclei delle cellule protoplasmatiche. Fra le cellule si vedono spesso dei leucociti (fig. 11 A) e questi possono trovarsi tanto verso la base, quanto verso l'estremità libera degli elementi. Inoltre, nell'interno di un certo numero di cellule protoplasmatiche si osservano dei vacuoli entro cui stanno (fig. 11 A) dei corpicciuoli globosi, di vario diametro, che spesso presentano parte della sostanza che li costituisce fortemente colorata dalle sostanze coloranti nucleari. Queste *enclaves* vennero recentemente descritte con molta diligenza da Nicolas, che le ritiene un prodotto speciale di secrezione delle cellule protoplasmatiche. Io, per ragioni che dirò altrove, persisto a crederle come un prodotto di disaggregazione dei leucociti migranti nello strato epiteliare, entrato successivamente nel corpo delle cellule epiteliari protoplasmatiche.

Le cellule mucose sono distribuite nello spessore dell'epitelio con discreta uniformità. Il loro rapporto di numero colle cellule protoplasmatiche si può rilevare dalle figure 10 e 12.

Le cellule che rivestono la metà alta delle pliche vi sono disposte *in un solo strato*. Non vi ha traccia di cellule di ricambio. Inoltre i loro nuclei vi si trovano tutti allo stato di riposo. Non mai ne vidi alcuno che si trovasse in mitosi. Come mai, adunque, si rigenerano questi elementi? Esiste, all'infuori dello strato epiteliare, un focolaio di loro produzione, che corrisponda alle ghiandole tubulari dei mammiferi?

Per ottenere una risposta dobbiamo studiare l'*epitelio che riveste la metà inferiore delle pliche*, e che si continua sui fornici formati dall'unirsi delle basi di due pliche vicine. Tutta questa zona d'epitelio per brevità la chiameremo *epitelio dei fornici* (fig. 12 *y*), mentre quella dianzi descritta, e che riveste la metà alta delle pliche la designeremo col nome di *epitelio delle creste* (fig. 12 *x*).

Orbene, paragonando l'epitelio di una zona con quello dell'altra, appaiono parecchie differenze.

Innanzi tutto le cellule dei fornici sogliono essere un po' più piccole di quelle delle creste, come appare dal confronto di *A* con *B* nella figura 20.

Riguardo alla costituzione delle cellule, quella delle cellule protoplasmatiche non varia gran fatto da una zona all'altra. Dappertutto il protoplasma è costituito da un fino reticolo a maglie allungate nel senso del maggior diametro della cellula, il quale spicca specialmente nei preparati all'acido picrico, safranina e zucchero. I contorni cellulari sono un po' meno spiccati nella zona dei fornici. Quanto all'orlo striato esso esiste, ed è di notevole grossezza, in entrambe le zone, perfino nelle cellule che rivestono le parti profonde dei fornici.

In complesso, fra le cellule protoplasmatiche delle due zone non esistono quelle notevoli differenze che abbiamo notato nei mammiferi fra le cellule dei fondi ciechi ghiandolari e quelle della superficie libera dell'intestino, e che consistono nella differenza di densità del protoplasma e nella mancanza dell'orlo striato. Gli unici indizi, e per verità di poca importanza, d'una maggiore giovinezza delle cellule dei fornici starebbe nel loro minor diametro, e nella minore nettezza dei loro contorni laterali.

Più spiccate, invece, sono le differenze nelle cellule mucose. Esse non riguardano tanto la forma dell'elemento quanto i caratteri del muco che esso contiene.

Il muco, negli elementi esaminati a fresco, appare in tutte le cellule sotto la forma di granuli omogenei, a contorno poco marcato. Se, invece, si tratta l'intestino coi diversi liquidi che servono per l'indurimento, si vede che il modo di comportarsi del muco varia a seconda delle cellule che si considerano, e che in molte di queste (come, del resto, abbiamo veduto anche nei mammiferi) la più parte dei liquidi suddetti tende a far scomparire la struttura granulare. Or bene, in regola generale si può dire, che questa struttura è tanto meglio conservata quanto più le cellule mucose stanno profondamente situate nei fornici, mentre facilmente scompare nelle cellule che risiedono sulle creste delle pliche intestinali. Questa differenza spicca assai bene nei preparati induriti all'acido picrico, colorati con safranina acquosa, e conservati in soluzione concentrata di zucchero (1). La cellula *b* della

(1) Il pezzo d'intestino, non aperto, venne tenuto alcune ore in liquido di Kleinenberg, poi passato per un giorno in alcool 50 %, poi per un giorno

fig. 14ª risiedeva in un fornice, e in essa (lasciando da parte le particolarità di forma su cui ritornerò più tardi) si scorge che il blocco mucoso è costituito da un aggregato di granuli ben delimitati; ancor più distinti questi granuli si vedono, sparsi ed isolati, in quella zona di protoplasma che sta fra il blocco di muco e il nucleo. — La cellula *c*, invece, è tolta da una cresta. In essa il blocco di muco è ridotto in una sostanza omogenea, nella quale si dirama un sottile ed elegante reticolo. A forte ingrandimento si accerta che le trabecole di questo limitano delle maglie circolari. Questa forma delle maglie si spiega facilmente; per l'azione dei reagenti adoperati, i granuli sferici di muco di queste cellule, impallidendo e rigonfiandosi, hanno perduto i loro contorni ed acquistato l'apparenza di una massa omogenea: ciò ha fatto apparire la sostanza che è interposta fra i singoli granuli, e che, attesa la forma sferica di questi, deve essere configurata a reticolo a maglie circolari. Non è superfluo, però, dinotare che in questi blocchi di muco rigonfiati si vedono spesso, come appunto nella cellula della fig. 14ª *c*, dei granuli che hanno conservato la loro individualità, e che assomigliano assai a quelli della cellula *b*.

Nei preparati induriti col solo alcool, oppure prima col sublimato (sublimato 2, cloruro sodico 1, acqua 100) e poi coll'alcool, la struttura granulare della sostanza mucosa si altera ancor più. I granuli si gonfiano tanto, che il reticolo interposto si spezzetta, si scompone; sicchè il blocco mucoso appare come una sostanza omogenea, sparsa di granuli irregolari che rappresentano gli avanzi del reticolo.

Anche nel tritone la migliore conservazione della struttura granulare del muco si ha nei preparati induriti col liquido di Hermann, variamente colorati, e conservati in balsamo o in damar. Qui essa si osserva tanto nelle cellule dei fornici quanto in quelle delle creste, ma anche qui fra quelle e queste c'è differenza: infatti nei fornici essa è evidente in quasi tutte le cellule (fig. 11ª *B*) ed in alcune, anzi, è evidentissima, tanto che si possono distinguere il contorno e la grossezza d'ogni granulo; sulla cresta, invece, i granuli (fig. 11ª *A*) sono non di raro accumulati in un ammasso compatto, in cui poco distintamente si posson vedere i loro contorni.

---

in alcool 70 %; infine lavato per 12 ore in acqua corrente, e, passando per la solita scala, chiuso in paraffina.

Se le sezioni di pezzi induriti in liquido di Hermann, invece di passarle nel balsamo, si esaminano senz'altro nell'acqua, si osserva un'altra differenza: nel muco delle cellule delle creste e di parte di quelle dei fornici i granuli, sotto l'azione dell'acqua, impallidiscono, e lasciano apparire il reticolo interposto; mentre in alcune cellule dei fornici i granuli permangono immutati, salvo che leggermente si gonfiano. Questi mutamenti si possono far succedere sotto i propri occhi esaminando dapprima la sezione in una goccia d'alcool, poi aggiungendo ad un lato del coproggetti una goccia d'acqua, e tenendo dietro all'agire di questa sugli elementi della sezione.

È importante, poi, di notare, che tanto in questi preparati quanto in quelli fatti coll'acido picrico, col sublimato o coll'alcool, non c'è limite netto fra le cellule di una specie e quelle dell'altra; no, ci sono numerosi stadi di passaggio dalle cellule in cui i granuli sono conservati, a quelle in cui essi si sono fusi in una massa omogenea. Questi stadi di passaggio, anzi, si possono osservare in una stessa cellula. — L'elemento rappresentato nella figura 15ª risiedeva nel fondo di un fornice ed era stato indurito col liquido di Hermann. Esaminato in una goccia d'alcool, tutto il suo muco aveva struttura granulare; aggiunta successivamente una goccia d'acqua, i granuli non si conservarono, spiccati ed isolati, che in vicinanza del nucleo, mentre quelli disposti verso l'estremità libera della cellula si fusero in una massa mucosa omogenea attraversata dal solito reticolo, in modo da distinguersi soltanto pel colore un po' più bruno (dovuto al liquido di Hermann) dal muco delle cellule delle creste.

A queste differenze morfologiche fra il muco dei fornici e quello delle creste corrispondono anche delle differenze nel modo di comportarsi sotto l'azione di diverse sostanze coloranti. Nella tabella seguente riferisco le differenze che ancora appaiono in modo spiccato nei preparati che servono di fondamento a questa mia esposizione, e che feci nei mesi di aprile-giugno 1890; differenze, adunque, che persistono da 19-21 mesi.

Metodo di preparazione	Muco giovane	Muco adulto
1. Alcool, safranina, zucchero.	Giallo castagno	Giallo zolfo.
2. Liq. di Kleinenberg, safranina, zucchero.	Giallo castagno	Giallo chiaro, quasi giallo zolfo
3. Liq. di Hermann, esame nell'acqua.	Bruniccio	Bruniccio meno intenso.
4. Liq. di Hermann, safranina, alcool cromico, alcool, damar.	Rosso solferino.....	Giallo o giallo rosso.
5. Liq. di Hermann, safranina, zucchero.	Rosso feccia di vino	Giallo castagno.
6. Liq. di Hermann, ematossilina, alcool cloridrico, damar.	Incoloro o quasi ...	Violetto intenso.

Nel raccogliere questi dati io ho considerato come muco giovane quello che ha una struttura nettamente granulare, e che più tenacemente la conserva di fronte ai reagenti; esso, come già dissi, si trova in un certo numero di cellule dell'epitelio dei fornici, specialmente nella parte più profonda di questi ultimi. Vedremo più tardi per quali argomenti io lo consideri come muco giovane. Pel muco adulto mi sono valso delle cellule caliciformi dell'epitelio delle creste.

Io ho quindi considerato due tipi estremi. Poichè anche qui mi affretto a notare, che fra questi estremi ci sono tutti gli stadi di passaggio; e così, p. es., nei preparati del numero 1 si trovano numerose cellule il cui muco, nella colorazione, presenta tutte le gradazioni dal giallo-castagno al giallo-zolfo, in quelli del n. 4 delle gradazioni dal rosso-solferino al giallo e così via.

Nella mucosa intestinale del tritone non vi sono, quindi, due specie di cellule mucose sempre e nettamente distinte l'una dall'altra per la forma e la costituzione del muco rispettivo; vi sono due forme di cellule mucose collegate fra loro da una serie di stadi di passaggio.

La descrizione che ho dato finora dell'epitelio dell'intestino di tritone, se ci ha permesso di trovare delle differenze fra le cellule protoplasmatiche e le mucose che lo costituiscono, a seconda della posizione ch'esse occupano nella mucosa, non ci ha però ancora permesso di rispondere al quesito: come si rigenerano gli elementi dell'epitelio?

Per decidere intorno a ciò si deve innanzi tutto esaminare

se fra le cellule cilindriche che rivestono l'intestino del tritone ne esistano di quelle che si presentino in via di scissione.

Orbene, nei loro nuclei non ho mai visto figure che accennassero a scissione diretta. Invece, qualche volta ho veduto delle mitosi evidentissime, che, come quelle che esistono nelle ghiandole di Galeati dei mammiferi, stanno più superficialmente che non siano i nuclei in riposo (fig. 16ª). Devo però tosto notare, che queste mitosi sono estremamente rare. Sopra quasi 500 sezioni complete di intestino di tritone che ancora conservo, e preparate in modo da dimostrare le mitosi che per avventura contenessero, non mi venne fatto di vedere che tre di siffatte mitosi. Due erano alla base d'una plica, la terza alla sua sommità. Queste scarsissime mitosi non bastano, quindi, a spiegare la rigenerazione dell'epitelio intestinale, conviene cercare altrove.

La soluzione del quesito si ha solo quando si studi la parte profonda dello strato epiteliare. E qui di nuovo troviamo differenze fra l'epitelio delle creste e quello dei fornici. Il primo è un epitelio semplice, ad uno strato solo. Il secondo, invece, ci presenta, fra le estremità profonde delle sue cellule cilindriche, altre cellule (fig. 10ª *c*) che, a seconda del punto che si considera, si presentano in vario numero. Ora, cioè, sono rare, poste ad una certa distanza l'una dall'altra (fig. 11ª *B*), ora formano uno strato quai scontinuo, o, magari, per certi tratti sono disposte a due strati.

È specialmente nell'accertare l'esistenza di questo strato di cellule profonde che conviene andare cauti, perchè, p. es., quando si fanno sezioni dirette obliquamente all'asse maggiore delle cellule cilindriche, è facile che l'inesperto abbia figure che egli interpreta come dovute ad un epitelio stratificato, anche quando si tratta di un epitelio ad un solo strato. E questa obliquità delle sezioni è, come dissi, frequente nell'intestino del tritone, a cagione delle variabilità del decorso delle sue pliche. Per togliersi alle cause di errore è quindi necessario far sezioni sottili, paragonare fra loro le diverse sezioni appartenenti ad una stessa serie, ed accertare che le cellule cilindriche sono sezionate parallelamente al loro asse longitudinale.

Nell'epitelio intestinale del tritone esistono, adunque, delle vere cellule di ricambio (Ersatzzellen); si verifica qui quanto era stato, erroneamente, supposto e descritto nell'epitelio intestinale dei mammiferi. — Ma v'ha di più. — Queste cellule di ricambio,

oltre all'occupare il posto lasciato libero fra le estremità inferiori delle cellule cilindriche, *si spingono a gruppi nel tessuto connettivo della mucosa, e vi acquistano la forma di germogli o di zaffi sottoepiteliari.*

Questi germogli sotto epiteliari (fig. 12 e 13) si mantengono sempre in rapporti di continuità collo strato epiteliare di rivestimento dell'intestino, e sono di grandezza svariatissima. — I più piccoli sono rappresentati da due o tre cellule soltanto, le quali in parte stanno ancora nell'epitelio di rivestimento, in parte interrompono la linea di limite fra l'epitelio e la mucosa, e fanno sporgenza in quest'ultima. — I più grossi constano, invece, dell'aggregazione di alcune diecine di cellule. Essi si spiccano con base larga dallo strato epiteliare; appena penetrati nella mucosa, descrivono una curva, in modo da disporsi paralleli alla superficie della mucosa, e, infine, terminano ad estremità rotondeggiante. Nel loro breve decorso essi sono separati dall'epitelio di rivestimento da un sottile straterello connettivo, nel quale non di rado si osserva qualche vaso sanguigno (fig. 13ª *c*). — Questi brevi germogli penetrano nella mucosa in direzione svariata, sicchè, in una stessa sezione trasversale dell'intestino, alcuni si vedono sezionati longitudinalmente, altri in senso trasversale (fig, 12ª e 13ª). Questi ultimi bene spesso appaiono come isolotti cellulari, completamente ravvolti dal connettivo, e non presentanti più continuazione coll'epitelio di rivestimento; sicchè a prima giunta si crederebbero isolotti epiteliari indipendenti. Ciò si comprende facilmente: la continuazione non si può scorgere che in quelle sezioni che interessano la base colla quale il zaffo si fonde al rispettivo strato epiteliare. Le sezioni in serie tolgono ogni dubbio in proposito. Quello stesso germoglio che in certe sezioni pare affatto isolato, si vede nelle sezioni successive continuarsi collo strato epiteliare sovrastante.

Il numero e la grandezza di questi germogli varia a seconda delle regioni dell'intestino. Nella parte di questo, che sussegue immediatamente allo stomaco, le cellule di ricambio sono disposte prevalentemente negli strati profondi dell'epitelio di rivestimento; i germogli sono piccoli, corti e si osservano soltanto nelle parti più profonde dei fornici, alla base delle pliche. Andando verso l'ano, invece, i germogli diventano numerosi e più lunghi, e non soltanto si spiccano da tutto l'epitelio dei fornici, ma salgono più in su, e si vedono in rapporto anche con quello delle creste; in qualche caso ho veduto dei germogli che risiedevano nella parte più alta delle pliche intestinali.

Le cellule che entrano a formare questi germogli, stando strettamente applicate l'una contro l'altra, sono irregolarmente poliedriche. Esse sono costituite da un nucleo relativamente grosso, e da una zona di protoplasma che lo circonda e che è assai scarsa, sicchè i nuclei riescono vicinissimi l'uno all'altro. I contorni cellulari sono delicati, e difficili a vedersi anche nei preparati induriti in acido picrico (fig. 13ª c''), che pur suole conservar bene i contorni degli elementi epiteliari superficiali (1).

Sulla loro natura epiteliare non vi può esser dubbio, e ciò per le seguenti ragioni: 1° Per la loro costituzione. Infatti i loro nuclei di poco differiscono da quelli delle vere cellule cilindriche; sono appena un po' più piccoli, sono rotondeggianti invece di essere ovali ed hanno un po' più sottili le trabecole del reticolo. Quanto al protoplasma, esso differisce soltanto perchè nelle cellule dei zaffi è meno compatto; sicchè, p. es., nei preparati all'acido picrico, che meglio mette in evidenza il fine reticolo protoplasmatico, quest'ultimo appare a maglie più grandi che nelle cellule dell'epitelio superficiale; esso è, tuttavia, come questo, fortemente colorato in rosso dalla safranina acquosa (nei preparati conservati nello zucchero). — 2° Pel fatto che in quei punti dei preparati, in cui i germogli sono in continuazione collo strato epiteliare, si possono vedere, disposte l'una vicina all'altra, tutte le forme di transizione dalle cellule dei germogli a quelle dell'epitelio cilindrico superficiale; si vedono, cioè, le cellule allungarsi, arricchirsi di protoplasma e mutar forma quanto più si avvicinano alla superficie dell'epitelio (fig. 13ª c'). — 3° Perchè fra gli elementi epiteliari comuni se ne vedono disposti di quelli, *che già contengono nel proprio protoplasma un gruppo di granuli mucosi*, degli elementi, cioè, che debbono considerarsi come giovani cellule mucose (fig. 13ª c e c', fig. 14ª a). Il miglior metodo per mettere in evidenza questo fatto così interessante è quello di indurire nell'acido picrico, colorare con safranina acquosa, e conservare in zucchero (2). Il contrasto fra la colorazione rossa che assume il protoplasma delle cellule epiteliari dei germogli, e il

(1) Noto di passaggio che fra le cellule di questi zaffi epiteliari si vedono non di raro dei leucociti, simili in tutto a quelli che stanno nell'epitelio di rivestimento dell'intestino.

(2) Si scelga un pezzo d'intestino nella sua porzione posteriore, perchè, come dissi, è qui che i gettoni sono più sviluppati.

colore giallo castagno del muco giovane, fa spiccare vivamente le cellule in discorso. Esse appaiono costituite da un nucleo, contro cui sta strettamente applicato un ammasso rotondeggiante od ovale di fini e fitti granuli mucosi; il protoplasma non si scorge affatto, o rappresenta soltanto una assai piccola parte della cellula (fig. 14ª *a*). In un solo germoglio si possono vedere 2, 3 e più di queste giovani cellule mucose. — Il muco ch'esse contengono è sempre sotto forma di distinti granuli, e il tono di colore di questi ultimi è eguale al tono assunto dal muco di quelle cellule cilindriche a granuli mucosi ben distinti, che noi abbiamo visto esistere nel fondo dei fornici.

Queste cellule mucipare dei germogli subepiteliari, procedendo di basso in alto insieme alle cellule protoplasmatiche che le circondano, entrano gradatamente a far parte dello strato più superficiale dell'epitelio di rivestimento. A questo scopo esse si modificano, si allungano, ed infine raggiungono con una delle loro estremità la superficie libera dell'epitelio, e, a questo modo, cominciano a eliminare i granuli mucosi che contengono. Come una di queste cellule giovani, ma già superficiali, credo di poter designare la cellula *b* della figura 14ª. Essa apparteneva già all'epitelio superficiale, ma si distingueva dalle cellule mucose adulte per ciò, che il suo blocco mucoso era relativamente piccolo ed era separato dal nucleo da un lungo tratto di protoplasma, nel quale si notava qua e là qualche granulo mucoso isolato.

La dimostrazione del vivace processo di rigenerazione, che ha luogo nelle cellule di ricambio appartenenti tanto allo strato profondo dell' epitelio di rivestimento, quanto ai germogli che ne dipendono, viene data in modo non dubbio dalle numerose mitosi che vi stanno. Esse spiccano assai, come in genere in tutti i tessuti del tritone, per la loro grandezza e per la nettezza con cui si vedono i singoli filamenti che le costituiscono. In ogni stadio del processo esse sono evidentissime, sicchè riesce facile contarle. In ciascuna sezione d'intestino dello spessore di 5-10 μ se ne trova almeno una diecina (1). Alle molte figure date dagli osservatori delle mitosi dei vari tessuti del tritone, credo inutile aggiungerne altre mie riguardanti l'epitelio intestinale. Non ho potuto, però, trattenermi dal disegnarne due allo stadio di doppio astro nelle figure 13ª e 17ª; la prima apparteneva ad un ger-

(1) I tritoni da me usati erano sempre stati abbondantemente nutriti.

moglio subepiteliare, l'altra, invece, era nello strato più profondo dell'epitelio di rivestimento. Il protoplasma delle mitosi suol essere assai chiaro e trasparente, massime al dintorno dei filamenti. Non mi venne fatto di determinare se esistessero due specie di mitosi, l'una per l'epitelio protoplasmatico, l'altra per le cellule mucose. Su questo punto, però, non mi sono gran fatto soffermato.

Paragonando fra loro l'intestino di tritoni uccisi in aprile, e quello di animali della stessa specie e tenuti nelle stesse condizioni, ma uccisi in giugno, potei accertare che in questo ultimo i germogli epiteliari erano più numerosi e più ricchi di mitosi. Questo fatto, unito all'altro che i germogli hanno una forma affatto irregolare e grossezza svariatissima, e che esistono molti stadi di passaggio da un semplice aumento diffuso di numero delle cellule profonde dell'epitelio di rivestimento alla formazione di un accumulo circoscritto di cellule epiteliari giovani, alla formazione, cioè, di un germoglio autonomo, mi fa supporre che i germogli siano formazioni incostanti dell'intestino del tritone, e che il loro maggiore o minore sviluppo dipenda dall'attività con cui nell'animale esaminato ha luogo la rigenerazione dell'epitelio. Quando la rigenerazione è attiva, gli elementi giovani, oltre all'occupare gl'interstizi fra le estremità profonde dell' epitelio cilindrico, s' approfondano in accumuli nel connettivo della mucosa; e ciò deve riuscir facile, in quanto che questo connettivo è costituito da un reticolo di fasci fibrillari, che lascia ampie maglie, ove possono aver ricetto i germogli epiteliari.

I germogli epiteliari non si possono considerare come ghiandole, perchè sono costituiti da cellule immature, e mancano di condotto escretore. Quando, però, si richiami alla mente come le vere ghiandole in un certo periodo del loro sviluppo siano rappresentate da zaffi solidi di elementi epiteliari giovani, si viene indotti a conchiudere, che i germogli epiteliari dell'intestino del tritone filogeneticamente corrispondano alle ghiandole tubulari degli animali superiori.

Riassumendo, anche nell'intestino del tritone la rigenerazione degli elementi ha luogo per scissione indiretta. La sede delle mitosi solo per piccolo numero di elementi è nell'epitelio superficiale; pel maggior numero è fra le giovani cellule di ricambio che stanno tanto alla base delle cellule cilindriche quanto nei germogli subepiteliari. Nel tritone è degno di nota, che fra queste

cellule di ricambio non poche secernono sostanza mucosa, ad onta che non siano ancora in rapporto colla superficie libera dell'epitelio. Anche nel tritone ha luogo una maturazione delle cellule mucipare, e il muco, che esse secernono, va modificando gradatamente il suo aspetto e le sue reazioni, man mano che le cellule che lo producono, vanno invecchiando, e che esse, dal profondo dello strato epiteliare, procedono verso la sua superficie. Non è, quindi, ammissibile l'opinione di coloro che, come Paneth (1), credono che le cellule mucose provengano dalle cellule epiteliari protoplasmatiche, e possano, svuotandosi del loro contenuto, di nuovo trasformarsi in queste ultime.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

(In molte figure non vennero riprodotti i' colori dei preparati).

Ghiandole tubulari duodenali di topolino.

FIG. 1ª. Ghiandole in sezione longitudinale (liquido di Flemming, safranina, alcool cromico, damar). 760 d. $\left(\frac{1}{12''}\right.$ imm. om. di Reichert$\left.\right)$. — *a*, *b* cellule protoplasmatiche — *cc'* cellule di Paneth — *d* cellula di Paneth a granuli minutissimi, e a contenuto mucoso — *e* cellula mucipara — *f* mitosi.

» 2ª. Cellule cilindriche (liquido di Hermann, ematossilina, alcool con HCl, damar). 840 d. (apocr. 1,5mm di Zeiss). *A*. Da una ghiandola in prossimità del fondo cieco. *B*. Da un villo, poco lontano dal suo apice; fra le cellule protoplasmatiche vedesi una cellula mucipara, che ha soltanto il terzo superficiale del suo corpo occupato dal muco.

(1) Loc. cit., pag. 185.

FIG. 3ª. Sezione tangenziale di fondo cieco ghiandolare (liquido Flemming, azzurro di metilene). Ingr. come figura antecedente — *a a* cellule di Paneth; in una non visibile il nucleo, — *b b* cellule di Paneth, con granuli più piccoli che nelle cellule antecedenti; la sostanza intergranulare all'estremo libero della cellula si colora già in azzurro (reazione della sostanza mucosa), — *c* cellula a granuli minutissimi e a sostanza intergranulare prettamente mucosa.

» 4ª. Ghiandola tolta dall'animale due ore dopo la morte, ed esaminata per dilacerazione nel liquido di Müller. *b b* cellule di Paneth, — *a a* cellule mucipare, i cui granuli sono a contorni assai meno marcati di quelli dei granuli di Paneth.

» 5ª. Elementi di una ghiandola (liquido di Flemming, safranina, damar). 840 d. (apocr. 1,5^{mm} di Zeiss). *a* cellule epitel. tagliate pel lungo; fra esse una cellula mucipara con finissimi granuli di Paneth, — *b b b* cellule mucipare come l'antecedente, ma viste in sezione ottica trasversale; i granuli di Paneth variano di grossezza nelle diverse cellule.

» 6ª. Cellule mucipare da una ghiandola. Delle cellule non si vede che il blocco di sostanza mucosa (liquido di Hermann, safranina, ematossilina, damar), 1200 d. circa (apocr. 1,5^{mm} di Zeiss). *a* blocco di muco adulto; i granuli sono tutti colorati dall'ematossilina. — *b* da una cellula mucipara giovine: il blocco consta di granuli colorati dall'ematossilina, e di altri più piccoli, intensamente colorati dalla safranina.

» 7ª. Cellule di Paneth (Flemming, safranina, damar). 1000 d. (1,5^{mm} di Zeiss).

Mucosa intestinale del tritone.

» 8ª. Due pliche longitudinali della mucosa, nella metà posteriore dell'intestino, vedute a piccolissimo ingrandimento.

FIG. 9ª. Sezione trasversa d'intestino, poco lontano dallo stomaco (Ac. picrico, safranina, alcool cromico, damar). 22 d. Si vedono le pliche tagliate trasversalmente o obliquamente.

» 10ª. Da una sezione trasversa (liquido di Hermann, vesuvina, damar). 110 d. Si vedono due pliche sezionate trasversalmente, e ricoperte dall'epitelio costituito di cellule protoplasmatiche, e di cellule mucose, — *a* tonaca muscolare trasversale, — *b* membrana mucosa, — *ccc* nidi di cellule di ricambio.

» 11ª. Da una sezione trasversa dell'intestino (liquido di Hermann, vesuvina, damar). *A*. Epitelio poco lontano dalla sommità di una plica. Nella cellula mucipara il muco in parte presenta ancora struttura granulare. A sinistra di essa vedesi una cellula protoplasmatica che contiene tre globicini *(enclaves)*, di cui due erano poco colorati, il terzo, invece, era in una porzione della sua sostanza fortemente colorato dalla vesuvina. A destra della cellula mucipara vedesi un leucocito giacente in una cavità scavata nel corpo di due cellule protoplasmatiche. — *B*. Epitelio di un fornice. Nel profondo vedonsi due nuclei di cellule di ricambio. Delle due cellule mucose, l'una ha granuli mucosi ben palesi, l'altra granuli meno distinti.

» 12ª. Da una sezione trasversa d'intestino, poco lontana dall'ano. (Ac. picrico, safranina, zucchero). 110 d. Vedesi una plica della mucosa. *a* e *b* tonache muscolari, — *c* mucosa, — *ddd* vasi sanguigni, — *ee* cellule mucose tagliate longitudinalmente o obliquamente. In *f* il taglio sull'epitelio è caduto un po' obliquo. — *ggg* germogli subepiteliari.

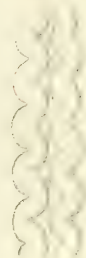
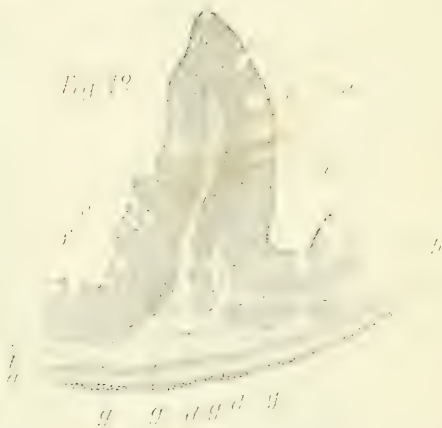
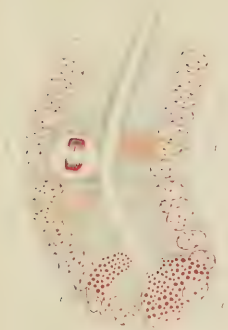
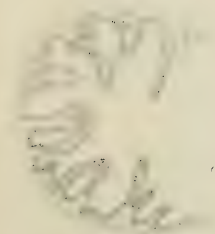
» 13ª. Porzione della figura precedente, a 270 d. — *a* epitelio di rivestimento, che in a' è tagliato un po' obliquamente, — *bb* cellule mucipare adulte, — $c\,c'\,c''$ germogli subepiteliari. In *c* e c' vedonsi due cellule che già secernono muco, il quale era a gra-

nuli di color giallo-castagno, mentre qui venne disegnato (per risparmiare il colore) come massa omogenea scura.

FIG. 14ª. Tre cellule mucipare da una sezione trasversa d'intestino (ac. picrico, safranina, zucchero). 700 d. (apocr. 1,5^{mm} di Zeiss). — *a* cellula giovanissima, risiedente in un germoglio subepiteliare, — *b* cellula giovane, dal fondo di un fornice, — *c* cellula adulta, dall'alto d'una plica. Nel preparato il muco in *a* e *b* è sotto forma granulare e di color giallo castagno; in *c*, invece, solo alcuni granuli sono ancora conservati, e colorati in giallo; gli altri, sotto l'influenza della soluzione di zucchero, sono diventati pallidi, ed hanno perduto quasi del tutto il color giallo-chiaro che avevano acquistato sotto l'influenza della safranina; appare, invece, il reticolo interposto.

» 15ª. Cellula mucipara giovane, dal fondo di un fornice. Forte ingr. — Per la spiegazione V. il testo.

» 16ª. Mitosi nelle cellule epiteliari superficiali (ac. picrico, safranina, alcool, damar). 250 d. Lo strato epiteliare è tagliato obliquamente; non si vedono chiaramente i contorni delle singole cellule epiteliari.

» 17ª. Cellula in mitosi fra le cellule di ricambio dello strato profondo dell'epitelio di rivestimento dell'intestino (Flemming, safranina, damar). 390 d. L'epitelio era stato tagliato un po' obliquamente; non sono ben visibili i contorni delle sue cellule.

Atti R. Accad. delle Sc. di Torino - Vol. XXVII

G. Bizzozero del.

Lit. Salussolia Torino.

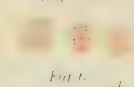
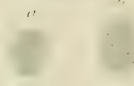



Fig. 1
Fig. 2 A
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5 a
Fig. 7
Fig. 8

Sopra le linee uniformemente illuminate di una superficie qualunque;

Nota del Dott. MARIO PIERI

1. In questa Nota si dimostra un teorema generale pertinente alla geometria di una superficie qualunque e suscettibile di un'elegante applicazione alla teoria delle ombre e delle superficie topografiche.

La proprietà analitico-geometrica espressa dal medesimo, per quanto assai semplice, non par che sia stata finora esplicitamente rilevata; il che ci sembra qui opportuno di fare, guardando specialmente all'utilità che se ne può immediatamente cavare per la costruzione delle tangenti alle linee isofote sopra una superficie qualunque. Ecco la proposizione di cui si tratta:

« *Sopra una superficie qualunque le linee, lungo ciascuna delle quali è costante l'angolo del piano tangente alla superficie con una retta fissa, hanno per linee coniugate nel senso del* Dupin *le traiettorie ortogonali delle sezioni fatte sulla superficie stessa dai piani normali a quella retta.* »

Sia

$$z = z(x, y)$$

l'equazione cartesiana di una superficie S riferita a tre assi ortogonali, uno dei quali, per es. l'asse delle z, si suppone parallelo alla retta data. Indicando coi noti simboli p, q, r, s, t le derivate parziali della funzione $z(x, y)$ rispetto alle due variabili indipendenti x, y, ossia ponendo:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y} = t,$$

sarà:

$$(1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad p^2 + q^2 = costante$$

l'equazione delle linee, lungo ciascuna delle quali è costante l'inclinazione del piano tangente alla superficie sull'asse delle z: essendo $\frac{\pm 1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ il coseno dell'angolo, che la normale alla superficie forma con quest' asse. E le traiettorie ortogonali delle linee $z = costante$ saranno rappresentate dall'equazione differenziale:

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad pdy - qdx = 0 \; ,$$

ovvero:

$$dx : dy :: p : q \; .$$

Ora, se si costruisce l'equazione differenziale delle linee *a tangenti coniugate* delle linee (2) per mezzo della nota formula (*):

$$rdx\delta x + s(dx\delta y + dy\delta x) + tdy\delta y = 0 \; ,$$

che esprime il legame fra i differenziali (dx, dy), $(\delta x, \delta y)$ relativi a due sistemi qualunque di linee coniugate nel senso del Dupin, trovasi immediatamente:

$$(pr + qs)\,\delta x + (ps + qt)\,\delta y = 0 \; ,$$

essendo δx, δy i differenziali delle variabili x ed y sopra le nuove linee. Ma il primo membro dell'equazione così ottenuta può essere scritto sotto la forma:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(p^2+q^2)\,\delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(p^2+q^2)\,\delta y \; ,$$

onde l'equazione stessa diviene:

$$\delta(p^2+q^2) = 0 \; ,$$

ossia:

$$p^2 + q^2 = costante$$

sopra ogni singola linea.

(*) DUPIN, *Développements de Géométrie*, § 2.

Dunque il sistema (1) e il sistema delle linee a tangenti coniugate delle linee (2) non formano che un solo e medesimo sistema di linee sulla superficie S: il che era da dimostrare. — In ogni punto della superficie si tagliano in generale due linee appartenenti rispettivamente ai due sistemi (1) e (2): le tangenti a queste due linee in quel punto saranno pertanto due diametri coniugati dell'*Indicatrice di Dupin* relativa al medesimo, e per conseguenza (in ogni punto non parabolico della superficie) da una qualunque di queste tangenti si dedurrà l'altra immediatamente per mezzo di costruzioni proiettive, ogniqualvolta sia nota l'indicatrice stessa, o almeno l'involuzione dei suoi diametri coniugati. E si osservi, che la tangente in un punto qualunque P della superficie alla linea del sistema (2) che passa per esso non è altro che la proiezione ortogonale della parallela condotta dal punto P all'asse delle z sul piano tangente in P; ecc.

2. Se la direzione data (asse delle z) è la *verticale*, le linee (1) saranno le *linee di costante pendenza* della superficie S (rispetto al piano orizzontale); mentre le linee $z =$ *costante* ne saranno le *linee di livello* e le (2), loro traiettorie ortogonali, le *linee di massima pendenza*. Per la qual cosa il teorema del numero precedente potrà anche essere enunciato sotto quest'altra forma:

« *Sopra una superficie topografica le linee di costante pendenza e le linee di pendenza massima formano un doppio sistema di linee a tangenti coniugate* (*). » O, in altri termini: « la sviluppabile circoscritta ad una superficie lungo una linea di $\left\{\begin{matrix}\text{massima}\\ \text{costante}\end{matrix}\right\}$ pendenza della medesima ha per generatrici rettilinee le tangenti alle varie linee di $\left\{\begin{matrix}\text{costante}\\ \text{massima}\end{matrix}\right\}$ pendenza nei loro punti d'incontro con quella linea ».

Ciò è ben d'accordo col fatto, che la sviluppabile circoscritta ad una superficie qualunque lungo una linea di costante pendenza

(*) Se la superficie S è un'*elicoide* qualunque ad asse verticale, le linee di costante pendenza e le eliche della superficie saranno una stessa cosa, e però: « sopra una superficie elicoidale, il cui asse è supposto verticale, le linee di massima pendenza sono le linee a tangenti coniugate delle eliche ». Di questo caso particolare trovasi già fatta menzione in una mia Nota « *Intorno alle superficie elicoidali* », pubblicata nel Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova, fascicolo gennaio-febbraio 1887.

è una *superficie di uniforme pendenza*, e che sopra una tal superficie le linee di massima pendenza coincidono con le generatrici rettilinee. Quest'osservazione semplicissima è anzi una vera dimostrazione del teorema generale del n° 1, e sotto altra veste sarà svolta un po' più per disteso nel seguente numero.

3. Se si suppone che la superficie S sia una superficie materiale rischiarata da raggi luminosi *paralleli* secondo la legge di Lambert, allora (prescindendo, come ordinariamente si fa, da ogni mancanza d'illuminazione proveniente dall'opacità della superficie) le linee, lungo ciascuna delle quali è costante l'inclinazione del piano tangente su quei raggi luminosi, non saranno altro che le cosiddette *isofote*, vale a dire le *linee di ugual chiarezza*, o *linee uniformemente illuminate* della superficie; e il teorema generale del n° 1 si convertirà nella proposizione seguente, assai notevole:

« *Le linee isofote di una superficie qualunque per raggi luminosi paralleli sono le linee a tangenti coniugate delle traiettorie ortogonali delle sezioni fatte sulla superficie dai piani normali a quei raggi luminosi.* »

Ovvero anche:

« Per una superficie qualunque S, rischiarata da raggi luminosi paralleli secondo la legge di Lambert, la tangente ad una linea isofota in un punto qualunque P della medesima (il quale non sia punto punto singolare, nè punto di massima illuminazione assoluta della superficie) e la proiezione ortogonale del raggio luminoso che passa per P sopra il piano tangente in P alla superficie, sono due tangenti coniugate, ossia due diametri coniugati dall'indicatrice di Dupin relativa al punto P. »

Sotto quest'ultima forma il teorema generale del n° 1 è suscettibile di una dimostrazione geometrica molto semplice. Invero si consideri la sviluppabile Σ circoscritta alla superficie S lungo la linea isofota i passante per P; e siano rispettivamente π il piano tangente in P alle due superficie S e Σ, p la generatrice di Σ uscente da P, ed l il raggio luminoso cadente sullo stesso punto P. La sviluppabile Σ avrà per cono direttore un *cono di rotazione* Σ', il cui asse l' è un raggio luminoso, ed il cui angolo d'apertura eguaglia il doppio dell'angolo (acuto) formato dai raggi luminosi coi piani tangenti alla S nei singoli punti della i. Ora, se

π' e p' sono gli elementi di Σ' corrispondenti, e quindi paralleli, agli elementi π e p di Σ, sarà π' perpendicolare al piano $l'p'$, e per conseguenza π perpendicolare al piano lp: dunque p è la proiezione ortogonale del raggio l sul piano π, come era da dimostrare (*).

4. Se i è l'isofota d'intensità nulla, ossia la *linea di confine fra luce ed ombra propria*, il raggio l giacerà nel piano π e si confonderà con la sua proiezione in questo piano.

Il teorema precedente può pertanto considerarsi come una generalizzazione della nota proprietà, già segnalata dal Dupin (**), che « ogni tangente alla linea di separazione fra luce ed ombra propria è coniugata al raggio luminoso uscente dal punto di contatto »: e come quest'ultima proprietà serve molto opportunamente per costruire la tangente alla isofota d'indice zero o d'intensità nulla in ogni punto di essa, nel quale sia nota l'indicatrice (***) nello stesso modo e coi medesimi vantaggi la proposizione precedente potrà essere adoperata per trovare le tangenti di ogni altra linea isofota, nell'ipotesi dei raggi luminosi paralleli.

Così è che un buon numero di semplici ed eleganti costruzioni proposte in ordine alle tangenti del contorno d'ombra di certe superficie (****) si estendono immediatamente anche alle linee isofote senza modificazioni di sorta, all'infuori dello scambio fra il raggio luminoso e la sua proiezione sul piano tangente. Si può

(*) La stessa proprietà non sussiste più in generale, allorquando i raggi luminosi procedono tutti da un medesimo punto proprio O. In questo caso (come risulta da una succinta analisi, che qui si omette) affinchè il teorema sopraddetto abbia luogo per ogni linea isofota è necessario e sufficiente, che queste linee siano tagliate sulla superficie S dalle sfere che hanno il punto O per centro: il che trae di conseguenza, che quelle linee siano anche linee di curvatura per la superficie; ecc., ecc.

(**) Loc. cit., § 1°.

(***) V. per es. De la Gournerie, *Traité de Géométrie Descriptive*, vol. III, pag. 63 (1864).

(****) Per es. i metodi dei signori Staudigl e Pelz per le tangenti del contorno d'ombra sopra una superficie di rotazione (Sitzungber. d. Ak. d. Wiss. in Wien, Bd. 68, 1873, e Bd. 79, 1879. — V. anche Wiener, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie,* tomo II, Leipzig, 1887, pag. 556), e quelli attinenti alle superficie rigate e fondati sulla considerazione dell'iperboloide osculatore lungo una generatrice; ecc.

anzi affermare addirittura in forza del teorema precedente, che « per costruire e rappresentare la tangente ad una linea isofota qualunque in un punto dato P di essa, basterà attenersi in ogni singolo caso agli stessi metodi e alle stesse regole fondate sul teorema di Dupin, che si conoscono in ordine all'isofota d'indice zero nell'ipotesi di raggi luminosi paralleli; con la sola avvertenza di sostituire al raggio luminoso passante per P (che ove si tratti dell'isofota d'indice zero è tangente in P alla superficie) la sua proiezione ortogonale sul piano tangente in P ».

5. Rechiamo qui appresso l'enumerazione di alcuni casi particolari, in cui apparisce più semplice e più vantaggiosa l'applicazione del principio esposto al precedente n° 3 sulle tangenti alle linee isofote.

« *Sopra una quadrica rigata ed in un punto qualunque* P *di essa (dove il piano tangente non sia normale ai raggi luminosi) la tangente alla linea isofota che passa per* P *e la proiezione ortogonale del raggio luminoso passante per* P *sul piano tangente in questo punto sono armonicamente coniugate rispetto alle due generatrici della quadrica uscenti dal medesimo.* »

« *Sopra un'elicoide rigata chiusa a piano direttore (elicoide d'area minima) la tangente ad una linea isofota qualunque e la proiezione ortogonale del raggio luminoso che passa pel punto di contatto sul piano tangente alla superficie in questo punto formano angoli uguali con la generatrice rettilinea uscente dal medesimo.* »

« Se nel punto P di un'elicoide rigata qualunque si conduce il piano normale all'asse della medesima, indi (nel piano tangente in P) la normale e' alla sezione retta così ottenuta; e se e, i, i', g sono rispettivamente le tangenti all'elica e all'isofota passanti per P, la proiezione ortogonale del raggio luminoso uscente da P sul piano tangente in questo punto, e la generatrice rettilinea appartenente al medesimo, saranno allora e', e ed i, i' due coppie di raggi coniugati e g un raggio doppio di una stessa involuzione. »

« Se g è una generatrice qualunque (non singolare) di una superficie rigata, per ogni punto P di g passerà anche una seconda generatrice g' dell'iperboloide osculatore alla rigata lungo

la retta g, e le due rette g, g' saranno sempre separate armonicamente dalla tangente in P all'isofota, cui questo punto appartiene, e dalla proiezione ortogonale del raggio luminoso passante per P sul piano gg'. »

6. Alla questione « se una linea isofota possa esser *linea di curvatura*, o *linea asintotica* per la superficie » il teorema del n° 3 permette di rispondere immediatamente come segue:

« *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea isofota rispetto ad un dato sistema di raggi luminosi paralleli sia una linea di curvatura per la superficie (senza esser tutta composta di punti parabolici), è che quella isofota sia piana ed in un piano normale alla direzione del lume.* »

« *Perchè una linea isofota rispetto ad un dato sistema di raggi luminosi paralleli sia una linea asintotica per la superficie (senz'esserne una linea parabolica) è necessario e sufficiente che essa sia un'elica del cilindro generato dai raggi luminosi ad essa incidenti, e che questo cilindro tagli ortogonalmente la superficie lungo tutta quella linea.* »

Torino, gennaio 1892.

RELAZIONE dei Soci A. NACCARI ed A. COSSA, relatore sulla Memoria presentata dal Dott. MONTEMARTINI nell'adunanza del 3 gennaio 1892 « *Sull'azione dell'acido nitrico sullo zinco* ».

Il dottor Clemente MONTEMARTINI, assistente alla cattedra di chimica docimastica nella scuola degli Ingegneri di Torino, si è proposto il còmpito di studiare così qualitativamente come quantitativamente i fenomeni di riduzione che avvengono per l'azione di alcuni acidi ossigenati sopra i metalli. Le sue prime ricerche fatte con questo scopo si riferiscono all'azione dell'acido nitrico sullo zinco, e formano appunto argomento della Memoria presentata all'Accademia nell'adunanza del 3 gennaio 1892, ed intorno alla quale noi fummo incaricati di riferire.

In questo lavoro di lunga lena, l'Autore espone con fedeltà e discute con critica sottile i metodi di sperimentazione seguiti

ed i risultati ottenuti dai chimici che lo precedettero nello studio dell'azione dell'acido nitrico sui metalli. Egli fa giustamente notare, come fino ad ora non siasi tenuto conto dell'influenza che può, in alcune circostanze, esercitare la massa dell'acido nitrico sulla natura e sulla quantità relativa dei prodotti della sua riduzione per l'azione dello zinco.

Le molte esperienze intraprese dal MONTEMARTINI e da lui ordinatamente descritte con ricchezza di particolari, riescono a stabilire esattamente come varii in funzione della temperatura, del grado di concentrazione, e della massa dell'acido nitrico, la riduzione di questo acido nei prodotti seguenti: ammoniaca, acido nitroso, ipoazotide, biossido e protossido di azoto, ed azoto. — L'Autore ha dimostrato, che, contrariamente a quanto fu asserito da altri, nelle condizioni delle sue esperienze, tra questi prodotti di riduzione non devono essere compresi: l'idrossilamina e l'idrogeno. Egli spiega poi in un modo ingegnoso la formazione dei prodotti di riduzione dell'acido nitrico indipendentemente dal così detto *idrogeno nascente*; ammettendo invece l'intervento dell'acqua nella reazione tra lo zinco e l'acido nitrico. — In un capitolo speciale sono poi accuratamente descritte le determinazioni sperimentali fatte dall'Autore per stabilire la legge della velocità colla quale l'acido nitrico in diversi gradi di concentrazione scioglie lo zinco.

I risultati importanti ottenuti dall'Autore della Memoria che abbiamo esaminato sono il frutto di una lunga serie di ricerche, colle quali egli ha dimostrato di essere un paziente, coscienzioso ed abile sperimentatore, avendo superato molte difficoltà specialmente in alcune determinazioni eudiometriche. — Pertanto proponiamo che la Memoria del dott. MONTEMARTINI sia ammessa alla lettura e quindi inserita nei volumi delle Memorie della nostra Accademia.

A. NACCARI

ALFONSO COSSA, *Relatore.*

L'Accademico Segretario

GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

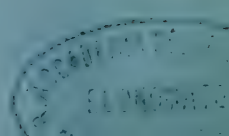
DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 6ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 31 Gennaio 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Cossa, Bruno, Berruti, Siacci, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Si dà lettura dell'atto verbale dell'adunanza precedente che viene approvato.

Il Presidente segnala alla Classe il cospicuo dono fatto all'Accademia dal Socio Paolo Boselli di un grande numero di libri, fra i quali molti riguardano anche le scienze fisiche, matematiche e naturali.

Il Socio Siacci presenta in dono, a nome dell'autore, un lavoro del Tenente Colonnello del Genio Federigo Falangola, relativo ad *Esperimenti sulla resistenza delle pietre allo schiacciamento*.

Il Socio Basso presenta pure in dono un opuscolo del Professore Annibale Riccò, estratto dai *Comptes-rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi, ed intitolato: *Tremblements de terre, soulèvement et eruption sous-marine à Pantellaria*.

Il Socio Segre, anche a nome del condeputato Socio D'Ovidio, legge una Relazione sulla Memoria del Prof. Riccardo De Paolis intitolata: *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di* 1ª *specie*.

Secondo le conclusioni favorevoli di tale Relazione, il lavoro anzidetto è prima ammesso alla lettura e poscia approvato per

la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*. La Relazione del Socio SEGRE sarà inserta negli *Atti*.

Infine la Classe accoglie, per essere pubblicato negli *Atti*, un lavoro del Dott. Ermanno DERVIEUX sui *Foraminiferi pliocenici di Villarvernia* (*Tortona*).

LETTURE

RELAZIONE sulla Memoria del Prof. RICCARDO DE PAOLIS, intitolata: *Le corrispondenze projettive nelle forme geometriche fondamentali di* 1ª *specie.*

Fra le produzioni scientifiche più meravigliose del secolo che volge al tramonto, è certamente da porsi la geometria projettiva, quella che l'HANKEL chiamò *la strada regia della Matematica!* Essa, dopo aver cominciato ad organizzarsi in un corpo di scienza per opera della scuola francese del primo quarto di secolo, e specialmente di PONCELET, ha poi, grazie a sommi matematici di varie nazioni, esteso rapidamente ed in modo mirabile il campo e gli strumenti delle sue ricerche. Dalle curve e superficie di 2° ordine, dalle projettività, è progredita allo studio delle curve e superficie di ogni ordine, delle corrispondenze algebriche qualunque, di innumerevoli nuove specie di enti. A ciò han contribuito potentemente tanto il metodo sintetico quanto l'analitico; ed anche la gara che in certi periodi vi fu tra essi, e che alternativamente condusse i partigiani dell'un metodo o dell'altro ad escogitare dei mezzi di ricerca atti a raggiungere e sorpassare i risultati degli avversari.

Ormai non è più necessario di star a rilevare i vantaggi proprî dell'analisi e della sintesi geometrica, e la utilità e quasi necessità che ne consegue pel progresso della geometria, di valersi di entrambe. Ciò però non è in contrasto con l'idea di fare una geometria projettiva *pura*, cioè svolta con metodo esclusivamente sintetico, senz'alcun uso di coordinate e di principî analitici. Come già fu rilevato più volte (anche da noi), questo problema, oltre ad avere per se stesso un'alta importanza scientifica e a condurre ad una più completa illuminazione delle proprietà

degli enti geometrici, è stato ed è tuttora utilissimo per ciò che, escludendo gli altri strumenti, viene ad esigere un perfezionamento in quelli di cui si vale il metodo sintetico. — Allo stesso modo fra i grandi progressi recenti dell'analisi, che tanto hanno contribuito ad accrescerne il rigore, vi è stata la sua purificazione, cioè la dimostrazione dei suoi principî fondamentali indipendente da certe rappresentazioni geometriche; le quali, se giovavano a renderli più intuitivi, avevano però l'inconveniente di basarsi su postulati non necessari all'analisi, o (quel che è peggio) su concetti non rigorosi. Si potrebbe dire che in alcuni punti la trattazione simultanea dell'analisi con la geometria produceva una dannosa confusione. Stabiliti invece in modo puramente analitico e rigoroso quei principî fondamentali, si può ora applicarli con sicurezza anche alla geometria. Ovvero, ritornando al problema della geometria pura, si possono cercare, guidandosi su quelle analitiche già note, delle dimostrazioni sintetiche dei corrispondenti principî fondamentali geometrici.

Alla costruzione di una geometria projettiva essenzialmente sintetica, furon dedicati gli sforzi di molti geometri, presso i quali però il concetto della *purezza* si presenta con grado diverso. Un primo periodo, che si riferisce specialmente alla geometria projettiva degli enti algebrici di 1° e 2° ordine, è rappresentato da un lato dalla citata scuola francese e in particolare da Poncelet e Chasles, e dall'altro lato da Möbius e Steiner e poi dall'opera di Staudt, la quale chiude gloriosamente la serie, e raggiunge la *completa* purezza di metodo, facendo una teoria esclusivamente geometrica degli elementi imaginari. Il secondo periodo, che si riferisce agli enti di ordine qualunque, parte ancora da ricerche dei geometri nominati, e più specialmente di Steiner; e cominciò ad avere un principio di soluzione, od almeno una preparazione di questa, coi noti trattati del Cremona sulla teoria geometrica delle curve e superficie algebriche, nei quali per altro alcuni principî fondamentali son presi dall'algebra: come ad es. il principio di Lamé relativo ai fasci, il *principio di corrispondenza* nelle forme semplici (*), ecc. I tentativi per liberare com-

(*) A questo proposito, e trattandosi di un principio che dovremo ancora nominare ripetutamente, ci sia concesso di porre qui una questione: *È egli esatto di attribuire, come sempre si fa* (anche in recenti lavori storici), *al solo* Chasles *la scoperta di quel principio di corrispondenza?* Non v'è dubbio che questo grande scienziato ha il merito di averlo pel primo formulato e

pletamente quelle teorie geometriche da ogni nozione analitica proseguirono poi, senza risultati definitivi, fino a questi ultimi anni, quando l'Accademia delle Scienze di Berlino pose ripetu-

---

dimostrato come un modo di procedere *generale*, rilevandone tutta l'importanza, nella seduta del 27 giugno 1864 dell'Académie des sciences (Comptes Rendus, t. 58, p. 1175); e poco prima nelle sue lezioni alla Sorbonne del 1863-64 (secondo quanto egli stesso asserisce poi nella nota alla pag. 821 del t. 63 dei Comptes Rendus). Ma ciò che va rilevato si è che già tre anni prima il De Jonquières nella Nota *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (Journal de Mathém., 2. sér. t. 6, pag. 113; 1861) ed il Cremona nell'*Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (Memorie Acc. Bologna, 1ª ser. t. 12; 1861) facevano molte applicazioni dello stesso principio, specialmente alla determinazione degli ordini di luoghi geometrici (senza enunciarlo in generale, ma accennandone in ogni caso speciale la breve dimostrazione analitica). Veggasi anche quanto accenna il Jonquières in nota a pag. 872 del t. 63 dei C. R., rilevando che il Cremona gli aveva comunicata per lettera una dimostrazione basata appunto su quel principio: « s'il fallait citer quelqu'un à ce sujet ce serait M. Cremona ». Alcuni, — e lo stesso Chasles in qualche punto della polemica col Jonquières (relativa alla priorità nell'introduzione degl'*indici* o *caratteristiche* di una ∞^1 di curve piane) svoltasi nel t. 63 dei C. R., ed alla quale si riferiscono appunto le due precedenti citazioni di quel vol. (polemica in cui è singolare, essendosi nel 1866! di vedere che lo Chasles considera quasi come privo di valore *perchè evidente* il lemma, adoperato dal Jonquières nella citata Nota del 1861, e poi nei *Théorèmes fondamentaux*, etc. del Giornale di mat. t. IV, 1866, pag. 45, secondo cui nell'equazione delle curve di una ∞^1 algebrica i coefficienti sarebbero *sempre* funzioni *razionali* di un parametro!) — vogliono giustificare l'attribuzione esclusiva del principio di corrispondenza allo Chasles basandosi sulla comunicazione del 24 dic. 1855 (C. R. t. 41, pag. 1097) « *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie* ». Ma il principio di cui qui si tratta (ed al quale il Jonquières poco dopo, sotto il nome di *principe de correspondance anharmonique,* dedicava il Cap. 4º dei *Mélanges de géométrie pure* 1856) consiste, come ben si sa, nel fatto che una corrispondenza algebrica (1, 1), od (1, 2) fra due forme semplici non è altro che una *proiettività* fra le forme stesse, ovvero tra l'una forma ed una involuzione ordinaria dell'altra. Si tratta dunque della struttura della corrispondenza; e non del *numero degli elementi uniti*, come nel principio di corrispondenza formulato poi nel 1864: nè la detta comunicazione del '55 contiene alcun indizio che lo Chasles intravvedesse fin d'allora l'utilità di considerare corrispondenze algebriche d'indici qualunque (non è neppur riportata la rappresentazione analitica delle due corrispondenze (1, 1), (1, 2), che poteva servire alla dimostrazione del principio, e che poi bastava generalizzare per giungere al principio del '64). E del resto, se lo Chasles avesse posseduto fin d'allora il principio generale di corrispondenza, si può asserire con sicurezza che non avrebbe lasciato trascorrere otto anni senza mai farne applicazioni e nem-

tamente pel premio STEINER (da conferirsi nel 1884 e nel 1886) appunto il tema di fare una teoria puramente geometrica delle curve e superficie d'ordine qualunque (*); ed il concorso fu vinto da un giovane geometra, ERNESTO KÖTTER, con un lavoro (**) nel quale la detta teoria geometrica è svolta, od almeno avviata, per le curve piane. In pari tempo però, ed indipendentemente dal detto concorso, il Prof. DE PAOLIS, il quale (secondo che avverte nell'introduzione al lavoro intorno a cui dobbiamo riferire) « già da parecchio tempo aveva indirizzato i suoi studi allo scopo di rendere la geometria indipendente dall'analisi, risolveva completamente il problema »; e prima della pubblicazione della Memoria del KÖTTER presentava alla R. Accademia dei Lincei un manoscritto contenente i suoi risultati.

L'impresa a cui il prof. DE PAOLIS si accinse è più ampia che non sia il tema dell'Accademia Berlinese; e del resto, perchè la trattazione di questo risultasse più completa e luminosa, era forse opportuno prender le mosse un po' da lontano, cioè dai

---

meno un cenno nei suoi lavori; nè avrebbe taciuto nella citata nota a pag. 821 del t. 63 dei C. R., nella quale invece (come già dicemmo) si limita a nominare la nota del '64 e le lezioni del 1863-64.

Sarebbe poi interessante di ricercare se, prima ancora dei geometri menzionati, lo STEINER non si sia valso del principio di corrispondenza per ottenere parecchi teoremi che si trovano, senza dimostrazioni, in alcuni suoi scritti.

(*) Nell'enunciato del tema di concorso ci pare di scorgere un concetto non giusto, che rileviamo perchè lo si trova pure tuttora nell'opinione di alcuni geometri: quello cioè che a risolvere pienamente il detto problema sia necessario di sostituire agli elementi *imaginari*, punti, rette, ecc., che stanno sulle curve, superficie, ... algebriche, degli enti *reali*. Ciò non pare esatto. Si sa bene che la locuzione « elementi *imaginari* » sta per indicare certi enti perfettamente reali, come quelli considerati da STAUDT od altri equivalenti; ma non è necessario che in tutti i ragionamenti si ricorra a queste rappresentazioni. Poichè il grande geometra Bavarese ha dimostrato in base ad esse che gli elementi imaginari hanno comuni con quelli reali gran parte delle proprietà, noi possiamo fondarci a dirittura su queste, cioè possiamo partire dalla teoria di STAUDT già fatta, senza più curarci in generale delle rappresentazioni reali, sicuri che ogni volta che queste occorrano veramente, le potremo enunciare senz'altro. Così la curva o superficie algebrica si può ben considerare come un insieme di punti complessi, ai quali basterà sostituire le imagini reali per avere immediatamente delle rappresentazioni reali dell'ente algebrico.

(**) *Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven* (Abhandlungen der k. Preuss. Akad. d. Wissenschaften 1887).

fondamenti di tutta quanta la geometria. Così una prima parte, la più generale, della ricerca del De Paolis, consiste nella *Teoria dei gruppi geometrici* (come quelli composti dei punti di una linea, superficie, ecc.) *e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi;* e fu già pubblicata, appunto con questo titolo, tra le Memorie della Società Italiana delle Scienze (t. 7°, ser. III, 1890). Essa contiene, tra altre cose di *Analysis situs*, la teoria della connessione delle superficie, e delle dimostrazioni puramente geometriche di teoremi sulle corrispondenze d'indici finiti, e specialmente continue, fra due o più gruppi di punti (linee, superficie), i quali equivalgono a noti teoremi analitici di Veierstrass, Cantor, ecc. (*). Si può dire che quella Memoria riguarda la parte della geometria che corrisponde alla *teoria generale* delle funzioni. Invece l'attuale e quelle che le faranno seguito, corrispondono alla teoria delle *funzioni algebriche;* si restringono cioè a trattare degli enti algebrici, rispettivamente nelle forme (fondamentali) di 1ª specie, e poi in quelle di specie superiore.

Si sa che nella geometria degli enti algebrici la parte che si riferisce alle forme di 1ª specie è quella che serve di fondamento ed alla quale è sufficiente di applicare quei principî che si trattava di stabilire geometricamente. Così la teoria generale della polarità deriva da quella particolare relativa alle forme binarie; i teoremi sul numero dei punti d'intersezione di curve o superficie algebriche, come pure quelli sugli ordini delle curve o superficie generate da fasci projettivi, od in vari altri modi, si traggono dal principio di corrispondenza in una forma semplice; ecc. La parte dunque del suo lavoro che il prof. De Paolis presenta alla nostra Accademia, e che appunto riguarda le forme di 1ª specie, è della massima importanza per gli enti algebrici; e, come si vedrà, essa non solo raggiunge pienamente il suo scopo particolare, ma prepara altresì nel miglior modo le parti successive.

Fra le vie secondo cui si soglion generare le forme algebriche di ordini qualunque mediante forme d'ordini inferiori, se ne posson distinguere principalmente due: l'una conduce ad es. alla generazione delle curve, superficie, ecc., mediante fasci projettivi di ordini

(*) Quei capi della detta Memoria che contengono proposizioni necessarie per quella su cui riferiamo sono riuniti, come avverte l'A., in un altro scritto pubblicato nel t. 18 ser. 2ª degli Annali di Matematica (1890).

inferiori; l'altra a considerarle come fondamentali per una polarità. Il 1° concetto, che deriva dalla generazione di STEINER delle curve di 2° ordine, ecc., è quello che ha guidato il KÖTTER nel suo lavoro. Il 2° invece è la base della trattazione fatta da STAUDT delle coniche e quadriche; e, se non erriamo, è da esso che, con un'opportuna generalizzazione, il DE PAOLIS è stato condotto al metodo da lui seguito. — Questo metodo raggiunge in pari tempo la massima generalità e la massima naturalezza. Si tratta infatti, in gran parte delle ricerche geometriche sugli enti algebrici, di applicare, come dianzi rilevammo, da un lato la teoria della polarità rispetto ad un gruppo di n elementi $a_x^n = 0$ della forma semplice, teoria che deriva tutta dall'equazione $a_x^r a_y^{n-r} = 0$; e da un altro lato il principio relativo ad una corrispondenza $[m, n]$ di equazione $a_x^m b_y^n = 0$. Ora è chiaro che entrambe queste equazioni, e più in generale quella di una qualunque corrispondenza algebrica $[m_1, m_2, m_3, \ldots]$, si posson dedurre da un'equazione *plurilineare* $a_x b_y c_z \ldots = 0$ tra gli elementi di un numero qualunque di forme, facendo coincidere questi elementi in gruppi di m_1, m_2, m_3, . . . Si può dunque porre a fondamento di tutta la teoria lo studio delle corrispondenze *n-lineari* $a_x b_y c_z \ldots = 0$ tra n forme di 1ª specie; e con ciò si sarà ridotti ad un ente definibile elementarmente. È appunto così che fa il nostro A.: il fondamento della sua Memoria sono queste corrispondenze, le quali raggruppano gli elementi delle n forme in una ∞^{n-1} di gruppi di n elementi, che egli chiama *aggruppamento projettivo* (*) *d'ordine* n, $\mathfrak{A}p_n$, e definisce con la condizione che, se di un suo gruppo si fissano gli $n-2$ elementi di $n-2$ forme, i rimanenti due descrivano nelle rispettive due forme una projettività (cioè un $\mathfrak{A}p_2$). — Questo è, come dicemmo, l'ente principale di tutta la trattazione: tutti gli altri ordinari enti algebrici, i sistemi di corrispondenze, le involuzioni, ecc., non sono che combinazioni o casi particolari di aggruppamenti projettivi. — Aggiungiamo che l'aggruppamento $\mathfrak{A}p_n$ può, come la sua equazione, essere *riducibile*, cioè spezzarsi in due o più altri; ed in particolare può essere *singolare*, cioè spezzarsi in n ($a_x = 0$, $b_y = 0$, $c_z = 0, \ldots$). La considerazione costante di siffatti aggruppamenti è d'importanza capitale.

(*) Con questo qualificativo di «*projettivi*» per gli aggruppamenti, corrispondenze, ecc., l'A. sostituisce quelli consueti di «*algebrico, lineare*, ecc.» i quali sembrano presupporre una definizione analitica.

Quanto allo svolgimento della Memoria possiamo limitarci a qualche cenno, perchè già la prefazione di questa lo delinea con sufficienti ragguagli. La teoria generale degli $\mathfrak{A}p_n$ esige alcune preparazioni, fra cui meritano di esser rilevate quelle dei due primi capitoli relativi ai *sistemi fondamentali* di elementi qualunque: i quali non sono altro che quelle varietà che si soglion chiamare *varietà lineari*, od *iperspazi*. Un sistema fondamentale vien definito da queste proprietà: che entro esso vi sian dei gruppi S_1, o *fasci*, d'infiniti elementi, tali che per due elementi passi sempre uno ed un solo fascio; e che se tre fasci S_1', S_1'', S_1''' hanno a due a due un elemento comune diverso dall'una coppia all'altra, ogni altro fascio, che abbia un elemento comune con S_1' ed un altro con S_1'', abbia necessariamente un elemento comune con S_1'''. Da questi soli postulati e dalla solita generazione di sistemi superiori S_2, S_3, ... mediante quelli inferiori, si deducono tutte quelle proprietà che corrispondono ai principî della geometria projettiva degl'iperspazi; e solo per procedere nello studio delle corrispondenze projettive occorre poi aggiungere il postulato che una corrispondenza projettiva (cioè ottenuta mediante projezioni e sezioni) tra due fasci sia individuata da 3 coppie di elementi corrispondenti. — Questi sviluppi eran necessari per tutto il lavoro, perchè in esso s'incontrano ripetutamente dei sistemi infiniti di enti che verificano le dette condizioni, cioè che sono *fondamentali*; e ad essi allora vengono applicati con frutto i risultati generali ottenuti in quei due capitoli: il che dà origine a vari ragionamenti che si posson riguardare come iperspaziali (*).

(*) Del resto ragionamenti di tal natura si trovano anche nel lavoro del Kötter e sono inevitabili in queste teorie! Come esempio rileviamo nella Memoria in esame il n. 131 nel quale si considera un certo sistema semplicemente infinito N^k di aggruppamenti proiettivi, pel quale si dimostrano delle proprietà completamente analoghe a quelle ben note della curva razionale normale d'ordine k. Se quel sistema si rappresentasse analiticamente, si avrebbe pei suoi aggruppamenti un'equazione i cui coefficienti sarebbero forme binarie d'ordine k di due parametri x_1, x_2: il che spiega quell'analogia. Chiamando m l'ordine degli aggruppamenti e (supposte coincidenti le m forme) considerando per ognuno di essi gli m elementi m-pli, la N^k del De Paolis ci dà una ∞^1 di gruppi di m elementi che il Kötter sotto il nome di *involuzione d'ordine m e rango k* studia (§§ 99 e seg. del suo lavoro; v. anche § 189) mostrandone l'analogia con la curva razionale normale d'ordine k. Essa nasce in modo evidente da una corrispondenza $[k, m]$; sicchè si doveva presentare necessariamente ad ambi gli scienziati.

Tale applicazione si presenta da prima nel sistema costituito da tutti gli aggruppamenti projettivi d'ordine n fra n forme fondamentali. Definiti in modo ovvio i *fasci* di aggruppamenti (e stabilita per essi, nel n. 56, una proprietà caratteristica importante), si riconosce poi in base ad essi che quel sistema di aggruppamenti è fondamentale (di specie 2^n-1). In conseguenza si possono introdurre dei sistemi fondamentali di varie specie ($\leq 2^n-1$) di $\mathfrak{A}p_n$, e riferirli projettivamente fra loro: cosa importante per tutto il seguito. — Mediante ciò, e partendo dagli aggruppamenti di 2° ordine, per poi procedere con l'induzione completa ad aggruppamenti d'ordine qualunque, si definiscono e si studiano gli aggruppamenti projettivi *armonici*. Se $a_x b_y c_z \ldots = 0$ e $a'_x b'_y c'_z \ldots = 0$ sono le equazioni dei due aggruppamenti, la condizione di armonia è $(aa')(bb')(cc') \ldots = 0$. Geometricamente due $\mathfrak{A}p_n$ si definiscono come armonici (supposta già data la definizione per due $\mathfrak{A}p_{n-1}$) nel seguente modo. Due elementi x, x' di una delle n forme son completati in gruppi di due $\mathfrak{A}p_n$ qualunque dai gruppi di elementi delle rimanenti $n-1$ forme i quali costituiscono due $\mathfrak{A}p_{n-1}$: si considerino x, x' come omologhi quando questi ultimi due aggruppamenti sono armonici: allora x, x' si corrisponderanno in una projettività. Orbene, se questa è un'involuzione, si dice che i due $\mathfrak{A}p_n$ sono armonici. Tale relazione è di somma importanza per tutta quanta la teoria. Essa determina una corrispondenza reciproca involutoria fra i sistemi di $\mathfrak{A}p_n$. Essa conduce ad uno svolgimento della massima generalità della teoria della polarità rispetto ad un $\mathfrak{A}p_n$, e quindi dell'*apolarità* fra aggruppamenti projettivi di qualunque ordine, ecc.

Come caso particolare degli $\mathfrak{A}p_n$ si ottengono (quando le n forme sono sovrapposte) le involuzioni d'ordine n e specie (dimensione) $n-1$, vale a dire, secondo la denominazione del De Paolis, le *involuzioni projettive d'ordine n e rango $n-1$* ($\mathfrak{J}p_{n,n-1}$); e come *intersezione* di $n-\rho$ involuzioni siffatte (e quindi del sistema fondamentale da esse determinato) un'*involuzione projettiva di ordine n e rango ρ* ($\mathfrak{J}p_{n,\rho}$) (*). Così pure da un aggruppamento

(*) Il Kötter nel suo lavoro in vece che dagli $\mathfrak{A}p_n$ parte dalle involuzioni d'ordine n e 1ª specie (che costruisce come luogo del gruppo degli elementi uniti di due involuzioni fisse d'ordini minori m, ed n-m, riferite secondo una projettività la quale varia in un dato fascio di projettività); e mediante queste genera successivamente le involuzioni di specie superiori.

projettivo $\mathfrak{Cl}p_n$ considerando solo i gruppi in cui gli elementi coincidono secondo le multiplicità $m_1, m_2, \ldots m_r$, ove $\Sigma m_1 = n$, si ha (come già notammo) una *corrispondenza projettiva* $[m_1, m_2, \ldots m_r]$: ogni corrispondenza siffatta si ottiene in tal modo da tutti gli $\mathfrak{Cl}p_n$ di un sistema fondamentale la cui dimensione è $2^n - 1 - \Sigma m_1 - \Sigma m_1 m_2 - \ldots - m_1 m_2 \ldots m_r$. Di tutti questi enti si ottengono molte proprietà valendosi di quelle già date precedentemente per gli $\mathfrak{Cl}p_n$. Così si considerano le involuzioni armoniche, gli elementi multipli od apolari, per involuzioni o per $\mathfrak{Cl}p_n$ qualunque, ecc.; e di questi elementi si determina poi il numero, come si trova il numero degli elementi uniti di una corrispondenza (il principio di corrispondenza), il numero delle coppie comuni a due corrispondenze tra due forme, quello degli elementi uniti di due involuzioni di 1° rango riferite projettivamente, ecc., ecc. La polarità generale rispetto ad un gruppo G_n deriva poi da quella relativa alla $\mathfrak{J}p_{n,n-1}$ che ha gli elementi di G_n per n — pli; e rapidamente, in poche pagine, si possono ottenere come semplici corollari le principali proposizioni che vi si riferiscono, il Jacobiano di due gruppi, l'Hessiano e lo Steineriano di uno, l'armonia fra gruppi, ecc.

Ad un certo punto di questa trattazione compare la necessità di stabilire un teorema geometrico che compia in essa ufficio analogo a quello che per l'algebra ha il teorema fondamentale di questa. Ed invero è solo da un teorema siffatto che si posson trarre ad es. i risultati citati relativi a *numeri* di elementi multipli, uniti, ecc... Il nostro A. ha scelto in sostanza per teorema fondamentale questo: che una $\mathfrak{J}p_{n,1}$ ed una $\mathfrak{J}p_{n,n-1}$ hanno sempre un gruppo comune. Val la pena di riferire il concetto della dimostrazione. Esso consiste nel considerare un fascio di $\mathfrak{J}p_{n,n-1}$ di cui quella data faccia parte, e riferirlo alla forma sostegno, riguardando come omologa ad un elemento di questa la $\mathfrak{J}p_{n,n-1}$ che contiene il gruppo della $\mathfrak{J}p_{n,1}$ determinato da quell'elemento. Rappresentando gli elementi della forma e quelli del fascio di $\mathfrak{J}p_{n,n-1}$ coi punti di due sfere σ, σ', si avrà una corrispondenza $[n, 1]$ fra i punti di σ e quelli *di un certo gruppo* di σ'. Ma la corrispondenza si dimostra esser continua (e con un numero finito di punti di diramazione): le si può dunque applicare un teorema sulle corrispondenze continue che il De Paolis ha stabilito geometricamente nei lavori precedenti, e che qui corrisponde al teorema analitico a cui bisogna sempre ricorrere nel

punto trascendente (cioè relativo alla continuità, ecc.) della dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. Esso permette di conchiudere che quel gruppo di σ' abbraccia *tutti i punti* di questa sfera, cioè che *ogni* $\mathfrak{J}p_{n,n-1}$ del fascio (e quindi in particolare la data) ha comune un gruppo con la $\mathfrak{J}p_{n,1}$.

Questi cenni sono sufficienti per dare un' idea del contenuto della Memoria, e mostrarne l'originalità e l'importanza. Quanto al metodo con cui essa è svolta, non occorre dire che è essenzialmente sintetico e che della pura sintesi ha tutti i pregi, come deve avere presentato all'A. tutte le difficoltà. Per gli enti fondamentali le definizioni e le costruzioni, come pure le dimostrazioni delle principali proprietà, sono in generale basate sull'induzione completa: il che è nella natura del metodo (*). I ragionamenti sono sempre rigorosi, anche quelli più delicati relativi alla continuità delle corrispondenze projettive. Infine osserveremo che la trattazione dell'argomento, fatta con sì grande generalità, mentre è una continua prova d'ingegno da parte dell'A., raggiunge in pari tempo una grande naturalezza, e quasi il carattere di necessità, sì che ci par difficile che in avvenire vi si possano introdurre delle semplificazioni importanti, almeno di concetto. Essa ci permette già di prevedere che l'A. potrà, in base ad essa, seguendo lo stesso indirizzo, svolgere egregiamente le parti successive del suo tema, cioè la teoria geometrica delle curve piane, delle superficie e delle varietà algebriche di ogni dimensione. E noi facciamo voti che ciò accada sollecitamente, com'egli (almeno in parte) ci fa sperare. Così quello che abbiamo chiamato il secondo periodo nella costruzione della geometria projettiva essenzialmente sintetica si potrà considerare come chiuso ottimamente dall' importante opera del Prof. De Paolis!

E. D'Ovidio.

C. Segre, *Relatore*.

(*) E in fatti il Kötter procede allo stesso modo. — Del resto, all'infuori di poche coincidenze richieste dall'identità dello scopo e del punto di partenza (la teoria di Staudt), non vi sono altri punti di contatto fra i due autori.

Foraminiferi pliocenici di Villarvernia;

Studiati da ERMANNO DERVIEUX

Già sin dal 1841 la località di Villarvernia (Tortona) era conosciuta; infatti il sig. Michelotti nel suo *Saggio Storico dei Rizopodi caratteristici* (1) nota come in essa si trovino le specie *Biloculina complanata* Michelotti e la *Triloculina carinata* Michelotti. Ora, avendo io studiato i foraminiferi fossili di questa località esistenti nel R. Museo di Geologia di Torino, credo utile pubblicarne il catalogo con alcune osservazioni.

Il Dott. Sacco nello studio sul *Bacino Terziario del Piemonte* (2) trattando del Piacenziano (Plioc. inf.) fa osservare la località di Villarvernia come composta di « banchi sabbiosi, zeppi di Foraminiferi e di Molluschi di piccola mole »; ed infatti il residuo del lavaggio delle sabbie di detta località mi riuscì composto per $^1/_3$ di resti conchiglie di piccola mole e per $^2/_3$ restanti di foraminiferi.

Ora, considerando questa fauna fossile di Villarvernia in rapporto alle faune attuali, devo anzi tutto premettere, che essa si dovette depositare in un mare tranquillo e poco profondo. Dico in un mare tranquillo, perchè, mentre per alcuni generi solamente gli esemplari abbondano, per gli altri sono scarsissimi; numerandosi infatti a centinaia quelli di *Miliolina* e *Truncatulina*, di ogni grandezza e dimensioni, mentre gli altri pochi generi sono appena rappresentati; e così tutto il catalogo consta di sole dodici specie. In un mare poco profondo, perchè vi è una prevalenza straordinaria del gen. Miliolina (diviso in 4 specie), il quale da solo ci fornisce i $^7/_{10}$ della totalità delle forme, e secondo le osservazioni fatte nei mari attuali questo genere ha

(1) MICHELOTTI GIOVANNI — *Saggio storico dei Rizopodi caratteristici dei terreni sopracretacei.* — Mem. Soc. Ital. Scienze, vol. XXII, 1841, pag. 253-302, tav. 1-3. Modena.

(2) SACCO Dott. FEDERICO — *Il Bacino terziario e quaternario del Piemonte* — Torino, 1889-90, pag. 488.

un *habitat* di acque poco profonde e generalmente di litorale. Nei depositi di spiaggia del nostro Mar Tirreno se ne rinvennero abbondanti esemplari.

La fauna fossile foraminifera di Villarvernia presenta un *facies* tutto speciale per questa abbondanza veramente straordinaria di *Milioline* e *Truncatuline*, e questo fatto è forse unico in tutto il Piemonte, trovandosene bensì esemplari ovunque, ma sempre in scarso numero.

Non mi farò a descrivere le singole specie, non avendo esse alcun che di particolare; mi basterà compilarne il catalogo con alcune piccole osservazioni riferentisi principalmente alla sinonimia per il Piemonte.

1. — **Miliolina secans** (d'Orbigny).

(*Quinqueloculina secans* d'Orbigny. 1826. Ann. Sc. Naturali. Vol. VII, pag. 303, n. 43, mod. n. 96.)

È la specie che ha maggior numero di esemplari, di tutte le dimensioni (secondo età). Nei catalogi dei foraminiferi foss. piemontesi figura per la prima volta.

2. — **Miliolina seminulum** (Linné).

(*Serpula seminulum*, Linné 1767. Syst. Nat., 12 th., ed, pagina 1264).

Questa specie già conosciuta nel Piemonte, come ovunque, è rappresentata da altre 20 esemplari, ben conservati. Essa è la *Triloculina carinata* registrata dal Micheletti.

3. — **Miliolina linnaeana** (d'Orbigny).

(*Triloculina linnaeana*, d'Orbigny 1839. Foram. Cuba sog. 153. Tav. IX, fig. 11-13).

Non fu ancora considerata nelle specie piemontesi, ed è quivi rappresentata da varii esemplari.

4. — **Miliolina subrotunda** (Montagu),

(*Vermiculum subrotundum*, Montagu 1803. Test. Brit. part. 2, pag. 521).

Moltissimi esemplari tutti minori di 1 mm., di aspetto molto poroso. È per la prima volta registrata in Piemonte.

5. — **Truncatulina lobatula** (Walker e Jacob).

(*Nautilus lobatulus*, Walker and Jacob. 1798. Adams' Essays, Kanmacher's ed. p. 642. Tav. XIV, fig. 36).

Questa specie, fu già conosciuta, esistente nel nostro bacino terziario, anche considerata nella *Truncatulina boueana* d'Orb. sinonima. Avendo osservato che qualche autore la descrive come di colore bianco candido, devo notare che tutti i moltissimi esemplari di Villarvernia sono invece di color grigio chiaro. Meno di 1 mm. di diametro.

6. — **Globigerina bulloides** d'Orbigny.

(*Globigerina bulloides*, d'Orbigny. 1826. Ann. Sc. Nat. vol. VII, pag. 277, n. 1. Mod. n. 16 e 76).

Questa specie comunissima e già conosciuta è rappresentata da buon numero di esemplari. La presenza di queste globigerine non può mutare il criterio di deposito poco profondo, perchè il suo *habitat* si estende dai 500 ai 6000 metri.

7. — **Nonionina scapha** (Fichtel e Moll).

(*Nautilus scapha*, Fichtel and Moll. 1803. Test. micr. pag. 105. Tav. XIX, fig. *d-f*).

Questa specie, rappresentata da varii piccoli esemplari di meno di 1 mill., è già conosciuta anche sotto il sinonimo di N. *boueana*.

8. — **Polystomella crispa** Lamark.

(*Polystomella crispa*, Lamark 1822. Anim. s. Vert. Vol. VII, pag. 625, n. 1).

Vari esemplari di tutte le dimensioni sino a raggiungere il diametro di 2 mm.

9. — **Textularia trochus** d'Orbigny.

(*Textularia trochus*, d'Orbigny 1840. Mém. Soc. Géol. France. vol. IV, pag. 45. Tav. IV, fig. 25, 26).

Specie ovunque sparsa nei mari attuali, e rappresentata fossile in questa località da pochi esemplari (6?), fra cui alcuni piccolissimi.

10. — Biloculina ringens (LAMARK).

(*Miliolites ringens*, Lamark 1804. Ann. du Muséum vol. V. pag. 351; Vol. IX. Tav. XVII, fig 1).

Questa specie è già conosciuta in Piemonte sotto il nome di B. *simplex* d'Orbigny. Essa però non è sinonima della *Biloculina complanata*, descritta come specie di Villarvernia, la quale appartiene al gen. Miliolina.

11. — Discorbina orbicularis (TERQUEM).

(*Rosalina orbicularis*, Terquem 1876. Anim. sur la Plage de Dunck. pag. 75, Tav. IX, fig. 4).

Pochi esemplari di mm. 0,45 circa. Già conosciuta.

12. Bolivina punctata d'ORBIGNY.

(*Bolivina punctata*, d' Orbigny. 1839. Foram. Am. Mérid. pag. 61, Tav. VIII, fig. 10-12).

Questi pochi esemplari si avvicinano più alla forma figurata dal Terrigi 1880. Fora. Marne Vatic. Tav. II, fig. 41, tolta però la carena. Già conosciuta.

Devo poi osservare che si sono inoltre rinvenuti alcuni esemplari mal conservati di *Rhabdogonium* cf. *tricarinatum* d'Orb.; di *Cristellaria rotulata* Lmk.; e di *Nodosaria*, *Rotalia*, *Pulvinulina*, *Uvigerina*, *Virgulina*.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 7ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Febbraio 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Cossa, Bruno, Berruti, Siacci, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Socio Segretario presenta in dono all'Accademia, a nome dell'autore, una Memoria stampata, col titolo: *Ricerche sopra l'azione fisiologica del massaggio sui muscoli dell'uomo*, del Dott. Arnaldo Maggiora, Professore incaricato d'Igiene nella R. Università di Torino.

Il Socio Ferraris presenta e legge una Nota dell'Ing. Elia Ovazza, Assistente alla Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri di Torino, intitolata: *Sul calcolo delle travi reticolari elastiche ad aste sovrabbondanti.* Questo lavoro sarà pubblicato negli *Atti*.

LETTURE

Sul calcolo delle travi reticolari elastiche ad aste sovrabbondanti;

dell'Ingegnere ELIA OVAZZA

1. In questa Nota considereremo soltanto le travi che si possono chiamare *reticolari doppie*, perchè costituite da sbarre collegate fra di loro a cerniera alle estremità ed aventi per assi rette compiane e costituenti lati e diagonali di successivi quadrilateri aventi ciascuno un lato comune col precedente ed il lato opposto comune col seguente (fig. 1ª).

2. Chiameremo *pannello* l'insieme delle sei sbarre formanti un quadrilatero elementare della travatura; *montanti* le aste (m) disposte secondo i lati comuni ai successivi quadrilateri e quelle dei pannelli di estremità opposte ai montanti che questi pannelli hanno in comune col secondo e col penultimo. Diremo *aste di contorno* (a, c) quelle distese secondo i lati appartenenti esclusivamente ad un pannello, esclusi i montanti di estremità; *aste diagonali* quelle aventi assi secondo le diagonali (d) dei quadrilateri elementari.

3. Supporremo inoltre che le forze sollecitanti la travatura, carichi e reazioni di appoggio, abbiano linee di azione giacenti nel piano degli assi delle sbarre, — *piano del sistema* — e punti di applicazione nei punti d'incontro di detti assi — *nodi* della travatura. Con ciò riteniamo per semplicità ripartito il peso proprio di ogni sbarra sopra i nodi suoi estremi.

4. Anche nel caso, qui esclusivamente considerato, in cui le reazioni di appoggio sono staticamente determinate, il calcolo delle tensioni nelle singole sbarre è problema per cui non basta la statica dei corpi rigidi. Invero, tolta una diagonale per ciascun pannello, la travatura diventa triangolare, strettamente indefor-

mabile e perciò determinata staticamente anche per riguardo alle tensioni interne; ognuna delle travature che consideriamo contiene dunque tante aste sovrabbondanti quanti sono i pannelli che la costituiscono: laonde alle equazioni di equilibrio della statica vanno aggiunte altrettante equazioni di condizione da dedursi dalla teoria dell'elasticità — altrettante *equazioni di elasticità* — quanti sono i pannelli. Ora, se anche questi non sono in numero molto grande, è pur notevole la quantità di operazioni numeriche da eseguirsi per la soluzione numerica rigorosa del problema; aggiungasi che, per la forma stessa delle equazioni di elasticità, dette operazioni numeriche sono così l'una con l'altra concatenate, che occorre rattenere fra limiti strettissimi l'approssimazione del risultato di ogni singola operazione, se i risultati finali del calcolo vogliónsi con un'approssimazione sufficiente per gli usi della pratica.

5. Presentasi perciò opportuno un *metodo di calcolo per via grafica* da condursi di pari passo col calcolo numerico; quello eviterà gli errori grossolani probabilissimi in questo, mentre questo correggerà gli errori di non sufficiente approssimazione, più probabili in un calcolo grafico.

Rimandando per quel che riguarda i particolari del calcolo numerico ai molti lavori pubblicati sull'argomento (*), noi qui ci limiteremo all'esposizione di una *soluzione completamente grafica*, che non si riduce alla soluzione in via grafica di relazioni dedotte in via algebrica (**), e che non crediamo ancora applicata nè conosciuta nel mondo tecnico.

6. Fra le lunghezze dei sei lati di un quadrangolo completo corre, com'è noto, una relazione determinante una qualunque di

(*) W. RITTER, *Anwendungen der graphischen Statick*. 2a Theil; Zürich 1890.

V. CERRUTI, *Sistemi elastici articolati*. Torino 1873.

M. LEWY, *Statique graphique*, IV Partie. 1888 Paris.

H. MÜLLER-BRESLAU. *Theorie und Berechnung der eisernen Bogenbrücken*. Berlin 1880.

H. MÜLLER-BRESLAU, *Die graphische Statik der Baukonstruktionen*. Band II. Leipzig 1892.

(**) Cfr. M. GEBBIA, *Le travature reticolari a membri sovrabbondanti*. Atti del Collegio degli Ingegneri di Palermo, 1881.

Id. id. *Sugli sforzi interni dei sistemi articolati*. Atti della R. Accademia dei Lincei. 1881-82, Roma.

esse, conosciute che sieno le altre cinque. È classica la forma seguente, data a tale relazione dal Cayley: (*)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d^2_{1,2} & d^2_{1,3} & d^2_{1,4} \\ 1 & d^2_{2,1} & 0 & d^2_{2,3} & d^2_{2,4} \\ 1 & d^2_{3,1} & d^2_{3,2} & 0 & d^2_{3,4} \\ 1 & d^2_{4,1} & d^2_{4,2} & d^2_{4,3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ove con $d_{h,k}$ indicasi la distanza di due qualunque, h e k, dei vertici 1, 2, 3, 4 del quadrangolo.

Differenziata questa relazione rispetto alle sei lunghezze ch'essa contiene, se, come suolsi, trascuransi le potenze superiori alla prima delle deformazioni elastiche, sostituito nell'eguaglianza ottenuta ai differenziali le corrispondenti dilatazioni elastiche, si ottiene una relazione di primo grado fra le dilatazioni elastiche simultanee delle sei sbarre formanti un medesimo pannello. Se ora in questa relazione si sostituiscono alle dilatazioni le loro espressioni, di primo grado, in funzione delle tensioni elastiche loro cause, si ottiene *l'equazione di elasticità* corrispondente al pannello considerato, equazione che evidentemente è *di primo grado nelle tensioni* che insieme collega.

7. Ciò posto, dette V e V' le tensioni dei montanti v e v' di un pannello in equilibrio sotto l'azione di forze esterne ad esso applicate sui nodi (fig. 2), tolgasi il montante v ed ai nodi Q ed R da esso collegati si applichino due forze d'intensità V e di versi opposti, dirette secondo l'asse dell'asta soppressa v, e perciò rappresentanti l'azione di quest'asta sopra i nodi suoi estremi. Scrivansi le equazioni d'equilibrio di questi nodi, due per nodo, e l'equazione di elasticità relativa al pannello che si considera. Eliminate fra queste cinque equazioni le tensioni delle sbarre di contorno e delle diagonali, risulta un'unica relazione di primo grado fra V e V', cui può darsi la forma:

$$V' - \alpha = \beta \, . \, V \, ,$$

(*) V. Cerruti, l. c.

S. Canevazzi, *Meccanica applicata alle costruzioni*, Parte 1ª. Torino 1890.

Salmon-Fiedler, *Analitische Geometrie des Raumen*, 1° Band, pag. 76, 1879.

Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten* — Leipzig. 1881.

ove α e β sono quantità dipendenti dalle forze esterne applicate ai nodi Q ed R del montante v e dalle dimensioni del sistema elastico costituente il pannello.

Dato a V una serie di valori arbitrarî, la relazione precedente fornirà quindi una serie di corrispondenti valori della tensione V', tali che assunti i valori di V a misure delle ascisse dei punti di una punteggiata, e similmente i valori di V' come misure delle ascisse degli elementi di altra punteggiata, ottengonsi *due punteggiate simili*, perfettamente *individuate da due coppie* di elementi omologhi. Basteranno dunque *due tentativi* perchè se ne possa dedurre il valore di V corrispondente ad uno speciale valore di V', soggetto a determinata condizione, come per es., a quella dell'equilibrio di ciascuno dei nodi collegati dal montante v'.

8. A tale conclusione, direttamente deducibile dal fatto che sono da determinarsi *due soli costanti* α e β, perchè venga individuata l'indicata relazione fra le tensioni V e V', si giunge anche mediante le considerazioni seguenti, da cui otterremo appunto un metodo di calcolo per via grafica delle tensioni V' corrispondenti a fissati valori delle V.

9. Sieno β e β' le aree delle sezioni trasversali dei montanti v, v'; γ e δ quelle delle diagonali c e d; ω e ν quelle delle aste di contorno o ed u. Indichiamo con una medesima lettera caduna sbarra e la sua lunghezza misurata sull'asse. Sieno P_Q e P_R le forze esterne applicate ai nodi Q ed R, estremi del montante v. Assunta ad arbitrio la tensione V di questo montante, mediante i quadrilateri di equilibrio dei nodi Q ed R, deducansi i corrispondenti valori, O, U, C, D, delle tensioni delle sbarre o, u, c, d. Si calcolino le corrispondenti dilatazioni δo, δu, δc, δd, δv, delle lunghezze o, u, c, d, v, mediante le note formule di elasticità:

$$\delta o = \frac{Oo}{E\omega}, \quad \delta u = \frac{Uu}{E\nu}, \quad \delta c = \frac{Cc}{E\gamma}, \quad \delta d = \frac{Dd}{E\alpha}, \quad \delta v = \frac{Vv}{E\beta},$$

che suppongono, come per semplicità ammetteremo sempre in seguito, costante per tutte le sbarre il modulo E di elasticità longitudinale.

Poichè anzi in seguito occorreranno soltanto quantità proporzionali a dette dilatazioni, assumasi per semplicità $E = 1$,

e per costante di proporzionalità il rapporto $\frac{v}{\beta}$, sicchè risulti in valore numerico:

$$\partial v = V.$$

Dovrà assumersi di conseguenza:

$$\partial o = O\frac{o}{v}\frac{\beta}{\omega}, \quad \partial u = U\frac{u}{v}\frac{\beta}{\nu}, \quad \partial c = C\frac{c}{v}\frac{\beta}{\gamma}, \quad \partial d = D\frac{d}{v}\frac{\beta}{\delta},$$

e genericamente:

$$\partial l = S\frac{l}{v}\frac{\beta}{\varphi},$$

indicando con l la lunghezza e con φ l'area della sezione trasversale dell'asta tesa dalla forza S. (*).

10. Note le dilatazioni, ∂l, si supponga fisso uno qualunque dei nodi estremi del montante v, il nodo Q, per esempio, e si supponga invariabile la direzione dell'asse di questo montante; tenendo conto del segno delle singole dilatazioni, mediante un

---

(*) Sull'asse x d'un sistema di assi cartesiani ortogonali $O(xy)$—(fig. 3ª), portisi OP misurante in certa scala l'area β, e sull'asse y il segmento $\overline{OO_1} = v$, e conducasi O_1O_2 parallela ad x. Si segni su O_1O_2 il punto L per cui sia $OL = l$, e su OL si porti Of misurante l'area φ nella scala in cui l'area β è misurata da OP. Proiettisi f in P su Oy parallelamente ad Ox, e p da P. Inserito nell'angolo PPO parallelamente ad Oy il segmento HK misurante la tensione S, in PK, si ha la misura della dilatazione ∂l nel rapporto prestabilito.

Può in certi casi essere preferibile la seguente costruzione data dal Williot Su due rette parallele (fig. 4ª) si segnino due segmenti AB e DE misuranti: il 1° la lunghezza l in una scala fissata di λ unità lineari per metro, il 2° la tensione S in altra data scala, di t unità lineari per kg; prolunghisi DE del segmento CD misurante l'area φ nella scala di $\frac{E\lambda t}{\lambda'}$ unità lineari per metro quadrato, e proiettisi E in H sulla AB dal punto I di concorso delle rette AC e BD; il segmento BH misura ∂l nella scala, da fissarsi ad arbitrio, di λ' unità lineari per metro. (Non occorre osservare che il modulo E quì intendesi misurato in chilogrammi per metro quadrato).

Nelle applicazioni queste operazioni grafiche si semplificano, molte sbarre avendo lunghezze eguali ovvero sezioni trasversali equivalenti. Per altro bene spesso dette operazioni si sostituiscono con vantaggio rilevante con l'uso del regolo logaritmico.

diagramma Williot. (*) deducasi la corrispondente dilatazione $\delta v'$ del montante v'.

A tal fine (fig. 5[a]) per un punto arbitrario Q', polo del diagramma, avendo riguardo ai segni, (in figura si supposero positive tutte le dilatazioni), conducansi nelle direzioni o, d, v rispettivamente le dilatazioni calcolate δo, δd, δv in $Q'M'$, $Q'N'$, $Q'R'$. Per R' nelle direzioni c ed u guidinsi le dilatazioni δc e δu in $R'T'$ ed $R'S'$. Si conducano per S' ed N' le normali ad u e d rispettivamente, e si incontrino in H'; quindi per M' e T' le normali ad o e c, incontrantisi in K'; la proiezione ortogonale $\eta'\chi'$ del segmento $H'K'$ sulla direzione v' dà la dilatazione $\delta v'$ del montante v' nella scala assunta per le dilatazioni. Se ne dedurrà facilmente la tensione V' del montante v' mercè la relazione:

$$V' = \frac{r}{l} \frac{\varphi}{\rho} \cdot \delta v'$$

11. Se indichiamo con l'indice o le posizioni dei punti M', N', R', T', S', H', K', η', χ' corrispondente all'ipotesi di $V=o$, (R'_0 coincide con il polo Q'), poichè i seguenti M_0M', N_0N', R'_0R' variano proporzionalmente a V, e così pure avviene delle differenze $\overline{R'S'}-\overline{R'_0S}$, ed $\overline{R'T'}-\overline{R'_0T_0}$, col variare di V i punti T' ed S', e perciò i punti H' e K', η' e χ' descrivono altrettante punteggiate simili a quella descritta da R'. Avremo quindi

$$\frac{\overline{\eta\chi} - \overline{\eta_0\chi_0}}{\overline{Q'R'}} = \text{costante} ,$$

onde la conseguenza ottenuta in via analitica al numero 6.

(*) Williot, *Notions pratiques de la statique grafique*, Génie civil. Octobre 1887. Paris.

E. Ovazza, *Sul calcolo delle deformazioni dei sistemi articolati.* Torino, Loescher, 1888.

Id. id. *Sul calcolo delle freccie elastiche delle travi reticolari.* Torino, Loescher 1888.

Mohr, *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne.* Civilingenieur 1887.

Krohn, *Der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.* Zeitschrift des. Arch-und-Ing. Vereins zu Hannover 1884.

R. Land, *Kinematische Theorie der statisch bestimmten Träger.* Zeitschrift des veosterr. Arc. und. Ing. Vereins. Heft. 1, 1888.

Müller-Breslau, *Die graphische Statik.* l. c.

W. Ritter, l. c.

12. Proiettisi la spezzata chiusa $K'M'Q'R'T'K'$ ortogonalmente una volta sulla direzione del segmento $\overline{M'K'}=x$, ed un'altra volta sulla direzione del segmento $\overline{T'K'}=y$. Analogamente proiettisi ortogonalmente sulle direzioni di $\overline{N'H'}=x'$ e di $\overline{S'H'}=y'$ la spezzata chiusa $H'N'Q'R'S'H'$, e si esprima con eguaglianze l'annullarsi di ogni singola proiezione.

Otteniamo quattro equazioni che risolte rispetto alle quantità x, y, x', y', diventano:

$$\left.\begin{aligned} x \operatorname{sen}^2(oc) = \left[\operatorname{sen}(vc)\cos(oc) - \operatorname{sen}(ov)\right]\delta v \\ + \operatorname{sen}(oc).\delta c - \operatorname{sen}(oc).\cos(oc).\delta o. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} y \operatorname{sen}^2(oc) = \left[\operatorname{sen}(vc) - \operatorname{sen}(ov)\cos(oc)\right]\delta v \\ - \operatorname{sen}(oc).\delta o + \operatorname{sen}(oc).\cos(oc).\delta c \end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} x' \operatorname{sen}^2(ud) = \left[\operatorname{sen}(uv)\cos(ud) - \operatorname{sen}(vd)\right]\delta v \\ + \operatorname{sen}(ud).\delta u - \operatorname{sen}(ud).\cos(ud).\delta d \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

$$\left.\begin{aligned} y' \operatorname{sen}^2(ud) = \left[\operatorname{sen}(uv) - \operatorname{sen}(vd)\cos(ud)\right]\delta v \\ - \operatorname{sen}(ud)\ \delta d + \operatorname{sen}(ud).\cos(ud).\delta u \end{aligned}\right\} \quad \ldots (4)$$

Si proiettino ortogonalmente sulla direzione v' le spezzate aperte $K'M'Q'R'S'H'$ e $R'T'R'Q'N'H'$, e si eguaglino le proiezioni a dv'. Sommate membro a membro le due eguaglianze così ottenute, si ha:

$$\left.\begin{aligned} 2.\delta v' = x \operatorname{sen}(ov') + y \operatorname{sen}(cv') - x' \operatorname{sen}(dv') - y' \operatorname{sen}(uv') \\ - \delta o.\cos(ov') + \delta u.\cos(uv') - \delta c \cos(cv') + \delta d.\cos(dv') \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

Eliminate fra le cinque precedenti relazioni le quantità x, y, x', y', dopo una serie di riduzioni, si ottiene la seguente relazione, coincidente con quella che si ottiene dalla differenziazione della sopra ricordata formola del Cayley (*), collegante le

(*) Cfr. V. Cerruti, l. c. pag. 38.

dilatazioni simultanee delle sei sbarre del pannello considerato (*):

$$\frac{\operatorname{sen}(vc).\operatorname{sen}(v'd)}{\bar{o}}\delta u - \frac{\operatorname{sen}(vu).\operatorname{sen}(v'o)}{\bar{d}}\delta c + \frac{\operatorname{sen}(uc).\operatorname{sen}(od)}{\bar{v}'}\delta v$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(ud)\operatorname{sen}(oc)}{\bar{v}}\delta v' - \frac{\operatorname{sen}(uv')\operatorname{sen}(ov)}{\bar{c}}\delta d + \frac{\operatorname{sen}(v'c)\operatorname{sen}(vd)}{\bar{u}}\delta o = 0.$$

(*) Sostituito nella (5) ad x, y, x', y' le loro espressioni dedotte dalle (1), (2), (3), (4) e poste in evidenza, nell'eguaglianza che risulta, le dilatazioni δ, si ottiene:

$$\begin{aligned}2.\delta v' = &-\left[\cos(ov') + \frac{\operatorname{sen}(ov').\cos(oc)}{\operatorname{sen}(oc)} + \frac{\operatorname{sen}(cv')}{\operatorname{sen}(oc)}\right]\delta o\\ &-\left[\cos(uv') + \frac{\operatorname{sen}(uv')\cos(ud)}{\operatorname{sen}(ud)} + \frac{\operatorname{sen}(dv')}{\operatorname{sen}(ud)}\right]\delta u\\ &+\left[\cos(cv') + \frac{\cos(cv')\cos(oc)}{\operatorname{sen}(oc)} + \frac{\operatorname{sen}(ov')}{\operatorname{sen}(oc)}\right]\delta c\\ &+\left[\cos(dv') + \frac{\operatorname{sen}(dv')\cos(ud)}{\operatorname{sen}(ud)} + \frac{\operatorname{sen}(uv')}{\operatorname{sen}(ud)}\right]\delta d + \mu.\delta v. \quad \ldots\ldots(6)\end{aligned}$$

ove

$$\mu = \frac{-\operatorname{sen}(ov')\operatorname{sen}(ov)+\operatorname{sen}(vc)\cos(oc)\operatorname{sen}(ov')+\operatorname{sen}(cv')\operatorname{sen}(vc)-\cos(oc)\operatorname{sen}(ov)\operatorname{sen}(cv')}{\operatorname{sen}^2(oc)}$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(dv')\operatorname{sen}(dv)-\operatorname{sen}(uv)\cos(ud)\operatorname{sen}(dv')-\operatorname{sen}(uv')\operatorname{sen}(uv)+\operatorname{sen}(uv')\operatorname{sen}(vd)\cos(ud}{\operatorname{sen}^2(ud)}$$

Si moltiplichino ambo i membri della (6) per $\frac{\operatorname{sen}(oc)\operatorname{sen}(ud)}{v}$. Mediante la nota relazione di proporzionalità fra le lunghezze dei lati ed i seni degli angoli opposti d'un triangolo, applicata ai triangoli *uvd* ed *ovc*, la (6) trasformasi nella seguente:

$$\frac{\operatorname{sen}(oc)\operatorname{sen}(ud)}{\bar{v}}\delta v' + \frac{\operatorname{sen}(v'c).\operatorname{sen}(ud)}{\bar{u}}\delta o + \frac{\operatorname{sen}(vc).\operatorname{sen}(v'd)}{\bar{o}}\delta u$$

$$-\frac{\operatorname{sen}(vu)\operatorname{sen}(v'o)}{\bar{d}}\delta c - \frac{\operatorname{sen}(ov)\operatorname{sen}(uv')}{\bar{c}}\delta d + \mu'\frac{\delta v}{2v} = 0$$

posto

$$\mu' = \frac{\operatorname{sen}(ud)}{\operatorname{sen}(oc)}\left[\begin{array}{l}-\operatorname{sen}(ov')\operatorname{sen}(ov)+\operatorname{sen}(vc)\cos(oc)\operatorname{sen}ov'+\operatorname{sen}(cv')\operatorname{sen}(cv)-\\ -\cos(oc)\operatorname{sen}(ov)\operatorname{sen}(cv')\end{array}\right]$$

$$+\frac{\operatorname{sen}(oc)}{\operatorname{sen}(ud)}\left[\begin{array}{l}\operatorname{sen}(dv')\operatorname{sen}(dv)-\operatorname{sen}(uv)\cos(ud)\operatorname{sen}(dv')-\operatorname{sen}(uv')\operatorname{sen}(uv)+\\ +\operatorname{sen}(uv')\operatorname{sen}(vd)\cos(uc)\end{array}\right]$$

Se ora osservasi che

$$\operatorname{sen}(ov) = \operatorname{sen}\left[(vc)+(oc)\right], \quad \operatorname{sen}(dv) = \operatorname{sen}\left[(ud)+(uv)\right],$$
$$\operatorname{sen}(uv) = \operatorname{sen}\left[(vd)+(du)\right], \quad \operatorname{sen}(cv) = \operatorname{sen}\left[(ov)+(oc)\right]$$

13. Ciò posto, dovendosi calcolare una travatura reticolare piana doppia, assunta ad arbitrio la tensione V'_0 del montante libero del primo pannello, se ne deduca il corrispondente valore V'_1 della tensione del montante comune al primo ed al secondo pannello mediante la costruzione grafica indicata. Quindi dalla tensione V'_1, applicando il medesimo procedimento grafico al secondo pannello, e considerando come forze esterne al secondo pannello anche le tensioni delle aste di contorno e delle diagonali del primo pannello, deducasi la corrispondente tensione V'_2 del montante successivo. E così si proceda di pannello in pannello fino ad ottenere la tensione V'_n dell'ultimo montante, che corrisponde all'assunto valore V'_0 della tensione del primo montante. Questa tensione V'_n, salvo un caso, non soddisfa generalmente alle condizioni di equilibrio dei nodi su cui agisce. Si assuma perciò un secondo valore V''_0 della tensione del primo montante e, procedendo come prima, se ne deduca il corrispondente valore V''_n della tensione dell'ultimo montante. Dalle due coppie di valori simultanei V'_0 e V'_n, V''_0 e V''_n, potrà ricavarsi il valore V_0 che corrisponde a quel valore V_n il quale soddisfa alle condizioni di equilibrio dei nodi collegati dall'ultimo montante.

14. La cosa appare chiara su di un esempio, che ora noi consideriamo per fissare le idee, senza perciò nuocere per nulla alla generalità della trattazione. Determinate le reazioni degli appoggi, si disegni la poligonale chiusa delle forze esterne, disponendo queste nell'ordine in cui trovansi applicate girando per uno stesso verso sul contorno della travatura. Nel nostro caso consideriamo una travatura composta di due soli pannelli I II V VI e II III IV V appoggiata orizzontalmente nel nodo III ed avente fisso il nodo *I*. (fig. 6ª). Supposti caricati i nodi II, IV, V, VI rispettivamente dalle forze $\overline{ab}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, $\overline{ef}$, mediante un poligono funicolare (figure 6ª e 7ª) collegante queste forze ed avente il primo lato passante pel nodo I, si determinano le reazioni: $\overline{bc}$ verticale applicata al nodo III ed $\overline{fa}$ applicata al

e si applica il Teorema di trigonometria su ricordato ai triangoli *uvd*, *ou'd* *ovc*, *uv'c*, si deduce

$$\mu' = 2\frac{v}{v'}\,\text{sen}\,(uc)\,\text{sen}\,(od).$$

Onde la relazione finale del numero 12.

nodo I nella direzione determinata dalla costruzione stessa. Si rifece (fig. 8ª) la poligonale delle forze *abcdefa*, disponendo queste nell'ordine in cui si incontrano i loro punti di applicazione girando sul contorno della travatura pel verso I II III IV V VI. Per cadun vertice di questa poligonale delle forze si guidi, indefinitamente, la parallela all'asta di contorno collegante i punti di applicazione delle forze esterne misurate dai lati della poligonale concorrenti in quel vertice. Fin quì procedesi come se si volesse disegnare la figura reciproca dello schema della travatura nell'ipotesi in cui, per mancanza di una diagonale per pannello, la travatura fosse strettamente indeformabile e perciò staticamente determinata.

Pel vertice f comune ai lati della poligonale ef ed fa misuranti le forze esterne applicate ai nodi I e VI si conduca la retta 1 parallela alla retta 1 dello schema della trave e vi si segni un punto A' ad arbitrio. Si conducano per A' le parallele alle diagonali del 1° pannello I II V VI fino all'incontro delle parallele 2 e 4 alle aste omonime di contorno del medesimo pannello in Z e V, e si compia il parallelogrammo $VA'ZB'$. Se il segmento fA' misura la tensione del montante 1, avremo nei poligoni $A'faVA'$, $efA'Ze$, $A'VB'Z$ i poligoni di equilibrio dei nodi I, VI, VII, considerando per comodità di esposizione come nodi anche i punti d'incrocio VII ed VIII delle diagonali di cadun pannello. Dalle tensioni così ottenute delle sbarre 1, 2, 3, (3), 4, deducasi con la indicata costruzione grafica per un pannello in genere, la corrispondente tensione del montante 5, e si inserisca nel diagramma degli sforzi in $B'C'$ parallela alla retta 5 dello schema.

15. Avanti di proseguire, si osservi che supposti per la tensione del montante 1 altri valori $\overline{fA''}$, $\overline{fA'''}$, . . . , il diagramma si modifica per modo che le punteggiate descritte corrispondentemente dai punti V e Z col muoversi del punto A' sono simili alla punteggiata $A'A''A'''$. . . ; sono quindi simili, e perciò prospettivi, i fasci improprii (con centro all'infinito) descritti dalle rette VB', ZB'. Segue che, col muoversi di A' sulla 1, B' si muove su di una retta fissa descrivendo una punteggiata simile alla $A'A''A'''$. . . Che se anzi osservasi che quando A' coincide col punto M comune alle rette 1 e 4, il punto B' coincide col punto P comune alla retta 2 ed alla parallela 3 per M alla diagonale 3; e che se A' coincide con U, intersezione delle

rette 2 ed 1, B' cade in Y, punto d'intersezione della 4 con la parallela (3) per V all'altra diagonale (3), si deduce una semplicissima costruzione della retta sostegno della punteggiata $B'B''B'''$... Questa retta, come risulta da tale costruzione, è la *reciproca* 5 *della retta* 5 *dello schema* della travatura nell'ipotesi in cui, tolta una qualunque delle diagonali del primo pannello, si disegni il diagramma reciproco della travatura così modificata. Segue che su questa retta stessa va disteso il segmento $B'C'$ misurante la tensione del montante 5.

16. I punti M e P essendo punti omologhi nelle punteggiate $A'A''A'''\ldots$, $B'B''B'''\ldots$, si ha:

$$\frac{\overline{MA'}}{\overline{PB'}}=\frac{\overline{MA''}}{\overline{PB''}}=\frac{\overline{MA'''}}{\overline{PB'''}}=\ldots=h \text{ (costante).}$$

Ma da quanto venne dimostrato analiticamente a numero 6 e sinteticamente a numero, 11, si ha pure:

$$\frac{\overline{A'A''}}{\overline{B''C''}-\overline{B'C'}}=\frac{\overline{A''A'''}}{\overline{B'''C'''}-\overline{B''C''}}=\ldots=k \text{ (costante);}$$

sarà quindi

$$\overline{A'A''}=\overline{MA''}-\overline{MA'}=k\left|(\overline{PC''}-\overline{PC'})-(\overline{PB''}-\overline{PB'})\right|=k$$

$$\left(\overline{PC''}-\overline{PC'}\right)-\frac{k}{h}\left(\overline{MA''}-\overline{MA'}\right)=k.\overline{C'C''}-\frac{k}{h}\overline{A'A''}$$

Onde

$$\overline{A'A''}=\frac{kh}{h+k}.\overline{C'C''}=k'\,\overline{C'C''}$$

ed analogamente

$$\overline{A''A'''}=k'\,\overline{C''C'''},$$

in generale

$$\frac{\overline{A'A''}}{\overline{C'C''}}=\frac{\overline{A''A'''}}{\overline{C''C'''}}=\ldots=k' \text{ (costante).}$$

I punti $C'C''C'''\ldots$ costituiscono adunque una punteggiata simile alla $A'A''A'''\ldots$

17. Portata in $B'C'$ sulla retta 5 del diagramma la tensione trovata del montante 5 corrispondente alla tensione fA' del montante 1, conducansi per C' le parallele alle diagonali

7 e (7) del secondo pannello fino all'incontro in X ed Y con le parallele 6 ed 8 alle aste di contorno del medesimo pannello, e compiasi il parallelogrammo $XC'YD'$. I poligoni $deZB'C'Xd$, $abYC'B'Va$, $C'XD'Y$ sono i poligoni di equilibrio dei nodi V, II, VIII della travatura. Col variare della posizione del punto A' sulla retta 1, e perciò del punto C' sulla retta 5, anche il punto D' descrive una retta, la quale, dimostrasi come per la retta 5 sostegno della punteggiata $B'B''B'''\ldots$, è la *reciproca della retta* 9 *dello schema* della travatura strettamente indeformabile che si ottiene togliendo una diagonale per pannello. Il luogo dei punti D' è quindi la parallela all'asta 9 condotta pel vertice c della poligonale delle forze, ed anzi le punteggiate descritte dai punti C' e D', $C'C''C'''\ldots$ e $D'D''D'''\ldots$, sono simili, essendone elementi omologhi le intersezioni Q ed R delle coppie di rette 5 e 6, 8 e 9 del diagramma. Dai poligoni di equilibrio così ottenuti, si deduca al solito modo il valore della tensione del montante 9 corrispondente alla tensione $B'C'$ del montante 5, e si inserisca nel diagramma degli sforzi in $D'E'$ parallelamente all'asta 9 e però sulla reciproca 9.

Se il punto E' risultasse coincidente col vertice c della poligonale delle forze, la tensione trovata $D'E'$ soddisferebbe alle condizioni di equilibrio dei nodi III e IV, per i quali sarebbero poligoni d'equilibrio rispettivamente i poligoni $bcD'Yb$, $cdXD'c$.

18. Meno che per caso, il punto E' non risulta coincidente col vertice c della poligonale delle forze. Osservisi però che col variare della tensione V_0 del primo montante, le tensioni nelle sbarre 2, 3, (3), 4 del primo pannello, da considerarsi come forze esterne insieme con le $\overline{ab}$ e $\overline{de}$ rispetto al secondo pannello, variano linearmente con V_0, e così dicasi della tensione V_1 del primo montante, che se ne deduce. Segue che anche le tensioni nelle aste 6, 7, (7) ed 8 del secondo pannello variano linearmente con V_0, e per conseguenza anche la tensione V_2 del terzo montante 9.

Se quindi indichiamo con δ ed ε le posizioni dei punti D' ed E' per l'ipotesi di $V_0 = o$, per cui A' cade in f, si ha per due coppie qualunque di valori corrispondenti delle tensioni V_0 e V_2:

$$\overline{fA'} \text{ e } \overline{D'E'},\ \overline{fA''} \text{ e } \overline{D''E''}:$$

$$\overline{fA'} = k''\,(\overline{D'E'} - \overline{\delta\varepsilon})$$

$$\overline{fA''} = k''\,(\overline{D''E''} - \overline{\delta\varepsilon})$$

essendo k'' una costante.

Sarà perciò:

$$\overline{A'A''} = \overline{fA''} - \overline{fA'} = k'' \, (\overline{D''E''} - \overline{D'E'}),$$

ossia

$$\overline{A'A''} = k'' \left[(\overline{RE''} - \overline{RE'}) - (\overline{RD''} - \overline{RD'}) \right] = k''. \overline{E'E''} - k''. \overline{D'D''}.$$

Ma dalla similitudine delle punteggiate $C'C''C'''\ldots\ldots$, $D'D''D'''\ldots$ si ha pure:

$$\overline{D'D''} = h''. \overline{C'C''},$$

e dal numero 16:

$$\overline{C'C''} = \frac{1}{k'} \overline{A'A''};$$

deducesene:

$$\overline{A'A''} = K. \overline{E'E''},$$

essendo K una costante di proporzionalità.

Le punteggiate $fA'A''A'''\ldots$, $\varepsilon E'E''E'''\ldots$ sono quindi pur esse simili.

19. Basterà cercare il punto A della prima che corrisponde al punto della seconda coincidente con c, per ottenere in $\overline{fA}$ la misura del vero valore V_0 della tensione del primo montante.

A tal uopo su una parallela (9) alla retta 9 del diagramma degli sforzi, si porti il segmento $\overline{(A')(A'')} = \overline{A'A''}$, e si proietti il punto c sulla (9) in (A) dal punto comune alle rette $(A')E'$ ed $(A'')E''$. Si riporti sulla 9 il punto A per modo che abbiasi:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AA''}} = \frac{\overline{(A)(A')}}{\overline{(A)(A'')}}:$$

sarà $\overline{fA}$ la tensione del primo montante che soddisfa a tutte le condizioni del problema. Sono quindi sufficienti due tentativi per la piena soluzione della questione proposta.

20. Dal valore ottenuto della tensione V_0 si dedurranno le tensioni delle altre aste della travatura, rifacendo la medesima via tracciata in cadun tentativo. Le operazioni grafiche per questa ulteriore ricerca risultano semplificate considerevolmente e controllate insieme dal paragone dei risultati ottenuti nei tentativi

con quelli che si vanno man mano ottenendo, se si tiene conto della relazione fondamentale di similitudine delle singole punteggiate considerate nel corso della trattazione.

21. Non occorre provare che i ragionamenti fatti nel nostro caso speciale stanno qualunque sia il numero dei pannelli costituenti la travatura, perchè completamente indipendenti da questo numero.

22. Il metodo adottato per la soluzione del quesito propostoci ha l'inconveniente, comune alle soluzioni grafiche per falsa posizione dei problemi di primo grado (*), che ben difficilmente si possono scegliere i tentativi per modo che le corrispondenti costruzioni grafiche rimangano nei limiti del foglio. È questo stesso inconveniente che rende delicata la soluzione numerica del problema, bastando un piccolo errore nelle singole operazioni a produrre notevolissimi errori nei valori finali. Si ovvia a questo non continuando gli stessi tentativi del principio alla fine del calcolo, ma variandoli di pannello in pannello. Si osservi che le congiungenti i punti omologhi delle punteggiate simili, che vengono a considerarsi sulle rette reciproche alle rette dello schema che sono assi di montanti, inviluppano parabole perfettamente individuate da queste reciproche e da due *qualunque* di quelle congiungenti, come tangenti. *Individuate separatamente le singole parabole* con tentativi fra loro indipendenti, e facili a scegliersi per modo che le costruzioni rimangano nei limiti del quadro, riesce ovvia la definitiva soluzione del quesito. Non ci indugiamo sui particolari relativi alla semplificazione così accennata, i quali ci porterebbero ad eccedere dai limiti concessi alla mole del presente lavoro; ci ridurremo a considerare su di un esempio il caso speciale, frequentissimo in pratica, in cui essendo tutti *paralleli fra loro gli assi dei montanti*, dette parabole riduconsi a punti, centri di similitudine delle diverse coppie di punteggiate.

23. La figura 10ª è lo schema di una trave a correnti rettilinei paralleli, con appoggi estremi semplici distanti fra di loro

---

(*) G. Fouret, *Poutres à plusieurs appuis.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Mars, 1875.

G. Sacheri, *Determinazione grafica dei momenti inflettenti sugli appoggi di un ponte a più travate.* Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, volume X, 1875.

di m. 31,02, e con pannelli di forma quadrata. Distingueremo ordinatamente con successivi numeri romani i successivi pannelli dall'appoggio di sinistra verso quello di destra e contraddistingueremo con gli stessi simboli come indici le quantità riferentesi ai vari pannelli (*). Le aste di contorno ed i montanti hanno lunghezza comune di m. 2,82 fra nodo e nodo, le aste diagonali hanno lunghezza comune di m. 3,99. Le sezioni trasversali dei montanti hanno tutte area eguale a cm^2 42,24; le altre sbarre hanno le sezioni indicate in cm^2 della seguente tabella.

ASTE DI CONTORNO

superiore	inferiore
$\omega_{I} = \omega_{XI} = 118,2$	$\nu_{I} = \nu_{XI} = 81,4$
$\omega_{II} = \omega_{X} = 154,9$	$\nu_{II} = \nu_{X} = 112.0$
$\omega_{III} = \omega_{IX} = 191,6$	$\nu_{III} = \nu_{IX} = 173,2$
$\omega_{IV} = \omega_{VIII} = 228,3$	$\nu_{IV} = \nu_{VIII} = 203,8$
$\omega_{V} = \omega_{VII} = 252,8$	$\nu_{V} = \nu_{VII} = 234,4$
$\omega_{VI} = 252,8$	$\nu_{VI} = 234,4$

ASTE DIAGONALI DISCENDENTI

da sinistra verso destra		da destra verso sinistra	
$\delta_{X} = 61,44$	$\delta_{XI} = 70,08$	$\gamma_{I} = 70,08$	$\gamma_{XI} = 61,44$
$\delta_{II} = 51,84$	$\delta_{X} = 59,20$	$\gamma_{II} = 59,20$	$\gamma_{X} = 51,84$
$\delta_{III} = 42.24$	$\delta_{IX} = 51,20$	$\gamma_{III} = 51,20$	$\gamma_{IX} = 42.24$
$\delta_{IV} = 32,64$	$\delta_{VIII} = 41,60$	$\gamma_{IV} = 41,60$	$\gamma_{VIII} = 32,64$
$\delta_{V} = 25,68$	$\delta_{VII} = 29,60$	$\gamma_{V} = 29,60$	$\gamma_{VII} = 28,68$
$\delta_{VI} = 20,80$		$\gamma_{VI} = 20,80$	

Calcoleremo la trave nell'ipotesi di carico uniformemente ripartito su tutta la lunghezza della trave e trasmesso a questa in corrispondenza dei nodi da travi trasversali. È questa la con-

(*) Questa trave è calcolata coi metodi approssimati ordinari nella pregevolissima opera: Max Edlen von Leber, *Die neue Brückenverordnung des oesterr. k. k. handels-ministeriums.* I. Band, pag. 166. Vienna 1888.

dizione di carico che si assume come la più sfavorevole per le aste di contorno. Applicato in parti eguali ai due contorni il peso proprio della trave, in ragione di Kg. 700 per metro lineare, e concentrati sui nodi del contorno inferiore i sovraccarichi permanente ed accidentale, in ragione di tonnellate 0,4 e 3 per metro lineare rispettivamente, si dovranno, arrotondando, supporre caricati i vari nodi della travatura dei segmenti carichi:

Nodo di contorno inferiore: intermedi. ton. 10,6; estremi. ton. 5,3

» » superiore: » » 1; » » 0,5.

24. A fig. 11, disegnata la poligonale 0,1.2, . . . 26. delle forze esterne, che qui riducesi ad una retta verticale, nell'ordine in cui le forze si presentano applicate girando sul contorno della trave sempre nello stesso verso, e precisamente partendo dall'appoggio A e percorrendo prima il contorno inferiore (i segmenti 12,13 e 25,26 misurano le reazioni degli appoggi destro e sinistro rispettivamente), si costruirono le reciproche delle rette dello schema, come si indicò nella trattazione generale. Assunti due valori arbitrari $\overline{25A'}$, $\overline{25A''}$ della tensione del montante 1, si calcolarono i corrispondenti valori delle tensioni delle aste 2, 3, (3), 4 del primo pannello; quindi dedotti in fig. 12ª segmenti proporzionali alle corrispondenti dilatazioni, $\overline{\delta 2}$, $\overline{\delta 3}$, $\overline{\delta 4}$, $\overline{\delta(3)}$. con la costruzione indicata a fig. 3ª, si calcolarono mediante *diagrammi Williot* (fig. 13ª) i corrispondenti valori della tensione del montante 5, e questi si inserirono in $B'C'$ e $B''C''$ nel diagramma degli sforzi.

25. Va notato che in questo caso speciale, a causa dell'eguaglianza di lunghezza delle sbarre diagonali, le rette Of della fig. 3ª relative a queste sbarre, coincidono con la bissetrice dell'angolo xoy, mentre quelle riferentisi alle sbarre di contorno ed ai montanti coincidono con l'asse y, avendo dette sbarre tutte eguali lunghezze. Di più, essendo eguali anche le aree delle sezioni trasversali di tutti i montanti, assunto nel diagramma Williot per misura della dilatazione del primo montante, la tensione sua causa, il diagramma stesso dà senz'altro nella misura della dilatazione del 2° montante la misura della corrispondente tensione di questo montante medesimo Come conseguenza della

forma quadrata del pannello, il centro $\zeta_{1,5}$ di similitudine delle punteggiate $A'A''\ldots$, $B'B''\ldots$ coincide col centro del quadrato limitato dalle rette 1, 2, 4, 5 del diagramma, onde queste punteggiate riescono simmetriche rispetto al centro $\zeta_{1,5}$. La fig. 11ª poi indica la posizione del centro $\xi_{1,5}$ di similitudine delle punteggiate $A'A''\ldots$, $C'C''\ldots$

26. Risulta dal disegno che, se si continuassero gli stessi tentativi per la costruzione relativa al 2° pannello, la figura assumerebbe proporzioni esagerate; ed invero le tensioni del montante 9 corrispondenti ai valori $B'C'$ e $B''C''$ della tensione del montante 5, calcolate a parte ed inserite nel diagramma, non restano nei limiti del quadro. Si assunsero perciò altri due valori $B'''C'''$ e $B^{IV}C^{IV}$ della tensione del montante 5 e si operò come pel pannello primo, deducendo così la posizione dei centri di similitudine $\xi_{5,9}$ e $\zeta_{5,9}$ delle analoghe punteggiate sostenute dalle rette 5 e 9 dello schema. Va notato però che fissati ad arbitrio i punti C''' e C^{IV}, i punti B''' e B^{IV} vanno determinati di conseguenza mediante le note relazioni di similitudine. Basta a tal uopo osservare che i punti C''' e B''', e così dicasi di C^{IV} e B^{IV}, sono le proiezioni sulla retta 5 di uno stesso punto della 1 dai centri $\xi_{1,5}$ e $\zeta_{1,5}$. Analogamente si determinarono gli altri centri ξ e ζ di similitudine corrispondenti agli altri successivi pannelli, centri che diremo *punti fissi* per l'analogia che presentano con gli omonimi punti singolari che s'incontrano nella teoria della trave continua, in molti punti analoga alla teoria qui esposta. Nel disegno non si esposero i diagrammi Williot fuorchè pel primo pannello, ed anzi, per ragione di chiarezza, pel pannello V ci limitammo a segnare la posizione dei punti fissi dedotta da costruzione fatta a parte in scala più opportuna.

27. Trattandosi di *trave simmetrica* e *simmetricamente caricata*, non occorre protrarre la costruzione fino all'ultimo pannello di destra, potendosi assumere come condizione determinante la definitiva soluzione del problema l'eguaglianza delle tensioni dei montanti 21 e 25, che limitano il pannello centrale. Basterà perciò determinare due coppie di elementi corrispondenti, X' ed Y', X'' ed Y'' delle punteggiate simili sovrapposte descritte, sulle rette 21 e 25 coincidenti del diagramma, dai vertici X ed Y dei due rettangoli funzionanti da poligoni d'equilibrio dei nodi ideali K ed L (fig. 10) d'incrocio delle diagonali dei pannelli adiacenti al centrale, e determinare delle due punteggiate così

individuate gli elementi corrispondenti equidistanti dall'asse di simmetria, $\lambda\lambda$, del diagramma degli sforzi (fig. 11^a).

La ricerca degli elementi X' ed Y', X'' ed Y'' fu fatta a parte a fig. 14 in scala doppia di quella per la fig 11^a. Fu ommessa per chiarezza la costruzione dei punti X ed Y equidistanti dall'asse $\lambda\lambda$ di simmetria, costruzione che fu condotta secondo che indica la fig. 15^a.

Ribaltata la punteggiata $X'\,X''$... attorno al punto Ω giacente sull'asse di simmetria in (X') ed (X''), si condussero per (X') ed (X'') due parallele m' ed m'', ad arbitrio, ed altre due parallele n' ed n'' per Y' ed Y''; la congiungente i punti $m'n'$, $m''n''$ passa pel punto (X) unito delle punteggiate simili sovrapposte $(X')\,(X'')$ . . ., $Y'\,Y''$. . . Ribaltata (X) in X attorno ad Ω, si hanno in X ed (X) gli elementi corrispondenti cercati.

28. Riportato il punto X dalla fig. 14^a alla 11^a, si cotruisca la poligonale avente i vertici successivi sulle reciproche, 17, 13, 9, 5, 1, degli assi dei montanti, il primo vertice in X, ed i lati passanti pei successivi punti fissi ξ. In seguito si proietti sulla retta 5 dal punto fisso $\zeta_{1.5}$ il vertice A di questa poligonale che giace sulla retta 1, si proietti sulla 9 dal punto fisso $\zeta_{5.9}$ il vertice della poligonale giacente sulla retta 5, e così via. Vengonsi per tal modo a determinare sulle rette reciproche agli assi dei singoli montanti i segmenti misuranti i veri valori delle tensioni provocanti le sbarre corrispondenti, da cui facilmente deduconsi le tensioni di tutte le altre sbarre del sistema, siccome indica in modo evidente la figura.

29. Nella metà inferiore della fig. 11^a si espose parte del diagramma degli sforzi che si ottiene nell'ipotesi, accettata in via di approssimazione quasi universalmente nel mondo tecnico, che ogni singola sbarra soffra tensione eguale alla media aritmetica di quelle che soffrirebbe quando mancasse l'uno e poi l'altro dei due sistemi di diagonali parallele (*). È notevole che quest'ipotesi conduce nel nostro caso a valori delle tensioni di alcune sbarre di contorno differenti da quelli da noi trovati con la teoria dell'elasticità di circa 0,18 della tensione medesima. Questo errore ordinariamente viene compensato dal fatto che per

(*) Cfr. Ritter. l. c.
Müller-Breslau. l.l. c.c.
Williot. l. c.

ragioni costruttive alle sbarre per cui tale errore relativo risulta massimo (le sbarre di contorno adiacenti agli appoggi), si danno dimensioni molto più grandi di quelle che richiedonsi dalle condizioni di stabilità.

30. Esporremo da ultimo nella seguente tabella i valori in tonnellate delle tensioni delle singole sbarre ottenuti con l'applicazione analitica della teoria dell'elasticità, calcolo necessariissimo pel controllo d'un calcolo grafico di natura singolarmente dilicata qual' è quello da noi esposto. Avvertiamo che per ragioni di simmetria la tabella potè limitarsi a circa metà della trave. In essa si contrassegnano come positive le tensioni, come negativi gli sforzi di compressione.

ASTE DI CONTORNO		DIAGONALI DISCENDENTI		MONTANTI
superiore	inferiore	da sinistra verso destra	da destra verso sinistra	
$O_{I} = -24,5$	$U_{I} = +33,5$	$D_{I} = +34.7$	$C_{I} = -47,4$	$V_{0} = -25,0$
$O_{II} = -83,6$	$U_{II} = +78,8$	$D_{II} = +36,2$	$C_{II} = -29,4$	$V_{I} = +6,9$
$O_{III} = -121,9$	$U_{III} = +121,7$	$D_{III} = +24,8$	$C_{III} = -24,4$	$V_{II} = +2,25$
$O_{IV} = -151,1$	$U_{IV} = +150,5$	$D_{IV} = +16,9$	$C_{IV} = -14,9$	$V_{III} = +4,3$
$O_{V} = -168,8$	$U_{V} = +167,6$	$D_{V} = +9,1$	$C_{V} = -7,3$	$V_{IV} = +3,8$
$O_{VI} = -174,8$	$U_{VI} = +173,2$	$D_{VI} = +1,0$	$C_{VI} = -1,0$	$V_{V} = +3,4$

Torino, 31 Gennaio 1892.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. 8ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Febbraio 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Cossa, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Giacomini, Camerano, Segre e Basso Segretario.

Si approva, previa lettura, l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Naccari presenta e legge una Nota del Dott. Federico Guarducci, Ingegnere nell'Istituto geografico Militare, col titolo: *Sulla determinazione degli azimut della geodetica che passa per due punti dell'ellissoide terrestre.* Questo lavoro dell'Ing. Guarducci sarà pubblicato negli *Atti*.

LETTURE

Sulla determinazione degli azimut della geodetica che passa per due punti dati dell'ellissoide terrestre;

Nota del Dott. FEDERIGO GUARDUCCI

Il problema della determinazione degli azimut reciproci dell'arco di geodetica che unisce due punti dell'Ellissoide terrestre, dei quali sono date solo le coordinate geografiche, può risolversi molto semplicemente e colla approssimazione ai termini del 5° ordine nel modo seguente.

Siano P_1 e P_2 (fig. 1) i due punti dati aventi rispettivamente per latitudini L_1 ed L_2, $(L_1 < L_2)$ e per longitudinali θ_1 e θ_2 contate da Occidente in Oriente; e siano z_1 e $180° + z_2$ gli azimut in P_1 e P_2 dell'arco di geodetica $\widehat{P_1P_2} = s$ contati da Nord verso Est.

Indicando con r_1 ed r_2 i raggi dei paralleli in P_1 e P_2, abbiamo

$$r_1 \operatorname{sen} z_1 = r_2 \operatorname{sen} z_2$$

ovvero, introducendo le rispettive *latitudini ridotte* u_1 e u_2

$$\cos u_1 \operatorname{sen} z_1 = \cos u_2 \operatorname{sen} z_2 ,$$

dalla quale si deduce facilmente

$$(1)\ldots \operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_2+z_1) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_2-z_1)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(u_2+u_1)\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(u_2-u_1),$$

espressione rigorosa che ci risolve il problema quando sia noto il valore della *convergenza dei meridiani* $z_2 - z_1$.

Il teorema di Dalby ci offre, come è noto, il modo di ottenere molto semplicemente e colla approssimazione ai termini di 5° ordine il valore della analoga convergenza relativa però agli azimut α_1 e α_2 delle sezioni normali invece che a quelli della geodetica riducendo il problema al caso di una sfera; in

altri termini se riportiamo sopra una sfera le latitudini L_1 e L_2 e la differenza di longitudine $\vartheta_2 \vartheta_1 = \Delta\vartheta$ ed indichiamo con α'_1 e α'_2 gli analoghi azimut che risultano pel cerchio massimo passante pei due punti così determinati, abbiamo pel citato teorema:

$$(2)\ldots\quad \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha'_2 - \alpha'_1 - \frac{1}{4}\, e^4\, \Delta L^2 . \Delta\theta \cos^4 L_m \operatorname{sen} L_m + \;\ldots$$

nella quale ΔL e $\Delta\vartheta$ rappresentano rispettivamente le differenze di latitudine e di longitudine, L_m il valor medio della latitudine ed e la eccentricità dell'ellisse meridiana il cui quadrato e^2 riguardiamo come quantità di 1° ordine al pari di ΔL e $\Delta\theta$.

Nella (2) i termini del 6° ordine costituiscono una piccolissima quantità che alle latitudini italiane e nelle condizioni più sfavorevoli raggiunge appena il valore di *due millesimi di secondo* per punti che distano fra loro di *dieci gradi* tanto in latitudine che in longitudine; si possono dunque trascurare, ed applicando una delle analogie di Nepero, abbiamo

$$(3)\ldots\quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\alpha'_2 - \alpha'_1) = \frac{\operatorname{sen} L_m}{\cos\frac{1}{2}\Delta L} \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Delta\vartheta .$$

Per passare da questa alla espressione della quantità $\operatorname{tang}\frac{1}{2}(z_2 - z_1)$ che ci occorre, giova la formola data da Weingarten relativa alla differenza fra l'azimut della geodetica e quello della sezione normale in un punto qualunque dell'ellissoide. Questa formola ci dà infatti pel punto P_1

$$\alpha_1 - z_1 = \frac{e^2}{12(1-e^2)} \cdot \frac{s^2}{N_1 \rho_1} \cos^2 L_1 \operatorname{sen} 2 z_1 - \frac{e^2}{48} \cdot \frac{s^3}{\rho_1^3} \operatorname{sen} 2 L_1 \operatorname{sen} z_1$$

+ termini di 6° ordine, nella quale N_1 ed ρ_1 rappresentano rispettivamente la gran normale e il raggio di curvatura del meridiano alla latitudine L_1 e la quantità $\frac{s}{N_1}$ ed $\frac{s}{\rho_1}$ vengono riguardate come quantità di 1° ordine al pari di e^2.

Pel punto P_2 abbiamo analogamente

$$180+\alpha_2-(180+z_2)=\alpha_2-z_2=$$

$$=\frac{e^2}{12(1-e^2)}\frac{s^2}{N_2\rho_2}\cos^2 L_2 \operatorname{sen} 2z_2+\frac{e^2}{48}\frac{s^3}{\rho_2^3}\operatorname{sen} 2L_2 \operatorname{sen} z_2+\text{termini}$$

di 6° ordine, dalla quale, sottraendo la precedente, abbiamo

$$(4)\ldots\left\{\begin{array}{l} z_2-z_1=\alpha_2-\alpha_1-\dfrac{e^2 s^2}{12(1-e^2)}\left\{\dfrac{\cos^2 L_2 \operatorname{sen} 2z_2}{N_2\rho_2}-\dfrac{\cos^2 L_1 \operatorname{sen} 2z_1}{N_1\rho_1}\right\} \\ \quad -\dfrac{e^2 s^3}{48}\left\{\dfrac{\operatorname{sen} 2L_2 \operatorname{sen} z_2}{\rho_2^3}+\dfrac{\operatorname{sen} 2L_1 \operatorname{sen} z_1}{\rho_1^3}\right\}+\text{term. di } 6^\circ \text{ ord.}\end{array}\right.$$

Indicando con a il semiasse equatoriale, abbiamo la nota espressione

$$\frac{1}{N_2\rho_2}=\frac{(1-e^2\operatorname{sen}^2 L_2)^2}{a^2(1-e^2)}$$

$$=\frac{(1-e^2\operatorname{sen}^2 L_1)^2}{a^2(1-e^2)}-\frac{2e^2\Delta L(1-e^2\operatorname{sen}^2 L_1)\operatorname{sen} 2L_1}{a^2(1-e^2)}+\ldots$$

$$=\frac{1}{N_1\rho_1}+\text{termini di } 2^\circ \text{ ordine,}$$

per cui senza alterare la approssimazione possiamo nella (4) porre R_1 ed N_1 in luogo di ρ_2 ed N_2. Inoltre gli sviluppi di Legendre ci dànno

$$L_2=L_1+\frac{s}{\rho_1}\cos z_1+\ldots$$

$$(5)\ldots \qquad z_2=z_1+\frac{s}{N_1}\operatorname{sen} z_1 \operatorname{tang} L_1+\ldots$$

dalle quali si deduce mediante lo sviluppo in serie di Taylor

$$\cos^2 L_2=\cos^2 L_1-\frac{s_1}{\rho_1}\cos z_1 \operatorname{sen} 2L_1+\ldots$$

$$\operatorname{sen} 2z_2=\operatorname{sen} 2z_1+\frac{2s}{N_1}\operatorname{sen} z_1\cos 2z_1 \operatorname{tang} L_1+\ldots$$

$$\operatorname{sen} 2L_2 = \operatorname{sen} 2L_1 + \ldots$$

$$\operatorname{sen} z_2 = \operatorname{sen} z_1 + \frac{s}{2N_1} \operatorname{sen} 2z_1 \operatorname{tang} L_1 + \ldots$$

e sostituendo nella (4) ed osservando che ad $\frac{1}{\rho_1}$ possiamo sostituire quantità dello stesso ordine $\frac{1}{N_1}$, abbiamo dopo facili riduzioni e trascurando quantità di ordine superiore

$$(6)\ldots \left\{ \begin{array}{l} z_2 - z_1 = \alpha_2 - \alpha_1 + \dfrac{e^2 s^3}{12 N_1^3} \operatorname{sen} L_1 \cos L_1 \operatorname{sen} z_1 \\ \qquad + \text{termini di } 5^\circ \text{ ordine } (*), \end{array} \right.$$

dalla quale si deduce indicando con M il modulo dei logaritmi di Brigg

$$(7)\ldots \left\{ \begin{array}{l} \log \operatorname{tang} \dfrac{1}{2}(z_2 - z_1) = \log \operatorname{tang} \dfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \quad + \dfrac{M}{12} \dfrac{e^2 s^3}{N_1^3} \dfrac{\operatorname{sen} L_1 \cos L_1 \operatorname{sen} z_1}{\operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1)} + \ldots \end{array} \right.$$

e poichè per la (5) abbiamo

$$\frac{s \operatorname{sen} z_1}{N_1} = \frac{z_2 - z_1}{\operatorname{tang} L_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\operatorname{tang} L_1}$$

la precedente diviene

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$+ \frac{M}{12} \frac{e^2 s^2}{N_1^2} \cdot \frac{(z_2 - z_1)}{\operatorname{sen}(z_2 - z_1)} \cdot \cos^2 L_1 + \ldots$$

(*) La deduzione di questa espressione si trova anche nell'opuscolo del Prof. N. Jadanza, intitolato: *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche.* Torino, Loescher, 1891.

ovvero per la (3) e ponendo l'unità pel fattore $\dfrac{(z_2 - z_1)}{\operatorname{sen}(z_2 - z_1)}$

$$(8)\ldots \left\{ \begin{aligned} \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z_2 - z_1) = \log \left[\frac{\operatorname{sen} L_m}{\cos \frac{1}{2} \Delta L} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta \theta \right] \\ + \frac{M}{12} \frac{e^2 s^2}{N_1^2} \cos^2 L_1 + \ldots \end{aligned} \right.$$

la quale ci dice che il calcolo della quantità $\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$ possiamo eseguirlo seguendo la (3), ossia come se i punti dati si trovassero sopra una sfera, salvo ad aggiungere la correzione logaritmica

$$\frac{M}{12} \frac{e^2 s^2}{N_1^2} \cos^2 L_1,$$

la quale si calcola facilmente quando si abbia un valore anche grossolanamente approssimato (sono più che sufficienti cinque decimali nel suo logaritmo) della distanza s che può ottenersi con un calcolo provvisorio, considerando questa distanza come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti gli archi di meridiano e di parellelo sottesi rispettivamente da ΔL e $\Delta \theta$ alla latitudine media L_m.

Del resto questa correzione è molto piccola e decresce colla latitudine L_1; alle latitudini italiane essa incomincia ad acquistare il valore di mezza unità del 7° ordine decimale per distanze fra i punti di circa 130 chilometri, per cui, nella gran maggioranza dei casi che si possono presentare in pratica, si potrà trascurare riserbandola a quei casi speciali di distanze molto maggiori che richiedono l'uso di logaritmi a più di sette cifre decimali e che esigono il massimo rigore compatibile colle formole.

La (1) risente dunque soltanto della incertezza di determinazione della convergenza dei meridiani ottenuta dalla (6) e ci dà perciò gli azimut z_1 e z_2 colla approssimazione del 5° ordine, venendo così ad essere in armonia con quella del 6° ordine nelle coordinate geografiche. Del resto spingendo ancora la approssimazione nella ricerca del valore della convergenza dei meridiani possiamo dare alla (1) quel grado di esattezza che si desidera.

Esempio 1°

Per mostrare una applicazione del metodo esposto mi servirò delle relazioni rigorose fra le latitudini, longitudini ed azimut dei due punti Berlino e Königsberg (che distano fra loro di circa 530 chilometri) contenute nell'esempio I a pag. 224, vol. 1 del trattato dell'illustre Prof. Helmert (*Die mathematischen und phisikalischen Theorien der höheren Geodäsie*. Leipzig, 1880), e supponendo note le latitudini e la differenza di longitudine dei suddetti punti, procederò alla ricerca degli azimut reciproci della geodetica che li unisce.

Chiamando dunque L_1 la latitudine di Berlino, L_2 quella di Königsberg e $\Delta\vartheta$ la loro differenza in longitudine, i dati del problema sono

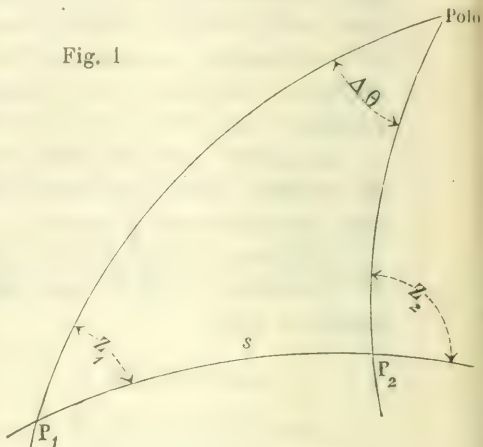
$$L_1 = 52°.\ 30'.\ 16'',7$$
$$L_2 = 54\ .\ 42\ .\ 50\ ,6$$

$$\Delta L = \ 2\ .\ 12\ .\ 33\ ,9 \qquad\qquad \Delta\vartheta = 7°.\ 06'.\ 00'',00002$$

ed il quadro seguente mostra il procedimento del calcolo.

(P_1) Berlino	$L_1 = 52^o.30'.16'', 7$	$u_1 = 52^o.24'.43'', 01137$	
(P_2) Königsberg	$L_2 = 54.42.50 , 6$	$u_2 = 54.37.24 , 75639$	
	$\Delta L = 2.12.33 , 9$	$\Delta u = 2.12.41 , 74502$	$\Delta \theta = 7^o.06'.00'', 00002$
	$\frac{1}{2} \Delta L = 1.06.16 , 95$	$\frac{1}{2} \Delta u = 1.06.20 , 87251$	$\frac{1}{2} \Delta \theta = 3.33.00 , 00001$
	$L_m = 53.36.33 , 65$	$u_m = 53.31.03 , 88388$	

Fig. 1

Alla latitudine 53° 36'.

Arco di meridiano
di ampiezza $2^o.12' = m = 245$ chil. $m^2 =$ 60025

Arco di parallelo
di ampiezza $7^o.06' = p = 470$ » $p^2 =$ 220900

Valore di s^2 in chilometri = 280925
log s^2 (in metri) .... = 11.44858

log costante	= 6.38301 — 20
2 log s	= 11.44858
2 log cos L_1	= 9 56880
2 colog N_1	= 6.38888
log correzione	= 3.78927 — 10

log sen L_m	= 9.9057908.073		
log tang $\frac{1}{2} \Delta \theta$	= 8.7926619.628		
colog cos $\frac{1}{2} \Delta L$	= 0.0000807.294		
correzione	= 0.0000006.155		
log tang $\frac{1}{2}(z_2 - z_1)$	= 8.6985341.150	$\frac{1}{2}(z_2 - z_1) =$	$2^o.51'.34'',339$
log cotang u_m	= 9.8689275.387		
log cotang $\frac{1}{2} \Delta u$	= 1.7143929.370		
log tang $\frac{1}{2}(z_2 - z_1)$	= 0 2818545.900	$\frac{1}{2}(z_2 + z_1) =$	62.24.35 ,032
	Azimut in P_1 = ...	$z_1 =$	59.33.00 ,693
	Secondo Helmert	» » »	89
	Differenza ..		0 ,004
		$z_2 =$	65.16.09 ,371
			180.00.00 ,000
	» » P_2 = ...	$180 + z_2 =$	245.16.09 ,371
	Secondo Helmert	» » »	65
	Differenza		0 ,006

Come si vede dunque gli azimut con tal metodo determinati differiscono soltanto di circa *mezzo centesimo di secondo* da quelli ottenuti dal Prof. Helmert con procedimento rigoroso (*), differenza insignificante e che malgrado la distanza abbastanza rilevante che separa i punti equivale praticamente ad uno spostamento laterale di circa *un centimetro* di un punto rispetto all'altro sulla superficie terrestre.

Si noti inoltre che nell'esempio scelto, nel quale i due punti differiscono poco in latitudine e molto in longitudine, vengono realizzate le peggiori condizioni pel problema, giacchè al diminuire della differenza in longitudine, le sezioni normali tendono a divenire geodetiche, ed il termine di 5° ordine della (2) tende ad annullarsi, ciò che porta ad una più esatta determinazione della convergenza dei meridiani $z_2 - z_1$.

Esempio 2°.

Per applicare il metodo anche ad un caso che più si avvicini a quelli ordinari della pratica usufruiremo dei dati contenuti nell'Esempio II a p. 302 del precitato Trattato, nel quale esempio i punti distano fra di loro di 120 chilometri, ed eseguiremo il calcolo con tavole a sette sole cifre decimali.

I dati sono:

$$L_1 = 56^\circ.\ 13'.\ 49'',0218$$
$$L_2 = 57\ .\ 00\ .\ 00\ ,0000$$

$$\Delta L = 0^\circ.\ 46'.\ 10'',9782 \qquad \Delta\theta = 1^\circ.\ 22'.\ 06'',0326$$

ed il quadro seguente mostra il calcolo.

(*) Il Prof. Helmert conta gli azimut da sud verso ovest, per cui gli risultano maggiori dei nostri di 180°.

$L_1 = 56^\circ.13'.49'',0218$	$u_1 = 56^\circ.08'.29'',6878$	
$L_2 = 57.00.00,0000$	$u_2 = 56.54.44,3148$	
$\Delta L = 0.46.10,9782$	$\Delta u = 0.46.14,6270$	$\Delta\theta = 1^\circ.22'.06'',0326$
$\frac{1}{2}\Delta L = 0.23.05,4891$	$\frac{1}{2}\Delta u = 0.23.07,3135$	$\frac{1}{2}\Delta\theta = 0.41.03,0163$
$L_m = 56.36.54,5109$	$u_m = 56.31.37,0013$	

Polo

Fig. 2

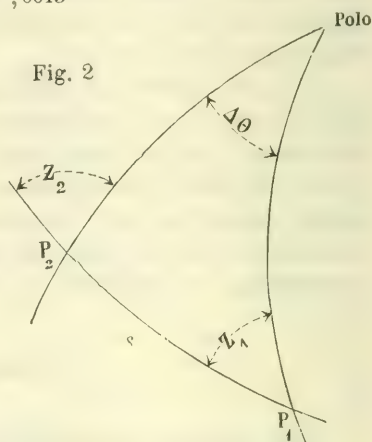
Alla latitudine 56°. 37′

Arco di meridiano
di ampiezza $0^\circ.46' = m = 85$ chil. $m^2 =$ 7225

Arco di parallelo
di ampiezza $1^\circ.22' = p = 84$ » $p^2 =$ 7056

Valore di s^2 in chilometri = 14281
» log s^2 (in metri) = 10.15476

log costante	$= 6.38301 - 20$
2 log s	$= 10.15476$
2 log cos L_1	$= 9.48992$
2 colog N_1	$= 6.38870$
log correzione	$= 2.41639 - 10$

log sen L_m	$= 9.9216829.7$		
log tang $\frac{1}{2}\Delta\theta$	$= 8.0770627.8$		
colog cos $\frac{1}{2}\Delta L$	$= 0.0000098.0$		
correzione	$= 0.0000000.3$		
log tang $\frac{1}{2}(z_2 - z_1)$	$= 7.9987555.8$	$\frac{1}{2}(z_2 - z_1) =$	$0^\circ.34'.16'',68$
colog tang u_m	$= 9.8203390.4$		
colog tang $\frac{1}{2}\Delta u$	$= 2.1722439.6$		
log tang $\frac{1}{2}(z_2 + z_1)$	$= 9.9913385.8$	$\frac{1}{2}(z_2 + z_1) =$	$44.25.43,30$
		$z_1 =$	$43.51.26,62$
		$z_2 =$	$44.59.59,98$
			$180.00.00,00$
		$180 + z_2 =$	$224.59.59,98$
Azimut in $P_1 = 360 - z_1$		=	$316.08.33,38$
		Secondo HELMERT » »	» 36
		Differenza	0,02
» » $P_2 = 360 - (180 + z_2)$		=	$135.00.00,02$
		Secondo HELMERT » »	» 00
		Differenza	0,02

Si vede dunque che gli azimut risultano in questo caso errati di circa *due centesimi* di secondo, ciò che equivale ad uno spostamento laterale di circa *un centimetro* di un punto rispetto all'altro, quantità insignificante ed appena in armonia coi *decimillesimi di secondo* nelle coordinate geografiche.

Nell'eseguire il calcolo conviene assumere sempre per punto P_1 quello di latitudine minore nel qual caso possiamo dispensarci dall'aver riguardo al segno di $\Delta \vartheta$ intendendo che gli angoli z_1 e z_2 dati dalla formola sono contati da Nord verso Est quando il punto P_2 è a destra di P_1 e da Nord verso Ovest nel caso contrario, salvo poi a ridurre questi ultimi a veri azimut secondo la convenzione stabilita

Firenze, 10 febbraio 1892.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 9ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 13 Marzo 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Salvadori, Cossa, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Giacomini, Camerano, Segre, e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Socio Segretario presenta in dono all'Accademia un libro del sig. Cav. Alessandro Marini, intitolato: *La Sericoltura italiana nel* 1891.

Viene poscia data lettura dei tre seguenti lavori:

1° « *Dei Monostomum del Box Salpa;* Studi sui Trematodi endoparassiti; » del Dott. Francesco Saverio Monticelli, presentati dal Socio Camerano.

2° « *Formole relative delle forme binarie del sesto ordine* », del Prof. Enrico D'Ovidio: Nota presentata dallo stesso Socio Autore.

3° « *Studi sull'allenamento* »: Ricerche del Signor Gregorio Manca, studente di Medicina, presentato dal Socio Mosso.

Questi lavori verranno pubblicati negli *Atti*.

LETTURE

Studii sui Trematodi endoparassiti. – Dei Monostomum *del Box Salpa;*

Nota di FR. SAV. MONTICELLI

Del *Box salpa* si conoscono tre specie di *Monostomum* trovati parassiti nell'intestino: il *M. capitellatum* Rud., il *M. orbiculare* Rud., ed il *M. spinosissimum* Stossich assai più raro dei precedenti.

Nei *Box salpa* del nostro golfo io ho ritrovato tutte e tre le suddette specie ed un'altra forma nuova. Lo studio di queste forme da me ritrovate mi ha fatto avveduto che lo Stossich (1) ha riferito al *Monostomum capitellatum* Rud. una forma del tutto diversa da questa e che, invece, concorda a capello con quella nuova da me ritrovata.

Infatti il *M. capitellatum* descritto per la prima volta dal Rudolphi nel 1819 da quanto io mi conosco, non è stato mai figurato. Il Wagener solamente ha dato una immagine delle uova di questa specie che non sono pedicellate e già nell'utero contengono un embrione a termine (2).

Siccome io ho trovato nel *Box salpa* dei *Monostomum* che con la descrizione data dal Rudolphi del suo *M. capitellatum* concordavano ed avevano le uova appunto senza pedicello e contenevano embrione a termine simile, anzi, identico a quello figurato dal Wagener, li ho identificati col *M. capitellatum*, ritenendo quello doversi riguardare per tale, che Wagener ha ristudiato e ne ha figurato le uova. Gli esemplari da Stossich riferiti al *M. capitellatum* hanno, invece, uova con prolungamenti polari, dei quali dà una fedele immagine lo Stossich (loc. cit.), e quindi, ancorachè non differissero, come differiscono, per altri caratteri

(1) *Brani di Elmintologia tergestina*, Serie I, in: *Boll. Soc. Adr. Sc. Nat Trieste,* Vol. VIII. 1883, pag. 2, Tav. II, fig. 9.

(2) *Beiträge zur Entwicklungs-geschichte der Eingeweidewürmer*, Haarlem, 1857, pag. 101, fig. 5, Taf. XIX.

dal *M. capitellatum*, per questa sola caratteristica non possono a questa specie riferirsi. Ond'io penso che a questa forma nuova, perchè oltre che differente dal *M. capitellatum* lo è ancora dagli altri Monostomi del *Box salpa* e degli altri *Monostomum* in genere, si debba imporre il nome specifico di *M. Stossichianum* in omaggio di chi primo l'ha trovata.

Intendo in questa noterella descrivere queste due forme (*M. capitellatum* e *M. Stossichianum*) per meglio permetterne il riconoscimento, mettendo in evidenza le caratteristiche differenziali di ciascuna, perchè mi è necessario stabilir bene l'identità di queste due forme per ciò che dovrò dire in un altro di questi miei studi sullo sviluppo di una di esse (*M. capitellatum*).

Monostomum capitellatum Rudolphi [1819].

(*Entoz. synops*, pag. 83 e 343).

(Tav. fig. 1, 2, 3, 4, 6, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22).

La forma del corpo di questa specie allo stato vivente può bene apprezzarsi nella figura 3: anteriormente ristretto, subcilindraceo, leggermente rigonfio terminalmente, quasi a mentire una capocchia, si slarga gradualmente fino a divenire del tutto terete e cilindraceo nel suo terzo posteriore, e si termina posteriormente subtroncato. Ha colorito generale bianco-trasparente e mostrasi giallo limone nella parte centrale della metà posteriore con macchiette irregolari più o meno estese, dendritiformi nerastre che si estendono anche nella parte anteriore ristretta del corpo: queste macchiette dendritiformi ad un esame più minuto, si mostrano riunite fra loro a formare una rete a maglie larghe ed irregolari (v. fig. 1, 3). Tutta la superficie del corpo è rivestita di fitti aculei, che solo nello estremo posteriore si fanno più radi, disposti, come d'ordinario, con le punte rivolte indietro (fig. 1, 21).

Esaminando degli esemplari in alcool sia fissati direttamente con questo liquido, sia preventivamente ammazzati con sublimato, il corpo mostrasi come l'ho disegnato nella fig. 4: l'estremo anteriore si ricurva a pastorale, cosicchè l'orifizio boccale viene a capitare di contro la faccia ventrale del corpo, e tutto il corpo ha aspetto rigonfio, cilindraceo, allungato: nella parte anteriore della superficie ventrale (quasi per un terzo della lunghezza to-

tale del corpo) esso si presenta scavato abbastanza profondamente. Questo escavamento è limitato posteriormente da una cresta trasversale sporgente: in prossimità di questa osservasi posteriormente un leggero infossamento della parte media posteriore che presto scomparisce e così il corpo diventa del tutto cilindraceo fino all'estremo posteriore dove è rotondato, subpuntuto. In corrispondenza della cresta ventrale, come si vede chiaro nella figura 4, si osserva un infossamento trasversale della superficie dorsale che fa apparire maggiormente rigonfia e ripiegata ad arco la parte anteriore del corpo.

Gli aculeetti che ricuoprono il corpo di questo *Monostomum* sono tanto addossati l'uno all'altro da dare l'immagine di una palizzata (visti in sezione): essi sono conici, puntuti, a punta subricurva ed impiantati nell'ectoderma (*cuticula* Auct) dalla quale fuorescono le punte, mentre la loro porzione basale poggia sulla membrana basale, o limitante dell'ectoderma (fig. 21): tutt'intorno la base degli aculeetti si osservano delle granulazioni colorabili col carminio in certi casi molto apparenti (v. figura).

Sviluppatissima in questa specie, come pure nel *M. Stossichianum* ed in generale in tutti i Monostomi, è il sacco muscolare cutaneo, o somatico, in tutti i sistemi di fibre che lo costituiscono. Le figure 2 e 21 valgono assai bene a dimostrarlo e da entrambe si ricava il grande sviluppo, sopra tutti, del sistema di fibre diagonali che dà al corpo l'aspetto reticolato, che si riconosce tanto all'esame a fresco, quanto di animali conservati in alcool e preparati in glicerina. Nè meno sviluppato è il sistema muscolare delle fibre dorso ventrali, così in questo, come nel *M. Stossichianum*, come mostra la fig. 11. In questa muscolatura ho potuto osservare delle belle fibrocellule muscolari che ho rappresentate nella figura 7. Esse hanno forma allungata, irregolarmente fusiforme e le loro estremità si continuano in fibre contrattili: il loro protoplasma centrale è compatto ed uniformemente poco colorabile, ed in prossimità dei prolungamenti polari comincia a mostrarsi alquanto granuloso e presenta delle strie longitudinali che si continuano nei prolungamenti fibrillari. I fasci di fibre del sistema muscolare dorso-ventrale sono costituiti da fibre che s'inseriscono isolatamente sulla membrana basale dell'ectoderma e si riuniscono insieme, a formare i fasci, nel mezzo del corpo. Disotto gli strati muscolari del sacco muscolare cutaneo o somatico, evidentissime, tanto nel *M.* in

esame, come nel *M. Stossichianum*, si osservano numerose cellule come mostrano le figure 11, 21, con nucleo distinto e fortemente colorato, le quali formano uno strato compatto tanto, quanto finora non ho osservato in altri *Monostomum*. Non è sempre facil cosa il riconoscere la forma di queste cellule: ciò dipende dal modo come vengono sezionate e dalla loro posizione obliqua. Come si scorge dalla fig. 18, esse hanno l'aspetto di pera, o di fiasco a collo molto lungo con protoplasma finamente granuloso e punteggiato che rimane quasi incoloro col carminio e con altri mezzi coloranti, o pallidamente tinto in roseo, meno che in prossimità del nucleo dove osservasi un alone di protoplasma più fortemente colorato. Il nucleo è grande ed occupa la parte centrale della cellula, ha forte contorno e rimane quasi incoloro coi reattivi coloranti: nel centro vi si nota un nucleolo intensissimamente colorato che ha un diametro di quasi i due terzi del diametro nucleare ed è impigliato nel reticolo nucleare non sempre facile ad osservarsi. Queste cellule, come ho già detto, sono disposte obliquamente col collo rivolto verso l'ectoderma, che traversa il sacco muscolare somatico e perviene alla base di essa. Queste cellule sono delle glandole cutanee omologhe a quelle dei Distomi e degli altri Trematodi.

Da una serie di ben riuscite preparazioni in toto si può ricavare tutta la interna organizzazione del *M. capitellatum*, come lo mostra la fig. 1.

La bocca è ventrale subterminale ed è circondata dalla ventosa boccale, o faringea, che, come dimostrerò in altro studio, chiamo così e non ventosa anteriore, perchè non deve considerarsi omologa alle ventose anteriori dei Distomidi e degli altri endoparassiti. Dal fondo della ventosa faringea si diparte un lungo tubo esofageo esile e cilindraceo che si arresta poco dietro il livello della cresta ventrale. Questo lungo esofago, prima di dividersi a dar le braccia intestinali, forma il bulbo esofageo che si trova pure nel *M. Stossichianum* e nel *M. spinosissimum*, ed ha forma di fiasco allungato a largo collo. Questo bulbo esofageo mostra una struttura evidentemente diversa da quella della faringe: visto su preparazioni in toto mostrasi fortemente striato trasversalmente, e questa striatura, già osservata in altri Monostomi dal Dujardin (1), è pro-

---

(1) *Hist. nat. des Helminthes*, Paris, 1845.

dotta da un sistema di forti fibre muscolari che circondano l'esofago, come si scorge nella figura 11, e son disposte circolarmente. L'insieme di queste fibre muscolari addossate a circondare l'esofago, prima del suo dividersi a formare le braccia intestinali e che costituiscono il bulbo, danno a questo, quando se ne osservano le sezioni transverse, l'aspetto di un gomitolo: nelle sezioni sagittali di questo bulbo (fig. 12) si scorgono le sezioni transverse dei sistemi di fibre circolari anulari testè descritte, ma non ho potuto riconoscervi con certezza altri sistemi di fibre longitudinali e dubito della loro esistenza. Questo bulbo, come ci mostra la sua struttura, è un vero sfintere che funziona come organo di rinforzo della faringe che, per essersi adattata ad una nuova funzione (ventosa), non compie completamente la funzione alla quale era primitivamente destinata. All'altezza di questo bulbo esofageo così nel *M. capitellatum*, che nel *M. Stossichianum*, si osserva (fig. 11) un ammasso di cellule che circondano il bulbo, e disposte disotto ed intorno a questo, le quali esaminate a forte ingrandimento mostrano l'aspetto che ho ritratto nella fig. 9. Hanno nucleo intensamente colorato con reticolo nucleare evidente con nodi cromatici e protoplasma del tutto chiaro, o poco colorabile, tranne che in prossimità del nucleo. Queste cellule, che sulle sezioni si mostrano molto irregolari, per reciproca mutua pressione (fig. 9), hanno forma, parmi, di pera a collo breve e corpo rigonfio. Io considero queste cellule per la loro posizione, per la loro struttura e per i loro rapporti, perchè, come pare, sboccano nel tubo digerente, come delle glandole salivari.

L'arco formato dalle braccia intestinali è assai largo nel *M. capitellatum* e la sua curva esterna è assai regolare. Le due braccia intestinali, colorate nel vivo in giallo intenso, conservano lo stesso calibro dell'arco per tutta la loro lunghezza; esse si estendono posteriormente fino all'altezza del testicolo posteriore e si terminano a cul di sacco di poco rigonfio, senza fondersi insieme ad arco come avviene in altri *Monostomum*.

Circa la fina struttura dell'apparato digerente del *M. capitellatum* dirò che essa è del tutto identica a quella del *M. Stossichianum*, ed, incidentalmente, che è la stessa che negli altri *Monostomum*. La ventosa faringea presenta la solita struttura di un tale organo, sulla quale non insisterò ora, dovendo occuparmene in altro di questi miei studii. Le braccia intestinali e l'esofago sono rivestiti da epitelio; quello dell'esofago in generale

è diverso da quello delle braccia intestinali. Nell'esofago esso è appiattito e spesso non si scorgono che i soli nuclei immersi in una massa omogenea sinciziale, esile, addossata alle pareti: nelle braccia intestinali l'epitelio è, invece, molto alto e caratteristico (fig. 11). Se si guarda la figura 5, nella quale ho raffigurato un pezzo d'intestino del *M. Stossichianum* a forte ingrandimento, si può apprezzare la forma delle cellule costituenti l'epitelio intestinale. Esse sono posteriormente slargate subrettangolari: alla loro estremità, che sporge nel lumen dell'intestino, sono di molto più ristrette e subpuntute, e, mentre la metà inferiore (fig. 5) mostrasi fortemente colorata col carminio ed anche con l'ematossilina, la metà anteriore è incolora, o quasi. L'insieme caratteristico di questo epitelio si può vedere nella fig. 11, ricavata da una sezione trasversa all'altezza dell'arco dell'intestino. Ad un esame minuto le singole cellule dimostrano che la metà inferiore, colorata, non lo è tutta egualmente, ma tutto intorno al nucleo, che è piuttosto piccolo ed occupa il centro della metà colorata, il citoplasma è più intensamente colorato e va gradualmente sbiadendosi verso la parte posteriore basilare della cellula e dall'altro estremo facendosi sempre più chiaro fino a diventare incoloro nella metà anteriore della lunghezza totale della cellula. Tutto il protoplasma ha un aspetto filare, che, meno evidente nella metà colorata, nella quale mostrasi anche granuloso, è evidentissimo nella metà incolora della cellula, come chiaro lo mostra la figura 5. Questa disposizione filare evidente nella metà incolora, ad un esame superficiale può interpretarsi facilmente come una copertura di ciglia di cellule sottostanti (la parte colorata), ed a questa interpretazione dà ragione l'esame di sezioni a piccolo ingrandimento, nelle quali l'epitelio sembra diviso in due strati, dei quali lo strato inferiore rappresenterebbe le cellule vere nucleate e colorate, lo strato superiore, le ciglia delle medesime. Ma l'esame a forte ingrandimento disinganna del tutto e dimostra evidentemente la natura filare del protoplasma, come ho già detto, ed il continuarsi di questi fili nella parte colorata delle cellule e viceversa, e l'originarsi dei fili dalla parte poco colorata del protoplasma della metà anteriore delle cellule.

Il nucleo, che è, come ho già detto, piccolo e chiaro, mostra un nucleolo intensamente colorato impigliato in una indistinta rete nucleare.

Il sistema escretore si apre allo esterno per un forame caudale che trovasi sulla faccia ventrale ed è subterminale: questo forame mette capo in una vescicola caudale che, dapprima tubolare, si slarga, dopo poco, a vescica globosa. Questa vescicola è rivestita dal caratteristico epitelio di rivestimento del sistema escretore fatto di grandi cellule appiattite, poligonali con citoplasma finissimamente granulare e con nucleo grande ed evidente e forte colorato, come si scorge nelle fig. 14, 20, 22, epitelio che si continua con l'ectoderma che riveste il forame caudale. Dalla vescicola caudale partono anteriormente due tronchi grossi, che si spingono lungo i lati del corpo verso la parte anteriore di esso, dai quali partono numerosi ramoscelli trasversi sia rivolti verso l'interno, che verso l'esterno del corpo (margini), che si ramificano e diminuiscono di calibro, ed alcuni (interni) entrano in rapporti anastomotici con quelli provenienti dal lato opposto, altri si anastomizzano fra loro, ed altri infine terminano, come pare, a fondo cieco. Tutta questa disposizione di vasellini piglia nel *M. capitellatum* l'aspetto di un reticolo a maglie irregolari e di varia grandezza.

Le aperture genitali (sbocco del pene e dell'utero) sono situate sul cominciare del terzo medio del corpo e sono indipendenti l'una dall'altra, ma ravvicinate tra loro; trovansi all'altezza del bulbo esofageo e sboccano all'esterno nello spessore della cresta trasversale ventrale. I testicoli giacciono nella estremità posteriore del corpo innanzi all'ovario e sono situati l'uno innanzi l'altro: hanno forma ovoidale e son disposti con l'asse maggiore perpendicolare all'asse longitudinale del corpo, (fig. 1): da ciascun testicolo parte un dottolino escretore che dopo un breve tratto, si fonde con quello dell'altro testicolo per formare un deferente unico che decorre con cammino leggermente ondulato nella linea mediana del corpo e va a metter capo nella tasca del pene, che è piccola ed a forma di cornamusa e sbocca allo esterno sulla sinistra dello sbocco dell'utero: il suo sbocco, come quello dell'utero, è circondato da un cercinetto formato da uno ispessimento dell'ectoderma. Nell'ultimo suo tratto prima di continuarsi con la tasca del pene, il deferente si slarga alquanto, specialmente in prossimità di essa, per formare una sorta di ricettacolo o vescicola seminale esterna molto allungata.

L'ovario piccolo, ovoidale è disposto, come i testicoli, cioè col suo asse maggiore parallelo all'asse maggiore di questi: esso tro-

vasi situato, dietro i testicoli, nello estremo posteriore del corpo e spinto verso la parete terminale di questo, ed occupa perciò lo spazio che intercede fra il cul di sacco dell'estremo posteriore del corpo ed il testicolo posteriore, od inferiore: nella sua faccia infero-dorsale destra (guardando l'animale dal dorso) l'ovario (fig. 14) si prolunga a collo di fiasco, si rivolge inferiormente e si continua con l'ovidutto esterno. Circa la struttura dell'ovario dirò che esso è fatto di grandi cellule poligonali, per reciproca pressione, che ne occupano tutta la zona centrale: quelle parietali sono assai più piccole e meno nettamente poligonali e d'ordinario tondeggianti. Hanno tali cellule ovariche nucleo grande, chiaro e nucleolo eccentrico fortemente colorato impigliato nella rete nucleare (fig. 17, 6, 10); esternamente l'ovario ha una membrana propria (fig. 17) con una tunica muscolare. L'ovidutto che si origina dall'ovario è rivestito da un epitelio ad elementi indistinti e cosparso di nuclei e presenta nella sua origine uno sfintere ovarico non molto sviluppato nei sistemi di fibre che lo costituiscono ed internamente coverto di un epitelio cigliato (fig. 14, 17).

L'ovidutto interno, piuttosto esile, si rivolge in basso e posteriormente, e, passando dietro ed inferiormente alla vescicola caudale del sistema escretore, descrive un arco e risale, rasentando l'ovario dal suo lato sinistro (osservando sempre l'animale dalla faccia dorsale), fin sotto il testicolo inferiore.

Nel suo decorso lungo il lato destro dell'ovario riceve (fig. 14) prima lo sbocco del vitellodutto impari e poi lo sbocco di numerose glandole del guscio, le quali formano una massa compatta che accompagna per buon tratto l'ovidutto interno, (fig. 14), e nelle preparazioni in toto può ben facilmente vedersi come un corpo meno colorato dell'ovario che sporge da un lato di questo (fig. 1; qui l'animale è visto dal ventre). Questo tratto dell'ovidutto che ha forma di fuso, costituisce l'ootipo ed ha più sviluppati sistemi muscolari: esso è rivestito internamente da un sincizio alto e di apparenza cuticoloide con evidenti nuclei sparsi (fig. 19).

Dopo lo sbocco delle glandole del guscio il canale ovidutto si allarga, e ciò avviene propriamente quando è giunto sotto il testicolo inferiore, come sopra ho detto: qui comincia, l'utero, ed il suo decorso dapprima leggermente ondulato, poi fortemente spirale, si può ben scorgere dalla figura; nè io insisterò nel de-

scriverlo, osserverò solo che, originatosi a destra, si spinge verso sinistra, passando fra e dietro i testicoli, per poi occupare la parte centrale del corpo, l'ambito compreso fra le braccia intestinali. Le numerosissime uova dilatano talmente le anse uterine che non sempre può riconoscersi il decorso spirale dell'utero. Nell'ultima sua porzione l'utero si restringe e risale lungo la linea mediana del corpo e sbocca all'esterno in prossimità, a destra (faccia ventrale) dello sbocco della tasca del pene. L'utero è rivestito di un epitelio, assai evidente nella sua porzione iniziale, fatto di cellule appiattite con nucleo distinto (fig. 14), che poi lungo il suo decorso si riduce ad un esile straterello sinciziale con nuclei sparsi addossati alle pareti e spesso non si vedono che questi. Come ho osservato nel *M. cymbium*, manca in questo *Monostomum*, come in altri, la vagina (il Canal di Laurer); funziona come ricettacolo seminale interno la prima porzione dell'utero che d'ordinario è riempiuta di sperma. I vitellogeni sono disposti irregolarmente per tutta la superficie del corpo e sono appunto le macchiette dendritiformi nerastre, sul vivo, delle quali ho innanzi parlato. Questa disposizione dei vitellogeni era già stata osservata dal Rudolphi (p. 343) che non li aveva però riconosciuti, egli infatti parla di «... vasa plurima plurimus locis inter se anastomosantia ut tota fere corporis pars illis obtegatur.» Le macchiette sono più o meno estese come ho già notato, e sono connesse a formare una rete, ma in realtà esse non sono dalla rete distinte ma formano come delle varicosità di questa, cosicchè in questa specie non si osservano dei vitellogeni, ma un unico vitellogeno ramificato, dal quale, nella parte posteriore del corpo, si origina un unico vitelloduto impari molto largo e molto lungo che sbocca nell'ovidutto interno. L'unico vitelloduto si origina dal vitellogeno poco innanzi l'ovario sul lato sinistro del corpo, passa trasversalmente innanzi l'ovario (faccia ventrale) dirigendosi verso destra, poi si ripiega ad arco, segue per un tratto la curva dell'ovidutto interno, e sbocca in questo, come ho già detto, innanzi lo sbocco delle glandole del guscio.

Le già mentovate numerosissime uova che farciscono le anse uterine, sono jaline, trasparenti, hanno forma ovale-allungata, e contengono quasi tutte l'embrione a termine che è stato già figurato dal Wagener, come ho innanzi ricordato, e che descriverò a suo tempo.

Il *M. capitellatum* misura in lunghezza 6–14 mill. e millim. 0,5, 0,8 in larghezza. Esso si trova d'ordinario più frequentemente nell'ultima porzione dell'intestino del *Box salpa* e non mai in gran numero, ma sempre in pochi esemplari, nè si trova costantemente, almeno dalle osservazioni che ho fatte finora.

Per le ragioni innanzi espresse la sinonimia di questa forma deve venir così stabilita (1):

Monostomum capitellatum Rudolphi [1819].

(*Entoz. Synops*, pag. 83, 343).

1845. Dujardin. Hist. Nat. Helm., pag. 360.
1850. Diesing. Syst. Helm. I, pag. 326.
1857. Wagener. Entw. d. Eing., pag. 26, 110. Tab. XIX, fig. 5.
1858. Diesing. Rev. d. Myzhel., pag. 327.
1859. Cobbold. Synops. of Distomidae, pag. 42.
1873. Villemoes-Suhm. Helm. Notiz. III., in: Zeit. Wiss. Zool. Bd. 23, pag. 342.
1884. Carus. Prodr. Faun. Mediterr. (escl. cit. di Stossich), Vol. I, pag. 122.

Monostomum Stossichianum n. sp.

(Tav. fig. 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 18.)

Questa specie è assai facile a riconoscere ed a distinguersi dalla precedente, oltrechè per la forma del corpo assai differente, come un esame comparativo delle due figure 4, e 15, ed 1 e 8 val bene a mostrarlo, e per la caratteristica della quale ho innanzi

(1) Leuckart a pagg. 43, 45 della sua opera (*Mensch. Parassit.* 2 Afl. 1 Bd. 4 Lief.) riproduce, indicandolo come di « *M. capitellatum* nach Wagener », un embrione che non ha niente a vedere col *M. capitellatum*, come dimostrerò a suo luogo parlando dello sviluppo dei *Monostomum* in un altro di questi miei studii (Sullo sviluppo embrionale e post-embrionale dei Distomi e Monostomi).

detto delle uova lungamente pedicellate, ancora, e dirò più specialmente – perchè è il carattere che prima si presenta a chi osserva questa specie allo stato vivente – per la caratteristica colorazione rosso mattone della ventosa boccale che molto ricorda quella della ventosa posteriore dell'*Apoblema ocreatum* da me altrove descritta (1), colorazione varia d'intensità, ma sempre costante, come ho potuto osservare e constatare. Questa colorazione è dovuta ad una serie di piccoli granuli colorati in rosso che si trovano disotto l'ectoderma, sparsi fra le fibre radiali della ventosa faringea o boccale, come nel caso dell'*A. ocreatum*: essi sono di natura pigmentaria e disposti parallelamente alle fibre suddette. Tale colorito sparisce dopo poco nell'alcool.

Tutto il corpo di questo *Monostomum*, come quello del *M. capitellatum* e del *M. spinosissimum* Stossich, è coperto di numerosi, piccoli e forti aculei assai fitti e fittamente disposti in serie trasversali: esso è ovale allungato, molto più ristretto anteriormente che posteriormente ed alquanto rigonfio dorsalmente; escavato nella faccia ventrale. Allo stato di vita tende assai facilmente a ravvolgersi su se stesso; conservato in alcool mostra l'aspetto da me ritratto nella figura 15. Misura 4-6 millim. in lunghezza ed è, come si vede, più piccolo assai del *M. capitellatum*. Più che una minuta e particolareggiata descrizione, basterà a farne riconoscere le caratteristiche anatomiche la figura 8. Nell'insieme della sua organizzazione questo *Monostomum* assai al precedente si rassomiglia, ma ne differisce essenzialmente per la disposizione dei vitellogeni e dei testicoli e per il decorso dell'utero. Dalla ventosa faringea parte l'esofago lungo, esile, cilindraceo che nel terzo anteriore della totale lunghezza del corpo, prima di dividersi a formare le braccia intestinali, presenta il bulbo muscoloso, esofageo, simile per forma a quello del *M. capitellatum* e della struttura innanzi descritta, circondato dall'ammasso di glandole salivari già ricordate (fig. 11, 9): le due braccia intestinali decorrono esili per tutta la lunghezza del corpo e marginalmente, e si arrestano all'altezza dei due testicoli. Questi sono situati l'uno accanto all'altro e non già l'uno innanzi l'altro, come nel *M. capitellatum*, e trovansi nel terzo posteriore del corpo: essi sono relativamente

(1) *Osservazioni intorno ad alcune forme del gen.* Apoblema, in: *Atti R. Acc., Torino*, vol. XXVI, pag. 15-16.

grandi, cosicchè occupano quasi tutta la larghezza del corpo nel posto che occupano. Da ciascun testicolo parte un dotto escretore che risale verso avanti e dirigesi ad incontrar l'altro che viene dal testicolo opposto, e si fondono poi entrambi insieme in un unico dotto che va a sboccare nella tasca del pene che qui, come nel *M. capitellatum* è assai breve e piccola. Prima di sboccare in questa, come si vede dalla figura 8, il deferente unico si rigonfia e si slarga per un tratto assai maggiore che nel *M. capitellatum* e trasformasi così in un ricettacolo seminale esterno di forma allungata tubulare. L'ovario è situato alquanto dietro i testicoli nella estremità posteriore del corpo e nella linea mediana: esso è molto piccolo, e dirò piccolissimo rispetto ai grandi testicoli. Dalla sua sinistra ed inferiormente e dorsalmente si origina (intendi osservando l'animale dal lato ventrale) l'ovidutto interno che al suo inizio presenta uno sfintere ovarico, (fig. 10): esso dapprima esile, ristretto, si slarga poi, alquanto dopo la sua origine, e si volge verso destra, descrive un arco ed abbracciando l'ovario, sul margine anteriore destro di questo fa un'ansa e si slarga maggiormente a formare l'utero. Lungo la curva dell'ovidutto interno sbocca il dotto vitellino impari e tutto l'arco di esso è circondato dalla massa delle glandole del guscio che sboccano innanzi il dutto vitellino. Le numerose glandole del guscio formano un vero cumulo o corpo allungato falciforme, disposto ad abbracciare il lato infero-laterale destro dell'ovario come ben può scorgersi anche nelle preparazioni in toto (fig. 8, 10).

L'ovidutto, appena trasformatosi in utero, comincia a ravvolgersi su se stesso e s'intromette fra i due testicoli e n'esce slargandosi ancora dippiù, e descrivendo poche, ma larghe anse, con decorso ondulato e varicoso si estende fino all'altezza dell'arco dell'intestino e quivi sbocca in prossimità dello sbocco del pene. Alquanto prima di sboccare, il canale uterino si restringe di molto, cosicchè il suo ultimo tratto, come chiaro dalla figura 8 apparisce, ha aspetto e figura di tubo cilindrico e decorre parallelamente all'asse longitudinale del corpo. Sulla disposizione dei vitellogeni non insisterò nel descriverla : dalla figura 8 essa emerge evidente, solo voglio notare, che, come bene osserva lo Stossich, sono molto sviluppati (1) e si arrestano in estensione

(1) Op. cit., loc. cit.

anteriormente all'altezza dell'arco delle braccia intestinali: sul vivo qualche volta mi è parso vedere che avessero estensione maggiore. I singoli acini vitellogeni mostransi all'aspetto come tante chiazze scure ed i dottolini escretori di essi si riuniscono, da quanto mi è riuscito vedere, in un unico vitellodutto che decorre dorsalmente all'ovario e sbocca nell'ovidutto dorso-lateralmente, poco dopo che questo, uscito dall'ovario, si è ripiegato, ed immediatamente prima che in esso sbocchino le glandole del guscio, come, del resto, ho già innanzi detto.

Le aperture genitali, l'una d'altra indipendenti, sboccano nella parte anteriore del corpo all'altezza del bulbo o sfintere esofageo, l'una accanto all'altra; l'apertura uterina a destra, quella della tasca del pene a sinistra. Entrambe, come nella specie precedente, sono circondate da un cercinetto, fatto dall'ectoderma, che si è ispessito tutt'intorno gli orifizi (fig. 8). La disposizione del sistema escretore è identica a quella descritta innanzi nel *M. capitellatum*.

Se non si esamina l'animale vivente, nè sui preparati in toto (sia a fresco, che debitamente condizionati), ma fissato in alcool, od in altro liquido fissatore e conservato in alcool, si vedrà che il *M. Stossichianum*, mostra l'aspetto da me ritratto nella fig. 15. Anteriormente esso presentasi ristretto e subpuntuto, posteriormente slargato: la faccia ventrale è ugualmente escavata e la dorsale rigonfia e molto, cosicchè tutto l'animale ha aspetto concavo convesso. Sul finire del primo quarto della lunghezza totale del corpo, si osserva dorsalmente un solco trasversale che divide l'animale in due regioni: una anteriore, breve, corta, rigonfia assai, a forma di cappuccio; l'altra posteriore, larga, a forma di cucchiaio. In corrispondenza del solco dorsale si osserva ventralmente una cresta trasversale, come nel *M. capitellatum*, la quale però non è così sporgente come in quello, ma, evidente lateralmente: nel mezzo del corpo lo è assai meno e spesso, in certe condizioni di stato dello animale, è quasi evanescente. Nel punto medio della cresta, o disotto a questa, sboccano le aperture genitali nella linea mediana del corpo.

In questi esemplari in alcool la ventosa faringea o boccale mostrasi molto evidente e protrude fortemente allo esterno come una vera ventosa. Essa, come si vede, è del tutto ventrale, subterminale ed il margine anteriore del corpo si ripiega anteriormente e dorsalmente a covrirla come una cocolla.

Le uova, di colorito bruno giallastro, sono di forma ellittica allungata, alquanto rigonfiate ad un polo, ristrette all'altro: da questo polo il guscio si continua in un prolungamento posteriore, o filamento polare [gambo nel senso di Braun (1)], che è ricurvo a falce ed alla sua estremità gonfio a clava: meglio di ogni più minuta descrizione varrà a farne apprezzare la forma la figura 13 che ho ritratta da uova fresche. Le uova riferite dal Setti (2) al *M. capitellatum* appartengono al *M. Stossichianum*, come pure a questa specie deve riferirsi il *M. capitellatum* indicato dal Parona « facilmente differenziabile per il lungo peduncolo caratteristico » (3) delle uova.

La sinonimia del *Monostomum* in parola, per tutte le cose innanzi dette, sarà la seguente:

Monostomum Stossichianum Montic. n. sp.

1883 *Monostomum capitellatum*. Stossich. in: Boll. Soc. Adr. Sc, Nat. Vol. VIII, pag. 2, Tav. II, fig. 9.

1884 » » Carus. Prodrom. Faunae Mediter. Vol. I, pag. 122 (partim).

1886 » » Parona. Intorno al *Monostomum orbiculare* Rud. in: *An. R. Ac. agr. Torino*, Vol. XXIX (estratto) pag. 5, 7 nota 2.

1887 » » Parona. Res Ligusticae, II, in: Ann. Mus. Civ. Gen (2), vol. IV, pag. 489.

1891 » » Setti. *Sulle uova dei Trematodi*, in: *Atti Soc. Lig. Sc. Nat.* Vol. II, pag. 4.

---

(1) VERMES, in: *Bronn's Klassen-Trematoda*, pag. 497-499.

(2) *Sulle uova dei Trematodi*, Nota preliminare, in: *Atti Soc. Lig. Sc. nat. e Geogr.* Vol. II, Fasc. I. (Estratto).

(3) *Intorno al* Monostomum orbiculare *del Box Salpa*, in: *Ann. R. Acc. Agr. Torino*, Vol. XXIX, 1886, (Estratto).

Dalla descrizione data delle due forme *M. capitellatum* e *M. Stossichianum* si ricava come esse sono due specie ben distinte fra loro.

Ora, lasciando da canto il *M. orbiculare* che si allontana di molto, anzi moltissimo, dai due Monostomi summentovati, esaminiamo per poco i caratteri differenziali che distinguono il *M. spinosissimum* Stossich dalle due specie studiate, con le quali esso ha grande rassomiglianza, e stabiliamo così, al tempo stesso, le caratteristiche differenziali proprie di ciascuna delle tre specie in parola che valgano al facile riconoscimento di esse.

Monostomum Stossichianum n. sp. (fig. 8, 15 e 13)	**M. spinosissimum** Stossich. (op., cit. pag. 2, tav. II, fig. 8.)	**M. capitellatum** Rudolphi (fig. 1, 3, 4, 16.)
	Corpo	
Di forma ellittica-allungata, anteriormente molto ristretto, posteriormente slargato, concavo-convesso. Lunghezza 4-6 mill.	Di forma ellittica, anteriormente alquanto ristretto. Lunghezza 2,5-3 mill.	Moltissimo allungato, subcilindraceo. Lunghezza 6-14 mill.
	Aculei	
Sparsi ugualmente per tutta la superficie del corpo, di forma conica ed assai fitti fra loro.		
	Ventosa faringea, o boccale	
Bene sviluppata in tutte, proeminente, ventrale, subterminale.		
	Esofago	
Lungo.	Lungo.	Lunghissimo.
	Bulbo esofageo	
Presente in tutte e tre le forme.		
	Braccia intestinali	
Lunghe che raggiungono i testicoli.	Brevi che si arrestano innanzi i testicoli.	Lunghe che raggiungono i testicoli.

Monostomum Stossichianum n. sp.	**M. spinosissimum** STOSSICH.	**M. capitellatum** RUDOLPHI.
	Aperture genitali	
All'altezza del bulbo esofageo.	Alquanto dietro la ventosa faringea (fide figura Stossich) (1).	All'altezza del bulbo esofageo.
	Testicoli	
Entrambi allo stesso livello ravvicinati, o l'uno dall'altro discosto: oblunghi con l'asse maggiore parallelo all'asse longitudinale del corpo.		Uno innanzi l'altro ravvicinati, addossati con l'asse maggiore parallelo all'asse transverso del corpo.
	Ovario	
Alquanto dietro i testicoli.	Immediatamente dietro i testicoli.	Dietro il testicolo inferiore, o posteriore.
	Vitellogeni	
A grappoletti occupanti la parte medio-posteriore del corpo.	Sparsi per tutto il corpo, disposti a formare: Un disegno determinato.	Una rete a maglie irregolari e varicosa.
	Uova	
Ellittiche allungate, piriformi di colorito bruno giallastro con un lungo filamento polare, o gambo d'ordinario jalino trasparente.	Di forma ellittica, jaline trasparenti, prive di filamento polare, o gambo contenenti (2):	
Senza embrione a termine.	Embrione?	Embrione a termine.

(1) Non avendo avuto che pochi esemplari della suddetta specie non ho potuto constatare questo punto della sua organizzazione: parmi, però, esse sieno come nelle altre due specie.

(2) Il Setti attribuisce un pedicello (pag. 5) anche alle uova di *M. spinosissimum*, ma non dice dove ha ricavata questa notizia e se è frutto di sue personali osservazioni in contraddizione con quelle dello Stossich.

Al qual proposito osservo che il Setti medesimo, parlando di Monostomi con uova peduncolate, novera un *Monostomum foliaceum*: io non mi conosco al dì d'oggi alcun *Monostomum* di tal nome: uno ve ne era per lo passato ed è quello che ora chiamasi *Amphiline foliacea* e non è un *Trematode*, sibbene un *Cestode*.

Circa la biologia di queste quattro specie di *Monostomum* del *Box salpa* finora note, non mi è riuscito di sapere cosa alcuna. Tutte le esperienze da me immaginate per seguire lo sviluppo post-embrionale (quello embrionale non essendo difficile a farsi) del *M. capitellatum* – quello che per avere le uova con embrioni a termine offriva più facilità alla esperienza – sono rimaste infruttuose.

Questa specie, come le altre del *Box salpa*, capita nel tubo digerente dell'ospite per mezzo delle alghe o degli altri vegetali che ne formano il nutrimento ordinario (1). Fra queste alghe e zoosteracee il citato Picone ha incontrati frequenti Gasteropodi nel tubo digerente dei *Box salpa*; piccoli Artropodi vi ha riconosciuti anche il Parona (2). Dalle ricerche fatte finora non ho potuto confermare l'osservazione di Picone e Parona, la quale indurrebbe ad ammettere che le Cercarie dei quattro Monostomi del *Box salpa* trovino ospite intermedio nei surriferiti piccoli Gasteropodi ed Artropodi che con le Alghe e le Zoosteracee capitano nell'intestino del *Box salpa*. L'osservazione mia, come alcune altre considerazioni che a suo tempo esporrò, mi conducono, invece, a pensare che il *M. capitellatum*, come le altre specie del *Box salpa*, abbia una larva che, come avviene per le Cercarie terrestri incistantisi sulle erbe, s'incisti sulle zoostere e sulle alghe e con queste penetri direttamente nel *Box salpa*.

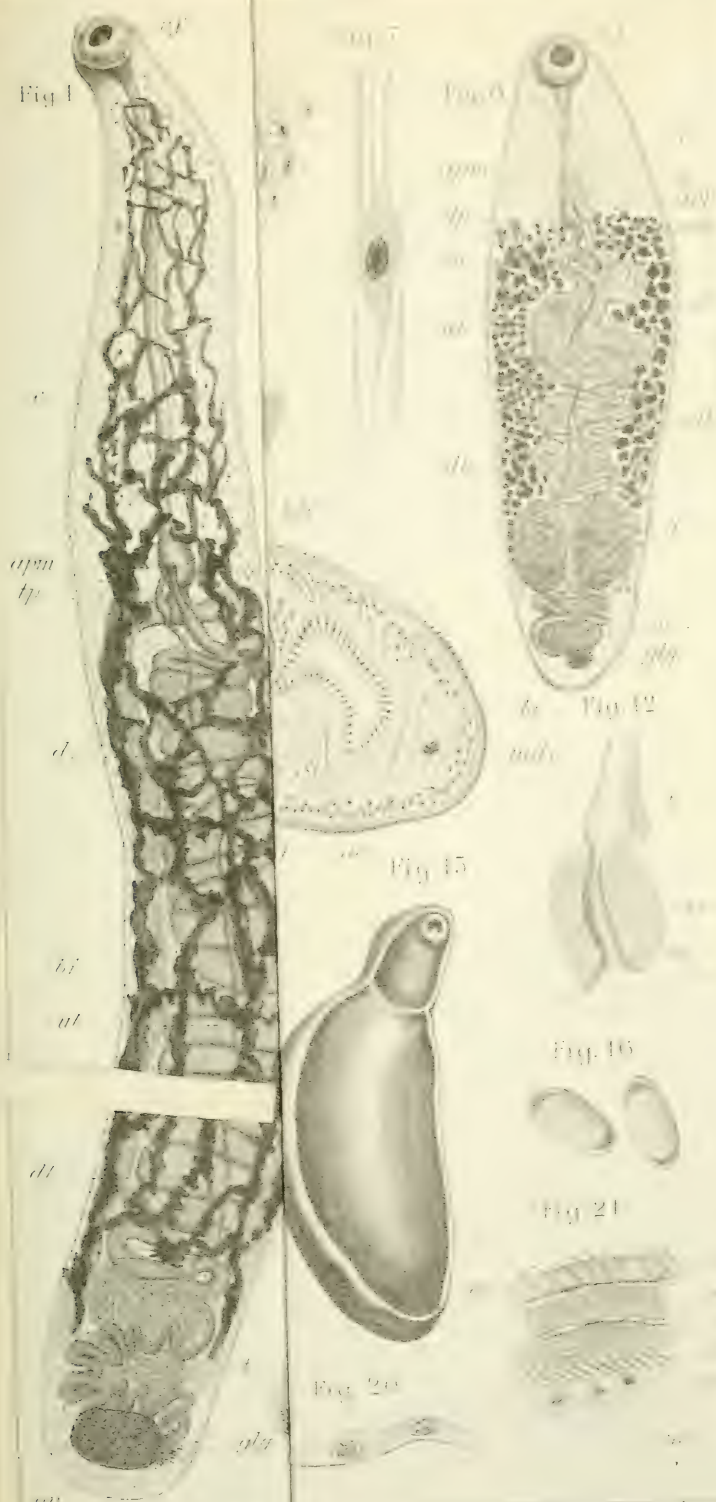
Napoli, 30 Settembre 1891.

---

(1) Picone, *I pesci fitofagi*, ecc., citato dal Parona, loc. cit., pagg. 3-4.
(2) Loc. cit., mem, cit., pag. 4 e pag. 7, nota 2.

F. S. MONTICELLI - [illegible] R. Accad. delle Sc. di Torino - Vol. XXVII

Franc. Sav. Monticelli dis

Fig 2
Fig 9
Fig 10
Fig 11
Fig. 12
Fig 13
Fig 14
Fig 15
Fig 16
Fig 19
Fig. 20
Fig 21
glc
glg
ovd
vtl
vtdi
sfo
mdv
oot

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Tutti i disegni sono stati eseguiti con il sistema Zeiss e la camera chiara Dumaige: piano di disegno all'altezza del piano del microscopio.

Lettere comuni alle figure.

ac — aculei.
ai — arco intestinale.
apf — apertura genitale femminile.
apm — » » maschile.
be — bulbo esofageo.
bi — braccia intestinali.
d — deferente.
dt — dutti testicolari.
epe — epitelio di rivestimento del sistema escretore.
e — esofago.
ec — ectoderma.
epi — epitelio intestinale.
glc — glandole cutanee.
glg — glandole del guscio.
gls — glandole salivari.
m — mesenchima.
mc — muscolatura circolare.
md — muscolatura diagonale.
mdv — muscolatura dorso-ventrale.
ml — muscolatura longitudinale.
mp — membrana propria dell'ovario.
oot — ootipo.
ov — ovario.

ovde — ovidutto esterno.
ovdi — » interno.
rse — ricettacolo seminale esterno, o maschile.
sfo — sfintere ovarico.
t — testicoli.
tp — tasca del pene e pene.
ut — utero.
vc — vescicola caudale del sistema escretore.
vf — ventosa faringea.
vtl — vitellogeni.
vtdi — vitellodutto impari.

Fig. 1. — Figura d'insieme del *Monostomum capitellatum* Rudolphi, da una preparazione in toto, $\frac{1}{A}$, (pag. 297, 299, 300, 302, 303, 304.

» 2. — Muscolatura somatica dello stesso, $\frac{2}{C}$, (pag. 298).

» 3. — *Monostomum capitellatum* dal vivo; in estensione e dal dorso $\times$ 5, (pag. 297).

» 4. — Aspetto generale dello stesso da un esemplare in alcool, $\frac{1}{a}$, (pag. 297-298).

» 5. — Sezione trasversale dell' intestino di *Monostomum Stossichianum* n. sp., $\frac{8}{4.0}$, particolari $\frac{12}{4.0}$, (pag. 301).

» 6. — Uova ovariche di *M. capitellatum*, $\frac{12}{4.0}$, (pag. 303).

» 7. — Fibre muscolari ingrandite (dorso ventrali) ed isolate del *M. Stossichianum*, $\frac{12}{4.0}$, (pag. 298).

» 8. — Figura d'insieme del *M. Stossichianum* da una preparazione in toto, $\frac{1}{a}$, (pag. 306, 307, 308, 309).

FIG. 9. — Cellule salivari dello stesso in sito di molto ingrandite, $\frac{12}{4.0}$, (pag. 300, 307).

» 10. — Figura d'insieme dei rapporti reciproci dell'apparato genitale femminile dello stesso: da un preparato in toto completato da ricostruzione di sezioni in serie (dalla faccia dorsale), $\frac{2}{A}$, (pag. 306, 307).

» 11. — Sezione transversa dello stesso all'altezza del bulbo dell'esofago, $\frac{1}{C}$, particolari $\frac{4}{4.0}$, (pag. 298, 299, 300, 301, 307).

» 12. — Sezione sagittale del bulbo dell'esofago del *M. capitellatum*, $\frac{1}{C}$ (pag. 300, 307).

» 13. — Uova uterine molto ingrandite del *M. Stossichianum*, (pag. 309).

» 14. — Sezione frontale della estremità posteriore del corpo del *M. capitellatum* per lasciar vedere i rapporti dell'apparato genitale femminile (la sezione è alquanto obliqua), $\frac{3}{C}$, (pag. 301, 302, 303, 304).

» 15. — Aspetto generale del *M. Stossichianum* da un esemplare in alcool, $\frac{1}{a}$, (pag. 306, 308).

» 16. — Uova uterine del *M. capitellatum*, $\frac{2}{C}$, (pag. 304).

» 17. — Sfintere ovarico dello stesso (sezione frontale molto obliqua), $\frac{3}{C}$, particolari $\frac{8}{4.0}$, (pag. 303).

» 18. — Cellule glandolari cutanee del *M. Stossichianum* molto ingrandite ed isolate, $\frac{12}{4.0}$, (pag. 299).

Fig. 19. — Glandole del guscio isolate del *M. capitellatum*, $\frac{4}{4.0}$, particolari $\frac{8}{4.0}$: da una sezione trasversa a livello delle medesime, (pag. 312).

» 20. — Epitelio di rivestimento dei tronchi del sistema escretore dello stesso visto di lato, $\frac{12}{4.0}$ (pag. 302).

» 21. — Sezione longitudinale dell'ectoderma e della muscolatura somatica dello stesso, $\frac{4}{4.0}$, particolari $\frac{12}{4.0}$, (pag. 297, 298, 299).

» 22. — Epitelio di rivestimento del sistema escretore del *M. Stossichianum* visto di fronte, $\frac{12}{4.0}$, (pag. 302).

Formole relative alla forma binaria del sest'ordine;

del Socio Prof. ENRICO D'OVIDIO

Nelle ricerche relative alle forme algebriche ed alle loro applicazioni geometriche è indispensabile aver alla mano molte relazioni fra i covarianti e gl'invarianti di esse forme; in particolare occorrono le espressioni delle mutue « spinte » (*Ueberschiebungen*) delle forme costituenti i sistemi completi invariativi delle forme proposte mediante le forme di questi sistemi. Per le singole forme binarie dei primi quattro ordini sono conosciute tutte coteste spinte e molte di quelle relazioni; non così per le forme degli ordini superiori. Ho quindi stimato utile pubblicare il presente scritto, il quale contiene appunto una raccolta di espressioni delle mutue spinte fra le forme costituenti il sistema completo di una forma binaria del 6° ordine, nonchè parecchie « sizigie » ossia relazioni fra tali forme.

E siccome a ciò mi ha indotto principalmente il desiderio di esser di qualche giovamento a coloro che avessero a istituir calcoli sulle forme binarie del 6° ordine, così mi è parso opportuno di non registrar soltanto le formole che ho ragione di creder nuove, ma anche quelle già date dagli Autori che si sono occupati dello stesso argomento, quali il Clebsch, il Gordan, lo Stefanos, il Maisano ed io stesso (*).

(*) Clebsch, *Theorie der binären algebraischen formen.*

Gordan-Kerschensteiner, *Vorlesungen über Invariantentheorie* (zweiter Band, §§ 26 a 30).

Stefanos, *Sur les relations qui existent entre les covariantes et les invariants de caractère pair d'une forme binaire du sixième ordre* (Comptes-rendus etc., t. 96, 1883, p. 232); *Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants de la forme binaire du sixième ordre* (ibid. p. 1564).

Maisano, *La sestica binaria* (Memorie dei Lincei, v. 19, 1884); *Die Steiners'che Covariante der binären form 6. Ordnung* (Math. Annalen, Bd. 31, 1888).

D'Ovidio, *Il Covariante Steineriano di una forma binaria del sest'ordine* (Atti dell'Acc. di Torino, v. 24, 1888).

L'occasione a questi calcoli mi è stata pôrta dallo studio dei combinanti della forma di 6° ordine e dalla ricerca di certi risultanti; ma, ad evitare ingombro, rimetto coteste questioni ad altro scritto. Per brevità, sopprimerò anche lo svolgimento dei calcoli, limitandomi a dar delle indicazioni, affinchè il lettore possa eseguirli da sè. Quanto alla disposizione della materia, va avvertito che alcune relazioni si troveranno per avventura registrate prima di altre che han contribuito a trovarle; ma ciò non nuoce al mio assunto.

§ I.

Sistema completo di una forma f del 6° ordine.

Il sistema completo di una forma binaria del 6° ordine può ritenersi costituito dalle seguenti 26 forme, delle quali spiegherò subito il significato, ed a ciascuna delle quali sottoscriverò il suo grado nei coefficienti della forma proposta:

5 invarianti		$\underset{2}{A}$	$\underset{4}{B}$	$\underset{6}{C}$	$\underset{10}{D}$	$\underset{15}{R}$	
6 covarianti di	2° ordine	$\underset{3}{l}$	$\underset{5}{m}$	$\underset{7}{n}$	$\underset{8}{\nu}$	$\underset{10}{\mu}$	$\underset{12}{\lambda}$
5 »	4° »	$\underset{2}{k}$	$\underset{4}{\Delta}$	$\underset{5}{\alpha}$	$\underset{7}{\beta}$	$\underset{9}{\gamma}$	
5 »	6° »	$\underset{1}{f}$	$\underset{3}{p}$	$\underset{4}{\delta}$	$\underset{6}{\varepsilon}$	$\underset{6}{\zeta}$	
3 »	8° »	$\underset{2}{h}$	$\underset{3}{\eta}$	$\underset{5}{\theta}$			
1 »	10° »	$\underset{4}{\chi}$					
1 »	12° »	$\underset{3}{t}$					

Qui si suppone che la forma proposta del 6° ordine sia

$$f \equiv a_0 x_1^6 + 6\, a_1 x_1^5 x_2 + 15\, a_2 x_1^4 x_2^2 + 20\, a_3 x_1^3 x_2^3 + 15\, a_4 x_1^2 x_2^4 + 6\, a_5 x_1 x_2^5 + a_6 x_2^6 \;,$$

ovvero in notazione simbolica

$$f \equiv a_x^6 \equiv b_x^6 \equiv \ldots,$$

e che sia inoltre (*)

$$A \equiv (f,f)^6, \quad k \equiv k_x^4 \equiv k'_x{}^4 \equiv \dots \equiv (f,f)^4, \quad h \equiv h_x^8 \equiv \dots \equiv (f,f)^2,$$

$$l \equiv l_x^2 \equiv \dots \equiv (f,k)^4, \quad p \equiv p_x^6 \equiv \dots \equiv (f,k)^2, \quad \tau \equiv \tau_x^8 \equiv \dots \equiv (f,k),$$

$$t \equiv t_x^{12} \equiv \dots \equiv (f,h),$$

$$\delta \equiv \delta_x^6 \equiv \dots \equiv (f,l),$$

$$m \equiv m_x^2 \equiv \dots \equiv (k,l)^2, \qquad n \equiv n_x^2 \equiv \dots \equiv (k,m)^2,$$

$$\lambda \equiv \lambda_x^2 \equiv \dots \equiv (m,n), \quad \mu \equiv \mu_x^2 \equiv \dots \equiv (n,l), \quad \nu \equiv \nu_x^2 \equiv \dots \equiv (l,m),$$

$$\zeta \equiv \zeta_x^6 \equiv \dots \equiv (f,m),$$

$$B \equiv (k,k)^4, \qquad \Delta \equiv \Delta_x^4 \equiv \dots \equiv (k,k)^2,$$

$$\chi \equiv \chi_x^{10} \equiv \dots \equiv (h,k),$$

$$\alpha \equiv \alpha_x^4 \equiv \dots \equiv (k,l), \quad \beta \equiv \beta_x^4 \equiv \dots \equiv (k,m), \quad \gamma \equiv \gamma_x^4 \equiv \dots \equiv (k,n),$$

$$\vartheta \equiv \vartheta_x^8 \equiv \dots \equiv (h,l),$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_x^6 \equiv \dots \equiv (p,l),$$

$$C \equiv (k,\Delta)^4, \quad D \equiv (m,m)^2,$$

$$R \equiv -(mn)(nl)(lm) = (l,\lambda)^2 = (m,\mu)^2 = (n,\nu)^2.$$

Sono pari: A, k, h, l, p, m, n, B, Δ, C, D;

sono dispari: τ, t, δ, λ, μ, ν, ζ, χ, α, β, γ, θ, ε, R.

§ II.

Polari di mutue spinte fra forme degli ordini 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Giova premettere molti sviluppi di polari, i quali si ottengono applicando la nota formola del GORDAN e CLEBSCH. Avverto che in tali sviluppi denoterò con $l \equiv l_x^2$, $l' \equiv l'_x{}^2$, $k \equiv k_x^4$, $k'_x \equiv k'_x{}^4$, $f \equiv a_x^6$, $f' \equiv b_x^6$, $h \equiv h_x^8$, $h' \equiv h'_x{}^8$, . . . delle forme *qualunque* degli ordini rispettivi 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, . . . , e non già necessariamente quelle dianzi definite; cosicchè con semplici mutamenti di lettere gli sviluppi medesimi si adatteranno a tutte

(*) Conforme alle notazioni usuali, $a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2$, $(ab) \equiv a_1 b_2 - a_2 b_1$, $(f,f)^\rho \equiv \rho^{ma}$ spinta di f su f, $\equiv (ab)^\rho a_x^{6-\rho} b_x^{6-\rho}$. $f_y^\rho \equiv \rho^{ma}$ polare di f rispetto al polo $y(y_1, y_2)$; e così via.

le forme del sistema completo della forma proposta di 6° ordine f. Nella quale ipotesi alcuni termini riesciranno nulli; p. e. se f' coincide con f, sarà $(f, f')=0$, $(f, f')^3=0$, $(f, f')^5=0$.

Le polari qui considerate sono quelle delle mutue spinte fra le dette forme $l, l', \ldots$ Esse sono disposte in guisa che gli ordini delle due forme che si spingon l'una contro l'altra vadano sempre crescendo, prima quello della prima, poi quello della seconda. E per ciascuna coppia di forme si comincia dalla spinta d'indice più alto, scendendo sino a quella d'indice zero, cioè sino al prodotto delle due forme.

Ordini 2, 2.

$$(l,l')_y=(l\,l')\,l_x l'_y-\frac{1}{2}(l,\,l')^2(xy),$$

$$(ll')_y=l_x^2 l'_x l'_y-\frac{1}{2}(l,l')(xy)=l_x l_y l'^2_x+\frac{1}{2}(l,l')(xy),$$

$$(ll')_{y^2}=l_x^2 l'^2_y-(l,l')_y(xy)-\frac{1}{3}(l,l')^2(xy)^2=l_x l_y l'_x l'_y+\frac{1}{6}(l,l')^2(xy)^2.$$

Ordini 4, 2.

$$(k,l)_y=(kl)\,k_x^3 l_y-\frac{3}{4}(k,\,l)^2(xy)=(kl)\,k_x^2\,l_x k_y+\frac{1}{4}(k,\,l)^2(xy),$$

$$(k,l)_{y^2}=(kl)\,k_x^2 k_y l_y-\frac{1}{2}(k,l)_y^2(xy)=(kl)\,k_x l_x k_y^2+\frac{1}{2}(k,\,l)_y^2(xy),$$

$$(kl)_y=k_x^4 l_x l_y-\frac{2}{3}(k,l)(xy)=k_x^3 l_x^2 k_y+\frac{1}{3}(k,l)(xy),$$

$$(kl)_{y^2}=k_x^4 l_y^2-\frac{4}{3}(k,\,l)_y(xy)-\frac{3}{5}(k,l)^2(xy)^2$$
$$=k_x^2 l_x^2 k_y^2+\frac{2}{3}(k,l)_y(xy)-\frac{1}{10}(k,l)^2(xy)^2,$$

$$(kl)_{y^3}=k_x^3 k_y l_y^2-(k,l)_{y^2}(xy)-\frac{3}{10}(k,\,l)^2{}_y(xy)^2$$
$$=k_x^2\,l_x k_y^3 l_y+\frac{1}{5}(k,\,l)^2{}_y(xy)^2.$$

Ordini 6, 2.

$$(f,l)_y=(a\,l)\,a_x^5 l_y-\frac{5}{6}(f,l)^2(xy)=(a\,l)\,a_x^4 l_x a_y+\frac{1}{6}(f,l)^2(xy),$$

$$(f,l)_{y^2}=(a\,l)\,a_x^4 a_y l_y-\frac{2}{3}(f,l)_y^2(xy)=(a\,l)\,a_x^3 l_x a_y^2+\frac{1}{3}(f,\,l)^2{}_y(xy),$$

$$(f,l)_{y^3}=(a\,l)\,a_x^3 a_y^2 l_y-\frac{1}{2}(f,\,l)^2{}_{y^2}(xy);$$

$$(f\,l)_y = a_x^6\, l_x\, l_y - \frac{3}{4}(f, l)(x\,y) = a_x^5\, l_x^2\, a_y + \frac{1}{4}(f, l)(x\,y),$$

$$(f\,l)_{y^2} = a_x^6\, l_y^2 - \frac{3}{2}(f, l)_y\,(x\,y) - \frac{5}{7}(f, l)^2\,(x\,y)^2$$

$$= a_x^5\, l_x\, a_y\, l_y - \frac{1}{2}(f, l)_y\,(x\,y) + \frac{5}{42}(f, l)^2\,(x\,y)^2,$$

$$(f\,l)_{y^3} = a_x^5\, a_y\, l_y^2 - \frac{5}{4}(f, l)_{y^2}\,(x\,y) - \frac{10}{21}(f, l)_y^2\,(x\,y)^2$$

$$= a_x^4\, l_x\, a_y^2\, l_y + \frac{3}{4}(f, l)_{y^2}\,(x\,y) - \frac{1}{7}(f, l)_y^2\,(x\,y)^2,$$

$$(f\,l)_{y^4} = a_x^4\, a_y^2\, l_y^2 - (f, l)_{y^3}\,(x\,y) - \frac{2}{7}(f, l)^2_{y^2}\,(x\,y)^2$$

$$= a_x^3\, l_x\, a_y^3\, l_y + \frac{3}{14}(f, l)^2_{y^2}\,(x\,y)^2.$$

Ordini 8, 2.

$$(h, l)_y = (h\,l)\, h_x^7\, l_y - \frac{7}{8}(h, l)^2\,(x\,y) = (h\,l)\, h_x^6\, l_x\, h_y + \frac{1}{8}(h, l)^2\,(x\,y),$$

$$(h, l)_{y^2} = (h\,l)\, h_x^6\, h_y\, l_y - \frac{3}{4}(h, l)^2_y\,(x\,y) = (h\,l)\, h_x^5\, l_x\, h_y^2 + \frac{1}{4}(h, l)^2_y\,(x\,y),$$

$$(h, l)_{y^3} = (h\,l)\, h_x^5\, h_y^2\, l_y - \frac{5}{8}(h, l)^2_{y^2}\,(x\,y) = (h\,l)\, h_x^4\, l_x\, h_y^3 + \frac{3}{8}(h, l)^2_{y^2}\,(x\,y),$$

$$(h, l)_{y^4} = (h\,l)\, h_x^4\, h_y^3\, l_y - \frac{1}{2}(h, l)^2_{y^3}\,(x\,y);$$

$$(h\,l)_y = h_x^8\, l_x\, l_y - \frac{4}{5}(h, l)\,(x\,y) = h_x^7\, l_x^2\, h_y + \frac{1}{5}(h, l)\,(x\,y),$$

$$(h\,l)_{y^2} = h_x^8\, l_y^2 - \frac{8}{5}(h, l)_y\,(x\,y) - \frac{7}{9}(h, l)^2\,(x\,y)^2$$

$$= h_x^7\, l_x\, h_y\, l_y - \frac{3}{5}(h, l)_y\,(x\,y) - \frac{7}{72}(h, l)^2\,(x\,y)^2,$$

. . . .

Ordini 10, 2.

$$(\chi, l)_y = (\chi\,l)\, \chi_x^9\, l_y - \frac{9}{10}(\chi, l)^2\,(x\,y) = (\chi\,l)\, \chi_x^8\, l_x\, \chi_y + \frac{1}{10}(\chi, l)^2\,(x\,y),$$

. . . .

Ordini 12, 2.

$$(t, l)_y = (t\,l)\, t_x^{11}\, l_y - \frac{11}{12}(t, l)^2\,(x\,y) = (t\,l)\, t_x^{10}\, l_x\, t_y + \frac{1}{12}(t, l)^2\,(x\,y),$$

. . . .

Ordini 4, 4.

$$(k,k')^3{}_y = (kk')^3 k_x k'_y - \frac{1}{2}(k,k')^4 (xy) \;;$$

$$(k,k')^2{}_y = (kk')^2 k_x{}^2 k'_x k'_y - \frac{1}{2}(k,k')^3 (xy) \,,$$

$$(k,k')^2{}_{y^2} = (kk')^2 k_x{}^2 k'_y{}^2 - (k,k')^3{}_y (xy) - \frac{1}{3}(k,k')^4 (xy)^2$$

$$= (kk')^2 k_x k'_x k_y k'_y + \frac{1}{6}(k,k')^4 (xy)^2 \;;$$

$$(k,k')_y = (kk') k_x{}^3 k'_x{}^2 k'_y - \frac{1}{2}(k,k')^2 (xy)$$

$$= (kk') k_x{}^2 k'_x{}^3 k_y + \frac{1}{2}(k,k')^2 (xy) \,,$$

$$(k,k')_{y^2} = (kk') k_x{}^3 k'_x k'_y{}^2 - (k,k')^2{}_y (xy) - \frac{3}{10}(k,k')^3 (xy)^2$$

$$= (kk') k_x{}^2 k'_x{}^2 k_y k'_y - \frac{3}{10}(k,k')^3 (xy)^2 \,,$$

$$(k,k')_{y^3} = (kk') k_x{}^3 k'_y{}^3 - \frac{3}{2}(k,k')^2{}_{y^2} (xy) - \frac{9}{10}(k,k')^3{}_y (xy)^2 - \frac{1}{4}(k,k')^4 (xy)^3 \;;$$

$$(kk')_y = k_x{}^4 k'_x{}^3 k'_y - \frac{1}{2}(k,k')(xy) \,,$$

$$(kk')_{y^2} = k_x{}^4 k'_x{}^2 k'_y{}^2 - (k,k')_y (xy) - \frac{2}{7}(k,k')^2 (xy)^2 = \ldots \,,$$

$$(kk')_{y^3} = k_x{}^4 k'_x k'_y{}^3 - \frac{3}{2}(k,k')_{y^2} (xy) - \frac{6}{7}(k,k')^2{}_y (xy) - \frac{1}{5}(k,k')^3 (xy)^3 \,,$$

$$(kk')_{y^4} = k_x{}^4 k'_y{}^4 - 2\,(k,k')_{y^3} (xy) - \frac{12}{7}(k,k')^2{}_{y^2} (xy)^2$$

$$- \frac{4}{5}(k,k')^3{}_y (xy)^3 - \frac{1}{5}(k,k')^4 (xy)^4.$$

Ordini 6, 4.

$$(f,k)^3{}_y = (ak)^3 a_x{}^3 k_y - \frac{3}{4}(f,k)^4 (xy) = (ak)^3 a_x{}^2 k_x a_y + \frac{1}{4}(f,k)^4 (xy),$$

$$(f,k)^3{}_{y^2} = (ak)^3 a_x{}^2 a_y k_y - \frac{2}{3}(f,k)_y{}^4 (xy) \;;$$

$$(f,k)^2{}_y = (ak)^2 a_x{}^4 k_x k_y - \frac{2}{3}(f,k)^3 (xy) = (ak)^2 a_x{}^3 k_x{}^2 a_y + \frac{1}{3}(f,k)^3 (xy) \,,$$

$$(f,k)^2{}_{y^2} = (ak)^2 a_x{}^4 k_y{}^2 - \frac{4}{3}(f,k)^3{}_y (xy) - \frac{3}{5}(f,k)^4 (xy)^2$$

$$= (ak)^2 a_x{}^3 k_x a_y k_y - \frac{1}{3}(f,k)^3{}_y (xy) - \frac{3}{20}(f,k)^4 (xy)^2$$

$$= (ak)^2 a_x{}^2 k_x{}^2 a_y{}^2 + \frac{2}{3}(f,k)^3{}_y (xy) - \frac{1}{10}(f,k)^4 (xy)^2,$$

$$(f,k)^2{}_{y^3} = (ak)^2 a_x{}^3 a_y k_y{}^2 - (f,k)^3{}_{y^2}(xy) - \frac{3}{10}(f,k)^4{}_y (xy)^2$$

$$= (ak)^2 a_x{}^2 k_x a_y{}^2 k_y - \frac{1}{3}(f,k)^3{}_{y^2}(xy) + \frac{3}{20}(f,k)^4{}_y (xy)^2 ;$$

$$(f,k)_y = (ak)\,a_x{}^5 k_x{}^2 k_y - \frac{5}{8}(f,k)^2(xy) = (ak)\,a_x{}^4 k_x{}^3 a_y + \frac{3}{8}(f,k)^2(xy).$$

$$(f,k)_{y^2} = (ak)\,a_x{}^5 k_x k_y{}^2 - \frac{5}{4}(f,k)^2{}_y(xy) - \frac{10}{21}(f,k)^3(xy)^2$$

$$= (ak)\,a_x{}^4 k_x{}^2 a_y k_y - \frac{1}{4}(f,k)^2{}_y(xy) + \frac{4}{21}(f,k)^3(xy)^2,$$

$$(f,k)_{y^3} = (ak)\,a_x{}^5 k_y{}^3 - \frac{15}{8}(f,k)^2{}_{y^2}(xy) - \frac{10}{7}(f,k)^3{}_y(xy)^2 - \frac{1}{2}(f,k)^4(xy)^3.$$

$$(f,k)_{y^4} = (ak)a_x{}^4 a_y k_y{}^3 - \frac{3}{2}(f,k)^2{}_{y^3}(xy) - \frac{6}{7}(f,k)^3{}_{y^2}(xy)^2 - \frac{1}{5}(f,k)^4{}_y(xy)^3.$$

$$(fk)_y = a_x{}^6 k_x{}^3 k_y - \frac{3}{5}(f,k)(xy) = a_x{}^5 k_x{}^4 a_y + \frac{2}{5}(f,k)(xy),$$

$$(fk)_{y^2} = a_x{}^6 k_x{}^2 k_y{}^2 - \frac{6}{5}(f,k)_y(xy) - \frac{5}{12}(f,k)^2(xy)^2 = \ldots.$$

$$(fk)_{y^3} = a_x{}^6 k_x k_y{}^3 - \frac{9}{5}(f,k)_{y^2}(xy) - \frac{5}{4}(f,k)_y{}^2(xy)^2 - \frac{5}{14}(f,k)^3(xy)^3,$$

$$(fk)_{y^4} = a_x{}^6 k_y{}^4 - \frac{12}{5}(f,k)_{y^3}(xy) - \frac{5}{2}(f,k)^2{}_{y^2}(xy)^2 - \frac{10}{7}(f,k)_y{}^3(xy)^3$$

$$- \frac{3}{7}(f,k)^4(xy)^4 = \ldots,$$

$$(fk)_{y^5} = a_x{}^5 a_y k_y{}^4 - 2\,(f,k)_{y^4}(xy) - \frac{5}{3}(f,k)^2{}_{y^3}(xy)^2 - \frac{5}{7}(f,k)^3{}_{y^2}(xy)^3$$

$$- \frac{1}{7}(f,k)^4{}_y(xy)^4 = \ldots$$

Ordini 8, 4.

$$(h,k)^3{}_y = (hk)^3 h_x{}^5 k_y - \frac{5}{6}(hk)^4(xy) = (hk)^3 h_x{}^4 k_x h_y + \frac{1}{6}(h,k)^4(xy),$$

$$(h,k)^3{}_{y^2} = (hk)^3 h_x{}^4 h_y k_y - \frac{2}{3}(h,k)^4{}_y(xy) = (hk)^3 h_x{}^3 k_x h_y{}^2 + \frac{1}{3}(h,k)^4{}_y(xy).$$

$$(h,k)^3{}_{y^3} = (hk)^3 h_x{}^3 h_y{}^2 k_y - \frac{1}{2}(h,k)^4{}_{y^2}(xy) :$$

$$(h,k)^2{}_y = (hk)^2 h_x{}^6 k_x k_y - \frac{3}{4}(h,k)^3(xy) = (hk)^2 h_x{}^5 k_x{}^2 h_y + \frac{1}{4}(h,k)^3(xy).$$

$$(h,k)^2{}_{y^2} = (hk)^2 h_x{}^6 k_y{}^2 - \frac{3}{2}(h,k)^3{}_y(xy) - \frac{5}{7}(h,k)^4(xy)^2 = \ldots,$$

$$(h,k)^2{}_{y^3} = (hk)^2 h_x{}^5 h_y k_y{}^2 - \frac{5}{4}(h,k)^3{}_{y^2}(xy) - \frac{10}{21}(h,k)^4{}_y(xy)^2 = \ldots.$$

$$(h,k)^2{}_{y^4} = (hk)^2 h_x{}^4 h_y{}^2 k_y{}^2 - (h,k)^3{}_{y^3}(xy) - \frac{2}{7}(h,k)^4{}_{y^2}(xy)^2 = \ldots :$$

$$(h,k)_y = (hk)h_x^7 k_x^2 k_y - \frac{7}{10}(h,k)^2(xy) = (hk)h_x^6 k_x^3 h_y + \frac{3}{10}(h,k)^2(xy),$$

$$(h,k)_{y2} = (hk)h_x^7 k_x k_y^2 - \frac{7}{5}(h,k)^2{}_y(xy) - \frac{7}{12}(h,k)^3(xy)^2$$

$$= (hk)h_x^6 k_x^2 h_y k_y - \frac{2}{5}(h,k)^2{}_y(xy) + \frac{1}{3}(h,k)^3(xy)^2$$

$$= (hk)h_x^5 k_x^3 h_y^2 + \frac{3}{5}(h,k)^2{}_y(xy) - \frac{1}{12}(h,k)^3(xy)^2,$$

$$(h,k)_{y3} = (hk)h_x^7 k_y^3 - \frac{21}{10}(h,k)^2{}_{y2}(xy) - \frac{7}{4}(h,k)^3{}_y(xy)^2 - \frac{5}{8}(h,k)^4(xy)^3$$

$$= (hk)h_x^4 k_x^3 h_y^3 + \frac{9}{10}(h,k)^2{}_{y2}(xy) - \frac{1}{4}(h,k)^3{}_y(xy)^2 + \frac{1}{56}(h,k)^4(xy)^3 = \ldots;$$

$$(h,k)_{y4} = (hk)h_x^6 h_y k_y^3 - \frac{9}{5}(h,k)^2{}_{y3}(xy) - \frac{5}{4}(h,k)^3{}_{y2}(xy)^2 - \frac{5}{14}(h,k)^4{}_y(xy)^3$$

$$= (hk)h_x^3 k_x^3 h_y^4 + \frac{6}{5}(h,k)^2{}_{y3}(xy) - \frac{1}{2}(h,k)^3{}_{y2}(xy)^2 + \frac{1}{14}(h,k)^4{}_y(xy)^3,$$

$$(h,k)_{y5} = (hk)h_x^5 h_y^2 k_y^3 - \frac{3}{2}(h,k)^2{}_{y4}(xy) - \frac{5}{6}(h,k)^3{}_{y3}(xy)^2$$

$$- \frac{5}{28}(h,k)^4{}_{y2}(xy)^3 = \ldots;$$

. . . .

Ordini 10, 4.

$$(\chi,k) = (\chi k)^3 \chi_x^7 k_y - \frac{7}{8}(\chi,k)^4(xy) = (\chi k)^3 \chi_x^6 k_x \chi_y + \frac{1}{8}(\chi,k)^4(xy),$$

. . . .

Ordini 12, 4.

$$(t,k)^3{}_y = (tk)^3 t_x^{11} k_y - \frac{11}{12}(t,k)^4(xy) = (tk)^3 t_x^{10} k_x t_y + \frac{1}{12}(t,k)^4(xy),$$

. . . .

Ordini 6, 6.

$$(f,f')^5{}_y = (ab)^5 a_x b_y - \frac{1}{2}(f,f')^6(xy);$$

$$(f,f')^4{}_y = (ab)^4 a_x^2 b_x b_y - \frac{1}{2}(f,f')^5(xy),$$

$$(f,f')^4{}_{y2} = (ab)^4 a_x^2 b_y^2 - (f,f')^5{}_y(xy) - \frac{1}{3}(f,f')^6(xy)^2$$

$$= (ab)^4 a_x b_x a_y b_y + \frac{1}{6}(f,f')^6(xy)^2;$$

$$(f,f')^3{}_y = (ab)^3 a_x^3 b_x^2 b_y - \frac{1}{2}(f,f')^4(xy),$$

$$(f,f')^3{}_{y^2} = (ab)^3 a_x{}^3 b_x b_y{}^2 - (f,f')^4{}_y (xy) - \frac{3}{10}(f,f')^5 (xy)^2$$

$$= (ab)^3 a_x{}^2 b_x{}^2 a_y b_y - \frac{1}{10}(f,f')^5 (xy)^2,$$

$$(f,f')^3{}_{y^3} = (ab)^3 a_x{}^3 b_y{}^3 - \frac{3}{2}(f,f')^4{}_{y^2}(xy) - \frac{9}{20}(f,f')^5{}_y (xy)^2 - \frac{1}{4}(f,f')^6 (xy)^3;$$

$$(f,f')^2{}_y = (ab)^2 a_x{}^4 b_x{}^3 b_y - \frac{1}{2}(f,f')\,(xy),$$

$$(f,f')^2{}_{y^2} = (ab)^2 a_x{}^4 b_x{}^2 b_y{}^2 - (f,f')^3{}_y (xy) - \frac{2}{7}(f,f')^4 (xy)^2$$

$$= (ab)^2 a_x{}^3 b_x{}^3 a_y b_y + \frac{3}{14}(f,f')^4 (xy)^2,$$

$$(f,f')^2{}_{y^3} = (ab)^2 a_x{}^4 b_x b_y{}^3 - \frac{3}{2}(f,f')^3{}_{y^2}(xy) - \frac{6}{7}(f,f')^4{}_y (xy)^2$$

$$- \frac{1}{5}(f,f')^5 (xy)^3 = \dots,$$

$$(f,f')^2{}_{y^4} = (ab)^2 a_x{}^4 b_y{}^4 - 2(f,f')^3{}_{y^3}(xy) - \frac{12}{7}(f,f')^4{}_{y^2}(xy)^2 - \frac{4}{5}(f,f')^5{}_y (xy)^3$$

$$- \frac{1}{5}(f,f')^6 (xy)^4 = \dots;$$

$$(f,f')_y = (ab)\,a_x{}^5 b_x{}^4 b_y - \frac{1}{2}(f,f')^2 (xy),$$

$$(f,f')_{y^2} = (ab)\,a_x{}^5 b_x{}^3 b_y{}^2 - (f,f')^2{}_y (xy) - \frac{5}{18}(f,f')^3 (xy)^2,$$

$$(f,f')_{y^3} = (ab)\,a_x{}^5 b_x{}^2 b_y{}^3 - \frac{3}{2}(f,f')^2{}_{y^2}(xy) - \frac{5}{6}(f,f')^3{}_y (xy)^2$$

$$- \frac{5}{28}(f,f')^4 (xy)^3 = \dots,$$

$$(f,f')_{y^4} = (ab)\,a_x{}^5 b_x b_y{}^4 - 2(f,f')^2{}_{y^3}(xy) - \frac{5}{3}(f,f')^3{}_{y^2}(xy)^2 - \frac{5}{7}(f,f')^4{}_y (xy)^3$$

$$- \frac{1}{7}(f,f')^5 (xy)^4 = \dots,$$

$$(f,f')_{y^5} = (ab)\,a_x{}^5 b_y{}^5 - \frac{5}{2}(f,f')^2{}_{y^4}(xy) - \frac{25}{9}(f,f')^3{}_{y^3}(xy)^2$$

$$- \frac{25}{14}(f,f')^4{}_{y^2}(xy)^3 - \frac{5}{7}(f,f')^5{}_y (xy)^4 - \frac{1}{6}(f,f')^6 (xy)^5 = \dots;$$

$$(ff')_y = a_x{}^6 b_x{}^5 b_y - \frac{1}{2}(f,f')\,(xy),$$

$$(ff')_{y^2} = a_x{}^6 b_x{}^4 b_y{}^2 - (f,f')_y (xy) - \frac{3}{11}(f,f')^2 (xy)^2 = \dots,$$

$$(ff')_{y^3} = a_x{}^6 b_x{}^3 b_y{}^3 - \frac{3}{2}(f,f')_{y^2}(xy) - \frac{9}{11}(f,f')^2{}_y (xy)^2 - \frac{1}{6}(f,f')^3 (xy)^3,$$

$$(ff')_{y4} = a_x^6 b_x^2 b_y^4 - 2(f,f')_{y3}(xy) - \frac{18}{11}(f,f')^2{}_{y2}(xy)^2 - \frac{2}{3}(f,f')^3{}_y(xy)^3$$
$$- \frac{5}{42}(f,f')^4(xy)^4 = \dots,$$

$$(ff')_{y5} = a_x^6 b_x b_y^5 - \frac{5}{2}(f,f')_{y4}(xy) - \frac{30}{11}(f,f')^2{}_{y3}(xy)^2$$
$$- \frac{5}{3}(f,f')^3{}_{y2}(xy)^3 - \frac{25}{42}(f,f')^4{}_y(xy)^4 - \frac{3}{28}(f,f')^5(xy)^5 = \dots,$$

$$(ff')_{y6} = a_x^6 b_y^6 - 3(f,f')_{y5}(xy) - \frac{45}{11}(f,f')^2{}_{y4}(xy)^2 - \frac{10}{3}(f,f')^3{}_{y3}(xy)^3$$
$$- \frac{45}{42}(f,f')^4{}_{y2}(xy)^4 - \frac{9}{14}(f,f')^5{}_y(xy)^5 - \frac{1}{7}(f,f')^6(xy)^6 = \dots$$

Ordini 8, 6.

$$(h,f)^5{}_y = (ha)^5 h_x^3 a_y - \frac{3}{4}(h,f)^6(xy) = (ha)^5 h_x^2 a_x h_y + \frac{1}{4}(h,f)^6(xy),$$

$$(h,f)^5{}_{y2} = (ha)^5 h_x^2 h_y a_y - \frac{1}{2}(h,f)^6{}_y(xy);$$

$$(h,f)^4{}_y = (ha)^4 h_x^4 a_x a_y - \frac{2}{3}(h,f)^5(xy) = (ha)^4 h_x^3 a_x^2 h_y + \frac{1}{3}(h,f)^5(xy),$$

$$(h,f)^4{}_{y2} = (ha)^4 h_x^4 a_y^2 - \frac{4}{3}(h,f)^5{}_y(xy) - \frac{3}{5}(h,f)^6(xy)^2$$
$$= (ha)^4 h_x^3 a_x h_y a_y - \frac{1}{3}(h,f)^5{}_y(xy) + \frac{3}{20}(h,f)^6(xy)^2$$
$$= (ha)^4 h_x^2 a_x^2 h_y^2 + \frac{2}{3}(h,f)^5{}_y(xy) - \frac{1}{10}(h,f)^6(xy)^2,$$

$$(h,f)^4{}_{y3} = (ha)^4 h_x^3 h_y a_y^2 - (h,f)^5{}_{y2}(xy) - \frac{3}{10}(h,f)^6{}_y(xy)^2$$
$$= (ha)^4 h_x^2 a_x h_y^2 a_y + \frac{1}{5}(h,f)^6{}_y(xy)^2;$$

$$(h,f)^3{}_y = (ha)^3 h_x^5 a_x^2 a_y - \frac{5}{8}(h,f)^4(xy) = (ha)^3 h_x^4 a_x^3 h_y + \frac{3}{8}(h,f)^4(xy),$$

$$(h,f)^3{}_{y2} = (ha)^3 h_x^5 a_x a_y^2 - \frac{5}{4}(h,f)^4{}_y(xy) - \frac{10}{21}(h,f)^5(xy)^2$$
$$= (ha)^3 h_x^3 a_x^3 h_y^2 + \frac{3}{4}(h,f)^4{}_y(xy) + \frac{1}{7}(h,f)^5(xy)^2 = \dots,$$

$$(h,f)^3{}_{y3} = (ha)^3 h_x^5 a_y^3 - \frac{15}{8}(h,f)^4{}_{y2}(xy) - \frac{10}{7}(h,f)^5{}_y(xy)^2$$
$$- \frac{1}{2}(h,f)^6(xy)^3 = \dots,$$

$$(h,f)^3{}_{y4} = (ha)^3 h_x^4 h_y a_y^3 - \frac{3}{2}(h,f)^4{}_{y3}(xy) - \frac{6}{7}(h,f)^5{}_{y2}(xy)^2$$
$$- \frac{1}{5}(h,f)^6{}_y(xy)^3 = \dots;$$

$$(h,f)^2{}_y = (ha)^2 h_x{}^6 a_x{}^3 a_y - \frac{3}{5}(h,f)^3(xy) = (ha)^2 h_x{}^5 a_x{}^4 h_y + \frac{2}{5}(h,f)^3(xy).$$

$$(h,f)^2{}_{y2} = (ha)^2 h_x{}^6 a_x{}^2 a_y{}^2 - \frac{6}{5}(h,f)^3{}_y(xy) - \frac{5}{12}(h,f)^4(xy)^2,$$

$$(h,f)^2{}_{y3} = (ha)^2 h_x{}^6 a_x a_y{}^3 - \frac{9}{5}(h,f)^3{}_{y2}(xy) - \frac{5}{4}(h,f)^4{}_y(xy)^2$$

$$- \frac{5}{14}(h,f)^5(xy)^3 = \dots ,$$

$$(h,f)^2{}_{y4} = (ha)^2 h_x{}^6 a_y{}^4 - \frac{12}{5}(h,f)^3{}_{y3}(xy) - \frac{5}{2}(h,f)^4{}_{y2}(xy)^2 - \frac{10}{7}(h,f)^5{}_y(xy)^3$$

$$- \frac{3}{7}(h,f)^6(xy)^4 = \dots .$$

$$(h,f)^2{}_{y5} = (ha)^2 h_x{}^5 h_y a_y{}^4 - 2(h,f)^3{}_{y4}(xy) - \frac{5}{9}(h,f)^4{}_{y3}(xy)^2 - \frac{5}{7}(h,f)^5{}_{y2}(xy)^3$$

$$- \frac{1}{7}(h,f)^6{}_y(xy)^4 = \dots :$$

$$(h,f)_y = (ha)h_x{}^7 a_x{}^4 a_y - \frac{7}{12}(h,f)^2(xy) = (ha)h_x{}^6 a_x{}^5 h_y + \frac{5}{12}(h,f)^2(xy),$$

$$(h,f)_{y2} = (ha)h_x{}^7 a_x{}^3 a_y{}^2 - \frac{7}{6}(h,f)^2{}_y(xy) - \frac{21}{55}(h,f)^3(xy)^2.$$

$$(h,f)_{y3} = (ha)h_x{}^7 a_x{}^2 a_y{}^3 - \frac{7}{4}(h,f)^2{}_{y2}(xy) - \frac{63}{55}(h,f)^3{}_y(xy)^2$$

$$- \frac{7}{24}(h,f)^4(xy)^3 = \dots .$$

$$(h,f)_{y4} = (ha)h_x{}^7 a_x a_y{}^4 - \frac{7}{3}(h,f)^2{}_{y3}(xy) - \frac{7.18}{55}(h,f)^3{}_{y2}(xy)^2$$

$$- \frac{7}{6}(h,f)^4{}_y(xy)^3 - \frac{5}{18}(h,f)^5(xy)^4 = \dots ,$$

$$(h,f)_{y5} = (ha)h_x{}^7 a_y{}^5 - \frac{35}{12}(h,f)^2{}_{y4}(xy) - \frac{42}{11}(h,f)^3{}_{y3}(xy)^2$$

$$- \frac{35}{12}(h,f)^4{}_{y2}(xy)^3 - \frac{25}{9}(h,f)^5{}_y(xy)^4 - \frac{3}{8}(h,f)^6(xy)^5 = \dots ,$$

$$(h,f)_{y6} = (ha)h_x{}^6 h_y a_y{}^5 - \frac{5}{2}(h,f)^2{}_{y5}(xy) - \frac{75}{22}(h,f)^3{}_{y4}(xy)^2$$

$$- \frac{5}{3}(h,f)^4{}_{y3}(xy)^3 - \frac{25}{42}(h,f)^5{}_{y2}(xy)^4 - \frac{3}{28}(h,f)^6{}_y(xy)^5 = \dots ;$$

$$(hf)_y = h_x{}^8 a_x{}^5 a_y - \frac{4}{7}(h,f)(xy) = h_x{}^7 a_x{}^6 h_y + \frac{3}{7}(h,f)(xy).$$

$$(hf)_{y2} = h_x{}^8 a_x{}^4 a_y{}^2 - \frac{8}{7}(h,f)_y(xy) - \frac{14}{39}(h,f)^2(xy)^2 = \dots .$$

$$(hf)_{y3} = h_x{}^8 a_x{}^3 a_y{}^3 - \frac{12}{7}(h,f)_{y2}(xy) - \frac{14}{13}(h,f)^2{}_y(xy)^2 - \frac{14}{55}(h,f)^3(xy)^3.$$

. . . .

Ordini 10, 6.

$$(\chi, f)^5{}_y = (\chi a)^5 \chi_x{}^5 a_y - \frac{5}{6} (\chi, f)^6 (xy) = (\chi a)^5 \chi_x{}^4 a_x \chi_y + \frac{1}{6} (\chi, f)^2 (xy),$$

. . . .

Ordini 12, 6.

$$(t, f)^5{}_y = (t a)^5 t_x{}^7 a_y - \frac{7}{8} (t, f)^6 (xy) = (t a)^5 t_x{}^6 a_x t_y + \frac{1}{8} (t, f)^6 (xy) ;$$

. . . .

Ordini 8, 8.

$$(h, h')^7{}_y = (h h')^7 h_x h'_y - \frac{1}{2} (h, h')^8 (xy) ,$$

$$(h, h')^6{}_y = (h h')^6 h_x{}^2 h'_x h'_y - \frac{1}{2} (h, h')^7 (xy) ;$$

. . . .

Ordini 10, 8.

$$(\chi, h)^7{}_y = (\chi h)^7 \chi_x{}^3 h_y - \frac{3}{4} (\chi, h)^8 (xy) = (\chi h)^7 \chi_x{}^2 h_x \chi_y + \frac{1}{4} (\chi, h)^8 (xy).$$

. . . .

Ordini 12, 8.

$$(t, h)^7{}_y = (t h)^7 t_x{}^5 h_y - \frac{5}{6} (t, h)^8 (xy) = (t h)^7 t_x{}^4 h_x t_y + \frac{1}{6} (t, h)^8 (xy) .$$

. . . .

Ordini 10, 10.

$$(\chi, \chi')^9{}_y = (\chi \chi')^9 \chi_x \chi'_y - \frac{1}{2} (\chi, \chi')^{10} (xy) ,$$

. . . .

Ordini 12, 10.

$$(t, \chi)^9{}_y = (t \chi)^9 t_x{}^3 \chi_y - \frac{3}{4} (t, \chi)^{10} (xy) = (t \chi)^9 t_x{}^2 \chi_x t_y + \frac{1}{4} (t, \chi)^{10} (xy) ,$$

. . . .

Ordini 12, 12.

$$(t, t')^{11}{}_y = (t t')^{11} t_x t'_y - \frac{1}{2} (t, t')^{12} (xy) ;$$

. . . .

Come ognun vede, la precedente raccolta non è completa, essendomi limitato a notare quel che mi occorreva, o poco più; ma è agevole completarla, quando se ne abbia bisogno.

§ III.

Ciò premesso, esporrò varî gruppi di mutue spinte fra le forme del sistema completo della sestica f espresse mediante le forme medesime, e precisamente le spinte de' covarianti pari f, k, l, h, p, m, n, Δ su tutte le forme del sistema.

Preporrò un punto (.) alle formole già date dagli autori citati in principio, la previa conoscenza delle quali serve al calcolo delle altre.

Spinte della forma f del 6° ordine sulle forme del suo sistema completo.

$$.\,(f,k)^3=0, \quad .\,(f,l)^2=2\Delta+\frac{1}{3}Ak, \quad .\,(f,m)^2=\frac{1}{3}(A\Delta+Bk)+\frac{1}{2}l^2,$$

$$.\,(f,n)^2=\frac{1}{3}(B\Delta-Ck)-lm. \quad .\,(f,n)=\frac{2}{3}B\delta-\frac{1}{3}A\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta\right)-\frac{5}{6}l\alpha,$$

$$.\,(f,\Delta)^4=\frac{1}{2}m. \quad .\,(f,\Delta)^3=-\frac{1}{2}\alpha, \quad .\,(f,\Delta)^2=\frac{1}{2}kl-\frac{1}{6}Bf. \quad .\,(f,\Delta)=-\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{6}A\alpha,$$

$$.\,(f,p)^6=B. \qquad .\,(f,p)^5=0. \qquad .\,(f,p)^4=-\frac{1}{5}\Delta+\frac{2}{15}Ak.$$

$$.\,(f,p)^3=-\frac{3}{10}\delta, \quad .\,(f,p)^2=\frac{1}{6}k^2+\frac{1}{15}fl, \quad .\,(f,p)=-\chi,$$

$$(f,h)^6=\frac{5}{7}l, \ (f,h)^5=0, \ (f,h)^4=\frac{2}{15}Af-\frac{5}{7}p, \ (f,h)^3=\frac{1}{7}\alpha, \ (f,h)^2=\frac{3}{14}fk,$$

$$(f,\nu)^2=\frac{1}{3}B\alpha-\frac{2}{3}A\beta+2\gamma,$$

$$(f,\nu)=\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{3}A\Delta+\frac{1}{3}Bk+\frac{1}{2}l^2\right)-\frac{1}{2}m\left(2\Delta+\frac{1}{3}Ak\right),$$

$$(f,\mu)^2=-\frac{1}{3}C\alpha-\frac{2}{3}B\beta+\frac{1}{3}A\gamma+\frac{1}{2}l\nu.$$

$$(f,\mu)=\frac{1}{2}n\left(2\Delta+\frac{1}{3}Ak\right)-\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{3}B\Delta-\frac{1}{3}Ck+lm\right),$$

$$(f,\lambda)^2=\frac{1}{9}AC\alpha-\frac{1}{3}\left(C-\frac{1}{2}AB\right)\beta-\frac{2}{3}B\gamma+\frac{1}{2}(l\mu+m\nu),$$

$$(f,\lambda)=\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}B\Delta-\frac{1}{3}Ck+lm\right)-\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{3}A\Delta+\frac{1}{3}Bk+\frac{1}{2}l^2\right).$$

$$(f,\alpha)^4=0, \qquad (f,\alpha)^3=\frac{1}{4}\left(A\Delta+Bk-\frac{3}{2}l^2\right), \qquad (f,\alpha)^2=\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta,$$

$$(f,\alpha)=k\Delta+\frac{1}{6}Ak^2-\frac{1}{4}fm-\frac{1}{2}lp\,,$$

$$(f,\beta)^4=-\frac{1}{2}\nu\,,\quad (f,\beta)^3=\frac{1}{4}(B\Delta-Ck),\quad (f,\beta)^2=\frac{1}{12}A(2\varepsilon+\zeta)-\frac{1}{4}l\alpha,$$

$$(f,\beta)=\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{3}A\Delta+\frac{1}{3}Bk+\frac{1}{2}l^2\right)-\frac{1}{4}fn-\frac{1}{2}pm\,,$$

$$(f,\gamma)^4=\frac{1}{2}\mu\,,$$

$$(f,\gamma)^3=\frac{1}{2}\Delta\left(C+\frac{1}{4}AB\right)+\frac{1}{4}k\left(\frac{1}{3}AC+\frac{1}{2}B^2\right)+\frac{3}{16}Bl^2-\frac{3}{4}ln\,,$$

$$(f,\gamma)^2=\frac{1}{12}B(2\varepsilon+\zeta)-\frac{1}{2}m\alpha-\frac{1}{4}k\nu\,,$$

$$(f,\gamma)=-\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2}Bm+\frac{1}{3}Cl\right)+\frac{1}{2}k\left(\frac{1}{3}B\Delta-\frac{1}{3}Ck+lm\right)-\frac{1}{2}pn\,,$$

$$(f,\delta)^6=0\,,\qquad (f,\delta)^5=\frac{5}{6}m-\frac{2}{9}Al\,,\qquad (f,\delta)^4=\frac{1}{3}\alpha\,,$$

$$(f,\delta)^3=\frac{1}{6}(Ap-Bf)\,,\quad (f,\delta)^2=\frac{2}{3}\theta,\quad (f,\delta)=\frac{1}{3}f\left(\Delta+\frac{1}{6}Ak\right)-\frac{1}{2}hl\,,$$

$$(f,\varepsilon)^6=0\,,\quad (f,\varepsilon)^5=-\frac{1}{6}n+\frac{1}{9}Am-\frac{1}{6}Bl\,,\quad (f,\varepsilon)^4=\frac{2}{9}A\alpha+\frac{1}{3}\beta\,,$$

$$(f,\varepsilon)^3=\frac{1}{6}f\left(2C+\frac{1}{6}AB\right)+\frac{1}{6}Bp-\frac{1}{10}Akl-\frac{3}{5}l\Delta\,,$$

$$(f,\varepsilon)^2=\frac{1}{9}\eta\left(\frac{1}{6}A^2-B\right)+\frac{1}{18}A\theta+\frac{1}{6}k\alpha+\frac{7}{30}l\delta\,,$$

$$(f,\varepsilon)=-\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}A\Delta+\frac{1}{3}Bk-\frac{1}{10}l^2\right)+\frac{1}{2}p\left(2\Delta+\frac{1}{3}Ak\right)-\frac{1}{6}l\left(\frac{1}{5}fl+\frac{1}{2}k^2\right),$$

$$(f,\zeta)^6=0\,,\quad (f,\zeta)^5=\frac{5}{6}n-\frac{2}{9}Am\,,\quad (f,\zeta)^4=\frac{1}{3}\beta\,,$$

$$(f,\zeta)^3=-\frac{1}{3}f\left(C+\frac{1}{3}AB\right)+\frac{1}{6}Bp+l\left(\Delta+\frac{1}{3}Ak\right)-\frac{2}{7}km\,,$$

$$(f,\zeta)^2=\frac{2}{9}\eta\left(\frac{1}{6}A^2-B\right)+\frac{1}{9}A\theta-\frac{1}{3}l\delta\,,$$

$$(f,\zeta)=\frac{1}{6}f\left(\frac{1}{3}A\Delta+\frac{1}{3}Bk+\frac{1}{2}l^2\right)-\frac{1}{2}hm\,,$$

$$(f,\eta)^6=0\,,\quad (f,\eta)^5=\frac{5}{8}\Delta-\frac{1}{12}Ak\,,\quad (f,\eta)^4=-\frac{1}{4}\delta\,,$$

$$(f,\eta)^3=\frac{1}{8}fl-\frac{5}{16}k^2,\quad (f,\eta)^2=\frac{1}{4}\chi,\quad (f,\eta)=\frac{3}{8}fp-\frac{1}{2}kh\,,$$

$$(f,\theta)^6=0\,,\qquad (f,\theta)^5=-\frac{5}{56}\left(\frac{1}{2}A\Delta+\frac{5}{3}Bk\right)+\frac{1}{36}A^2k-\frac{5}{56}l^2\,,$$

$$(f,\theta)^4=-\frac{1}{14}(15\varepsilon+\zeta)+\frac{47}{140}A\delta\,,$$

$$(f,\theta)^3=f\left(\frac{1}{120}Al-\frac{1}{7}m\right)+\frac{9}{28}k\Delta-\frac{1}{8}Bh+\frac{9}{7.16}Ak^2+\frac{11}{56}lp\,,$$

$$(f,\theta)^2=\frac{23}{7.12}f\alpha+\frac{1}{4}l\eta-\frac{1}{12}A\chi\,,$$

$(f, \vartheta) = h\left(\Delta + \frac{1}{6} A k\right) + \frac{1}{8}(B f - A p) f - \frac{3}{8} f k l$,

$(f, \chi)^6 = -\frac{1}{6}\alpha$, $\quad (f, \chi)^5 = \frac{1}{9}(A p - B f)$, $\quad (f, \chi)^4 = -\frac{2}{15}\vartheta$,

$(f, \chi)^3 = \frac{1}{60} f\left(\Delta - \frac{1}{3} A k\right) + \frac{1}{4} k p + \frac{1}{20} h l$, $\quad (f, \chi)^2 = \frac{1}{15} f \delta$,

$(f, \chi) = -\frac{1}{6} f\left(\frac{1}{5} f l + \frac{1}{2} k^2\right) + \frac{1}{2} h p$,

$(f, t)^6 = -\frac{20}{77}\delta$, $\quad (f, t)^5 = \frac{25}{18.11}\left(f l + \frac{1}{4} k^2\right) - \frac{1}{9} A h$, $\quad (f, t)^4 = \frac{5}{33}\chi$,

$(f, t)^3 = \frac{7}{12.15} A f^2 - \frac{29}{12.11} f p - \frac{17}{8.11} k h$, $\quad (f, t)^2 = -\frac{1}{22} f \alpha$,

$(f, t) = \frac{1}{8} f^2 k - \frac{1}{2} h^2$.

Spinte di k sulle forme del sistema completo di f.

. $(k, n)^2 = \frac{1}{2} B m + \frac{1}{3} C l$,

. $(k, \Delta)^3 = 0$, $\quad$. $(k, \Delta)^2 = \frac{1}{6} B k$, $\quad$. $(k, \Delta) = -\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right)$,

. $(k, p)^4 = \frac{2}{5} m$, $\quad (k, p)^3 = \frac{1}{5}\alpha$, $\quad$. $(k, p)^2 = \frac{1}{6} B f - \frac{1}{10} k l$,

. $(k, p) = -\frac{1}{2}\left(\vartheta + \frac{1}{3} A \alpha\right)$,

. $(k, h)^4 = \frac{2}{7}\Delta + \frac{2}{15} A k$, $\quad$. $(k, h)^3 = \frac{1}{2}\delta$, $\quad$. $(k, h)^2 = \frac{1}{6} f l - \frac{5}{42} k^2$,

$(k, \nu)^2 = \mu$, $\quad (k, \nu) = \frac{1}{2}(l n - m^2)$,

$(k, \mu)^2 = \frac{1}{2} B \nu$, $\quad (k, \mu) = -\frac{1}{6} l (C l + B m) + \frac{1}{2} m n$,

$(k, \lambda)^2 = \frac{1}{3} C \nu$, $\quad (k, \lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} C l + \frac{1}{2} B m\right) m - \frac{1}{2} n^2$,

$(k, \alpha)^4 = 0$, $(k, \alpha)^3 = \frac{3}{4} n - \frac{1}{2} B l$, $(k, \alpha)^2 = -\frac{1}{2}\beta$, $(k, \alpha) = \frac{1}{4} k m - \frac{1}{2} l \Delta$,

$(k, \beta)^4 = 0$, $(k, \beta)^3 = \frac{1}{4} C l - \frac{1}{8} B m$, $(k, \beta)^2 = -\frac{1}{2}\gamma$, $(k, \beta) = \frac{1}{4} k n - \frac{1}{2} m \Delta$,

$(k, \gamma)^4 = 0$, $\quad (k, \gamma)^3 = \frac{1}{4} C m - \frac{1}{8} B n$, $\quad (k, \gamma)^2 = -\frac{1}{2} C \alpha - \frac{1}{4} B \beta$,

$(k, \gamma) = \frac{1}{4} k\left(\frac{1}{3} C l + \frac{1}{2} B m\right) - \frac{1}{2} n \Delta$,

$(k, \delta)^4 = 0$, $\quad (h, \delta)^3 = \frac{1}{6}(A \Delta + B k) - \frac{1}{4} l^2$, $\quad (k, \delta)^2 = \frac{1}{3}(\varepsilon - \zeta)$,

$(k, \delta) = \frac{1}{3} k\left(\Delta + \frac{1}{6} A k\right) - \frac{1}{2} l p$,

$(k, \varepsilon)^4 = -\frac{1}{3}\nu$, $\quad (k, \varepsilon)^3 = \frac{1}{6} B \Delta - \left(\frac{7}{15} C + \frac{1}{20} A B\right) k + \frac{9}{40} l m$,

$(k, \varepsilon)^2 = \frac{1}{6} B \delta - \frac{1}{9} A \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) - \frac{4}{15} l \alpha$,

$(k, \varepsilon) = \frac{1}{12} (B f - k l) l + \frac{1}{9} (A \Delta + B k) k - \frac{1}{2} p m$,

$(k, \zeta)^4 = \frac{2}{3} \nu$, $(k, \zeta)^3 = \frac{1}{6} (B \Delta - C k)$,

$(k, \zeta)^2 = -\frac{1}{3} B \delta + \frac{1}{9} A (2\varepsilon + \zeta) + \frac{1}{3} l \alpha$,

$(h, \zeta) = \frac{1}{2} (f m - p l) - \frac{1}{3} k \left(2 \Delta + \frac{1}{3} A k\right)$,

$(k, \eta)^4 = -\frac{1}{20} \alpha$, $(k, \eta)^3 = \frac{1}{16} (3 B f - 5 k l)$,

$(k, \eta)^2 = -\frac{1}{4} \left(\theta + \frac{1}{3} A \eta\right)$, $(k, \eta) = \frac{1}{2} f \Delta - \frac{5}{8} k p$,

$(k, \theta)^4 = \frac{1}{6} A \alpha - \frac{4}{7} \beta$,

$(k, \theta)^3 = -\frac{1}{2} \left(C + \frac{1}{8} A B\right) f - \frac{1}{8} B p + \left(\frac{5}{48} A k + \frac{27}{28} \Delta\right) l + \frac{1}{56} k m$,

$(k, \theta)^2 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{6} A^2 - B\right) \eta - \frac{1}{24} A \theta - \frac{5}{84} k \alpha$,

$(k, \theta) = -\frac{1}{12} \left(f l + \frac{5}{2} k^2\right) l - \frac{1}{8} k (A p - B f) + \frac{1}{2} h m$,

$(k, \chi)^4 = \frac{1}{3} \left(\varepsilon - \frac{1}{10} \zeta\right)$, $(k, \chi)^3 = -\frac{7}{20} f m - \frac{7}{10} l p + \frac{7}{90} A k^2 + \frac{29}{30} k \Delta$,

$(k, \chi)^2 = -\frac{1}{15} \left(f \alpha + \frac{1}{2} k \delta\right)$, $(k, \chi) = \frac{1}{12} k \left(k^2 - \frac{7}{5} f l\right) + \frac{1}{2} h \Delta$,

$(k, t)^4 = \frac{1}{16.11} \left(\frac{19}{3} \theta + \frac{167}{5} A \eta\right)$,

$(k, t)^3 = \frac{3}{44} f \Delta + \frac{7}{180} A f k - \frac{61}{24.11} k p - \frac{1}{4} h l$,

$(k, t)^2 = \frac{1}{6} f \delta - \frac{5}{11.12} k \eta$, $(k, t) = \frac{1}{12} f \left(f l - \frac{1}{2} k^2\right) - \frac{1}{2} h p$.

Spinte di l sulle forme di f.

$.\,(l, l)^2 = A_{ll} = 2C + \frac{1}{3} AB$, $.\,(l, m)^2 = A_{lm} = \frac{2}{3} (B^2 + AC)$, $.\,(l, n)^2 = D$,

$.\,(l, \Delta)^2 = n - \frac{1}{3} B l$, $(l, \Delta) = \beta$,

$.\,(l, p)^2 = \frac{1}{3} (A \Delta + B k) - \frac{1}{10} l^2$, $.\,(l, h)^2 = \frac{1}{3} (A p - B f) + \frac{5}{7} k l$,

$.\,(l, \nu)^2 = 0$, $.\,(l, \nu) = \frac{1}{2} (A_{lm} l - A_{ll} m)$,

$.\,(l, \mu)^2 = 0$, $.\,(l, \mu) = \frac{1}{2} (A_{ll} n - D l)$,

$.\,(l, \lambda)^2 = R$, $.\,(l, \lambda) = \frac{1}{2} (D m - A_{lm} n)$,

$$(l,\alpha)^2 = -\frac{1}{2}\nu\,, \quad (l,\alpha) = \frac{1}{2}A_{ll}k - \frac{3}{4}lm\,,$$

$$(l,\beta)^2 = -\frac{1}{2}\mu\,, \quad (l,\beta) = \frac{1}{2}A_{lm}k - \frac{1}{4}ln - \frac{1}{2}m^2\,.$$

$$(l,\gamma)^2 = \lambda + \frac{1}{4}B\nu\,, \quad (l,\gamma) = \frac{1}{2}Dk - \frac{1}{4}l\left(\frac{1}{2}Bm + \frac{1}{3}Cl\right) - \frac{1}{2}mn\,,$$

$$(l,\delta)^2 = \frac{2}{9}A\alpha - \frac{4}{3}\beta\,, \quad (l,\delta) = \frac{1}{2}A_{ll}f - \frac{5}{3}l\left(\Delta + \frac{1}{6}Ak\right),$$

$$(l,\varepsilon)^2 = \frac{2}{9}(B\alpha - A\beta)\,, \quad (l,\varepsilon) = \frac{1}{2}A_{ll}p - \frac{5}{6}l\left(\frac{1}{3}A\Delta + \frac{1}{3}Bk - \frac{1}{10}l^2\right).$$

$$(l,\zeta)^2 = -\frac{1}{9}B\alpha - \frac{2}{9}A\beta - 2\gamma\,. \quad (l,\zeta) = \frac{1}{2}A_{lm}f - \frac{1}{3}ln - m\left(\Delta + \frac{1}{6}Ak\right).$$

$$(l,\eta)^2 = \frac{5}{4}\varepsilon + \zeta\,, \quad (l,\eta) = \frac{1}{2}fm - \frac{1}{8}lp - k\left(\Delta + \frac{1}{6}Ak\right),$$

$$(l,\theta)^2 = \frac{A\varepsilon - B\delta}{4} + \frac{5}{14}l\alpha\,, \quad (l,\theta) = \frac{1}{2}A_{ll}h - \frac{7}{8}l\left(\frac{Ap - Bf}{3} + \frac{5}{7}kl\right),$$

$$(l,\chi)^2 = \frac{1}{3}\eta\left(\frac{1}{6}A^2 - B\right) + \frac{1}{6}A\theta - \frac{1}{6}k\alpha - \frac{1}{30}l\delta\,,$$

$$(l,\chi) = -\frac{1}{6}(Ap - Bf + 2kl)k + \frac{1}{2}hm\,,$$

$$(l,t)^2 = \frac{25}{66}l\eta - \frac{1}{3}A\chi + \frac{5}{12}k\delta\,,$$

$$(l,t) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{3}Ap - \frac{1}{3}Bf + \frac{3}{4}kl\right) - h\left(\Delta + \frac{1}{6}Ak\right).$$

Spinte di h sulle forme di f.

$$(h,m)^2 = -\frac{1}{3}A_{ll}f + \frac{1}{3}l(Ak + 5\Delta) - \frac{5}{42}km\,,$$

$$(h,m) = \frac{1}{3}\eta\left(\frac{1}{6}A^2 - B\right) + \frac{1}{6}A\theta - \frac{1}{2}l\delta\,,$$

$$(h,n)^2 = -\frac{1}{9}\left(2AC + \frac{5}{2}B^2\right)f - \frac{1}{3}Cp + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}A\Delta + Bk\right)l$$
$$+\left(\frac{1}{6}Am - \frac{2}{7}n\right)k + \Delta m + \frac{1}{4}l^3\,,$$

$$(h,n) = \frac{1}{3}\eta\left(\frac{1}{6}AB - C\right) + \frac{1}{6}B\theta - \frac{1}{2}(l\zeta + m\delta)\,,$$

$$(h,\Delta)^4 = -\frac{1}{30}A\Delta - \frac{5}{42}Bk + \frac{1}{4}l^2\,, \quad (h,\Delta)^3 = \frac{1}{28}(-9\varepsilon + 5\zeta)\,,$$

$$(h,\Delta)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{3}{7}\Delta + \frac{1}{9}Ak\right) - \frac{1}{2}lp\,, \quad (h,\Delta) = -\frac{1}{3}f\alpha - \frac{1}{2}l\eta\,,$$

$$(h,p)^6 = \frac{2}{15}Al - \frac{3}{14}m\,, \quad (h,p)^5 = -\frac{1}{14}\alpha\,,$$

$$(h,p)^4 = \frac{17}{30.7}Bf - \frac{1}{15}Ap + \frac{1}{14}kl\,, \quad (h,p)^3 = \frac{9}{70}\theta - \frac{1}{42}A\eta\,,$$

$$(h,p)^2 = \frac{1}{6}k\left(\frac{1}{3}Af - \frac{5}{7}p\right) + \frac{3}{5}hl\,, \quad (h,p) = -\frac{1}{6}(f\delta + k\eta)\,,$$

$$.(h,h)^8=\frac{2}{15}A^2-\frac{5}{7}B\,. \qquad .(h,h)^6=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{6}Ak+\frac{10}{7}\Delta\right),$$

$$.(h,h)^4=\frac{2}{21}fl+\frac{25}{6.49}k^2-\frac{1}{15}Ah, \quad .(h,h)^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}Af-p\right)f-\frac{1}{14}kh,$$

$$(h,\nu)^2=\frac{1}{3}\left(B-\frac{1}{3}A^2\right)\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta\right)-\frac{2}{7}k\nu+\frac{1}{6}l\alpha\,,$$

$$(h,\nu)=\frac{1}{2}l\,(h,m)^2-\frac{1}{2}m\,(h,l)^2=\ldots,$$

$$(h,\mu)^2=\frac{1}{6}A_{ll}(\zeta-\varepsilon)-\frac{1}{4}A_{lm}\delta+\nu\left(\Delta+\frac{1}{6}Ak\right)+\frac{1}{6}\alpha(Bl-Am)-\frac{2}{7}k\mu\,,$$

$$(h,\mu)=\frac{1}{2}n\,(h,l)^2-\frac{1}{2}l\,(h,m)^2=\ldots,$$

$$\begin{aligned}(h,\lambda)^2=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}A^2B-B^2-\frac{1}{2}AC\right)\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta\right)+\frac{1}{12}\left(C-\frac{1}{2}AB\right)l\alpha\\ +\frac{1}{3}B\left(m\alpha+\frac{1}{2}k\nu\right)-\frac{2}{7}k\lambda+\frac{1}{4}\mu\,(f,l)^2+\frac{1}{4}\nu\,(f,m)^2\\ +\frac{1}{4}l\,(f,\mu)^2+\frac{1}{4}m\,(f,\nu)^2=\ldots,\end{aligned}$$

$$(h,\lambda)=\frac{1}{2}m\,(h,n)^2-\frac{1}{2}n\,(h,m)^2=\ldots,$$

$$(h,\alpha)^4=-\frac{1}{5}A\alpha+\frac{6}{7}\beta\,, \quad (h,\alpha)^3=\frac{5}{28}\left(l\Delta-\frac{1}{2}km\right),$$

$$(h,\alpha)^2=\frac{1}{6}\eta\left(\frac{1}{6}A^2-B\right)-\frac{5}{42}k\alpha+\frac{1}{4}l\delta\,,$$

$$(h,\alpha)=\frac{1}{6}k\,(Ap-Bf)-\frac{1}{12}fl^2+\frac{5}{12}k^2l-\frac{1}{4}hm\,,$$

$$(h,\beta)^4=-\frac{1}{6}B\alpha+\frac{2}{15}A\beta-\frac{1}{7}\gamma\,,$$

$$\begin{aligned}(h,\beta)^3=-\frac{1}{24}B^2f-\frac{1}{4}Cp+k\left(\frac{1}{6}Bl+\frac{11}{72}Am-\frac{3}{14}n\right)+\frac{1}{16}l^3\\ +\frac{1}{12}\Delta\left(\frac{1}{2}Al+\frac{5}{7}m\right),\end{aligned}$$

$$(h,\beta)^2=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}AB-C\right)\eta+\frac{1}{12}B\theta+\frac{1}{24}f\nu+\frac{1}{8}(m\delta-l\zeta)\,,$$

$$(h,\beta)=\frac{5}{24}A_{ll}fk-\frac{1}{12}flm-\frac{1}{18}Ak^2l-\frac{1}{2}kl\Delta-\frac{1}{4}hn\,,$$

$$(h,\gamma)^4=\frac{5}{42}C\alpha+\frac{2}{21}B\beta+\frac{1}{30}A\gamma+\frac{1}{4}l\nu\,,$$

$$\begin{aligned}(h,\gamma)^3=-\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{6}AB+C\right)f-\frac{1}{4}Df+\frac{1}{3}\Delta\left(\frac{2}{7}n+\frac{17}{8}Bl\right)\\ +\left(\frac{2}{21}Cl+\frac{1}{8}ABl-\frac{5}{16\cdot 7}Bm-\frac{1}{18}An\right)k+\frac{1}{12}ACp+\frac{1}{4}l^2m\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(h,\gamma)^2=\frac{1}{12}B\left(\frac{1}{6}A^2-B\right)\eta+\frac{1}{6}\left(C+\frac{1}{4}AB\right)\theta-\frac{1}{24}f\mu\\ -\frac{5}{6}\left(\frac{1}{8}l^2\alpha+\frac{1}{7}k\gamma\right)+\frac{1}{8}\left(3n-\frac{1}{3}Bl\right)\delta-\frac{1}{24}Al\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta\right),\end{aligned}$$

$$(h, \gamma) = \frac{1}{2} k (h, n)^2 - \frac{1}{2} n (k, h)^2 - \frac{1}{4} h (k, n)^2 = \dots ,$$

$$(h, \delta)^6 = 0 , \quad (h, \delta)^5 = \left(\frac{1}{27.5} A^2 - \frac{25}{18.7} B\right) k - \frac{5}{18.7} A \Delta - \frac{5}{42} l^2 ,$$

$$(h, \delta)^4 = \frac{1}{45} A\delta - \frac{8}{7} \varepsilon + \frac{5}{21} \zeta ,$$

$$(h, \delta)^3 = - \frac{1}{18} A f l - \frac{1}{14} l p + \frac{1}{12.7} A k^2 + \frac{1}{14} k \Delta ,$$

$$(h, \delta)^2 = - \frac{1}{18.7} f \alpha - \frac{19}{30.7} l \eta ,$$

$$(h, \delta) = \frac{1}{6} (A p - B f) f + \frac{1}{4} f k l - \frac{1}{3} \left(2 \Delta + \frac{1}{3} A k\right) h ,$$

$$(h, \varepsilon)^6 = \frac{1}{14} \nu , \quad (h, \varepsilon)^5 = - \frac{1}{8} A_u k - \frac{1}{10} A l^2 + \frac{3.13}{16.7} l m ,$$

$$(h, \varepsilon)^4 = - \frac{11}{2.3.5.7} B \delta - \frac{73}{2.9.5.7} A \varepsilon + \frac{5}{2.9.7} A \zeta + \frac{23}{4.9.7} l \alpha ,$$

$$(h, \varepsilon)^3 = \frac{1}{4.3.7} f \left(A m - \frac{11}{3} B l\right) + \frac{1}{9.7} k^2 \left(\frac{1}{3} A^2 - \frac{5}{4} B\right)$$
$$+ \frac{1}{4.7} k \left(\frac{1}{3} A \Delta - \frac{9}{2} l^2\right) - \frac{2}{21} A_u h - \frac{1}{42} A l p ,$$

$$(h, \varepsilon)^2 = - \frac{2}{27.5} A f \alpha + \frac{1}{30} k \delta - \frac{2}{21} p \alpha - \frac{1}{14} k \varepsilon - \frac{13}{9.5.7} A l \eta$$
$$+ \frac{2.97}{3.25.7} l \theta + \frac{1}{9} B \chi ,$$

$$(h, \varepsilon) = \frac{1}{6} p (A p - B f) - \frac{1}{36} A f k l + \frac{5}{12} k l p - \frac{1}{9} h (A \Delta + B k) - \frac{4}{15} h l^2,$$

$$(h, \zeta)^6 = - \frac{5}{14} \nu ,$$

$$(h, \zeta)^5 = \left(\frac{1}{7} A B + \frac{5}{36} C\right) k + \left(\frac{1}{27} A^2 + \frac{5}{14} B\right) \Delta + \frac{1}{18} A l^2 - \frac{31}{12.7} l m ,$$

$$(h, \zeta)^4 = \frac{1}{72} B \delta - \frac{25}{18.7} A \varepsilon + \frac{17}{45.7} A \zeta + \frac{5}{18.7} l \alpha ,$$

$$(h, \zeta)^3 = \left(\frac{1}{36} B l - \frac{1}{12} A m + \frac{1}{14} n\right) f - \left(\frac{1}{12} A l - \frac{3}{7} m\right) p$$
$$+ \frac{1}{36} \left(\frac{1}{3} A^2 - \frac{31}{7} B\right) k^2 + \frac{1}{28} \left(\frac{1}{3} A \Delta - l^2\right) k - \frac{1}{4} l \beta .$$

$$(h, \zeta)^2 = \left(- \frac{1}{27} A \alpha + \frac{3}{35} \beta\right) f + \frac{9}{14.5} k \zeta + \left(\frac{3}{35} m - \frac{1}{18} A l\right) \eta + \frac{1}{9} B \chi + \frac{1}{6} l \beta ,$$

$$(h, \zeta) = \frac{1}{2} f (h, m)^2 - \frac{1}{3} h (f, m)^2 - \frac{1}{2} m (f, h)^2 = \dots ,$$

$$(h, \eta)^8 = 0 , \qquad (h, \eta)^7 = \frac{5}{16.7} m + \frac{1}{12} A l , \qquad (h, \eta)^6 = \frac{15}{8.7} \alpha ,$$

$$(h, \eta)^5 = \frac{1}{24} \left(A p - \frac{5}{14} B f\right) - \frac{5}{16.7} k l ,$$

$$(h, \eta)^4 = \frac{17}{28} \theta + \frac{33}{140} A \eta , \quad (h, \eta)^3 = \left(\frac{23}{42} \Delta - \frac{1}{48} A k\right) f + \frac{25}{16.7} k p - \frac{1}{16} h l ,$$

$$(h,\eta)^2=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{7}k\eta-f\delta\right),\quad (h,\eta)=\frac{1}{12}f^2l-\frac{5}{42}fk^2-\frac{1}{8}hp,$$

$$(h,\theta)^8=0,\ (h,\theta)^7=\frac{1}{4}l\left(\frac{5}{14}B-\frac{1}{9}A^2\right)+\frac{5}{28}n,\ (h,\theta)^6=\frac{1}{2.7^2}\left(\frac{1}{6}A\alpha-5\beta\right),$$

$$(h,\theta)^5=\frac{1}{28}f\left(5C-\frac{1}{36}AB\right)-\frac{11}{16.7}Akl-\frac{5^2}{8.3.7^2}km-\frac{5.109}{4.3.7^2}l\Delta+\frac{17}{2.9.7}Bp,$$

$$(h,\theta)^4=\frac{1}{28}l\delta+\frac{5^2}{6.7^2}k\alpha-\frac{53}{8.3.5.7}A\theta.$$

$$(h,\theta)^3=\frac{1}{16.3}fk\left(\frac{1}{3}A^2-\frac{19}{7}B\right)-\frac{1}{8.7}fl^2+\frac{5}{16.3.7}Akp+\frac{13}{8.3.5}Ahl-\frac{1}{2.7}hm,$$

$$(h,\theta)^2=\frac{1}{6}f\left(\frac{1}{12}A\delta+\varepsilon\right)+\frac{1}{28}k\theta-\frac{1}{72}Ak\eta-\frac{1}{6}p\delta-\frac{1}{42}h\alpha$$

$$+\frac{5}{42}l\chi+\frac{1}{12}Bt,$$

$$(h,\theta)=\frac{1}{6}\left(p-\frac{1}{3}Af\right)fl+\frac{1}{8}khl+\frac{1}{24}(Ap-Bf)h,$$

$$(h,\chi)^8=0,\quad (h,\chi)^7=\left(\frac{313}{8.9.7^2}B-\frac{38}{3^2.5^2}A^2\right)k-\frac{31}{8.5.7}A\Delta+\frac{13}{16.3.7}l^2,$$

$$(h,\chi)^6=-\frac{32}{3.25.7}A\delta+\frac{3.2551}{4.5.7^3}\varepsilon+\frac{191}{4.5.7^3}\zeta,$$

$$(h,\chi)^5=-\frac{11}{2.27.7}Afl+\frac{41}{2.3.7^2}lp+\frac{1}{12.7}Ak^2-\frac{19}{12.7^2}k\Delta,$$

$$(h,\chi)^4=-\frac{1}{48}f\alpha+\frac{1}{14}k\delta-\frac{19}{3.25.7}l\eta-\frac{1}{15}A\chi,$$

$$(h,\chi)^3=\frac{1}{30}(Ap-Bf)f+\frac{1}{60}fkl+\left(\frac{1}{90}Ak-\frac{37}{70}\Delta\right)h,$$

$$(h,\chi)^2=\frac{1}{20}lt-\frac{1}{60}f\theta+\frac{2}{21}k\chi-\frac{1}{12}h\delta,\ (h,\chi)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{10}hl+\frac{1}{3}kp-\frac{1}{18}Afk\right),$$

$$(h,t)^8=-\frac{5}{66}\alpha,$$

$$(h,t)^7=\left(\frac{1}{15}A^2-\frac{25}{8.9.11}B\right)f-\frac{25}{8.3.11}kl-\frac{5.13}{2.9.11}Ap,$$

$$(h,t)^6=\frac{5.19}{4.7^2.11}\theta+\frac{353}{4.9.7^2}A\eta,$$

$$(h,t)^5=\frac{73}{2.7.11}f\Delta-\frac{5.53}{16.27.11}Akf+\frac{25.41}{16.9.11}kp-\frac{6197}{32.7.11}hl,$$

$$(h,t)^4=\frac{19}{9.7.11}f\delta+\frac{10}{9.7.11}k\eta-\frac{1}{15}At,$$

$$(h,t)^3=\frac{5.59}{16.3.7^2.11}fk^2-\frac{2}{5.9}Afh+\frac{43}{8.3.7.11}f^2l+\frac{5.13}{2.3.7.11}hp,$$

$$(h,t)^2=-\frac{3}{5.7}f\chi-\frac{17}{4.5.7}kt+\frac{101}{2.5.7.11}h\eta,$$

$$(h,t)=f\left(\frac{1}{4.9}Af^2-\frac{1}{6}fp-\frac{11}{8.7}kh\right).$$

Spinte di p sulle forme di f.

$$(p,m)^2=\frac{1}{3}(B\Delta-Ck)+\frac{2}{5}lm\,,\quad (p,m)=\frac{1}{3}A\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta\right)-\frac{1}{3}B\delta+\frac{1}{6}l\alpha\,,$$

$$(p,n)^2=\frac{1}{3}k\left(\frac{1}{3}AC+\frac{1}{2}B^2\right)+\frac{1}{3}\Delta\left(2C+\frac{1}{2}AB\right)+\frac{1}{4}Bl^2-\frac{3}{5}ln\,,$$

$$(p,n)=-\frac{1}{6}C\delta+\frac{1}{6}B(\varepsilon-\zeta)-\frac{1}{4}k\nu-\frac{1}{2}m\alpha\,,$$

$$(p,\Delta)^4=-\frac{1}{10}n+\frac{1}{5}Bl\,,\quad (p,\Delta)^3=-\frac{23}{60}\beta\,,$$

$$(p,\Delta)^2=\frac{1}{6}(km-Bp)+\frac{1}{15}l\Delta\,,\quad (p,\Delta)=-\frac{1}{6}(B\gamma+k\alpha)\,,$$

$$(p,p)^6=-\frac{1}{5}C+\frac{2}{15}AB\,,\quad (p,p)^4=\frac{1}{10}Bk-\frac{1}{15}A\Delta+\frac{3}{50}l^2\,,$$

$$(p,p)^2=\frac{1}{6}fm-\frac{1}{5}lp-\frac{1}{6}k\Delta\,,$$

$$(p,\nu)^2=-\frac{1}{3}C\alpha-\frac{2}{3}B\beta+\frac{1}{3}A\gamma-l\nu\,,$$

$$(p,\nu)=\frac{1}{4}l^2m+\frac{1}{6}l(B\delta-Ck)-\frac{1}{6}m(A\Delta+Bk)\,,$$

$$(p,\mu)^2=\frac{1}{6}B(B\alpha-2A\beta)+B\gamma-\frac{3}{5}l\mu\,,$$

$$(p,\mu)=-\frac{1}{8}Bl^3+\frac{1}{4}l^2n-\frac{1}{6}kl\left(\frac{1}{3}AC+\frac{1}{2}B^2\right)$$
$$-\frac{1}{6}\Delta l\left(2C+\frac{1}{2}AB\right)+\frac{1}{6}n(A\Delta+Bk)\,,$$

$$(p,\lambda)^2=\frac{1}{9}C(B\alpha-2A\beta)+\frac{2}{3}C\gamma-\frac{3}{5}l\lambda\,.$$

$$(p,\lambda)=\frac{1}{8}Bl^2m-\frac{1}{2}lmn+\frac{1}{6}km\left(\frac{1}{3}AC+\frac{1}{2}B^2\right)$$
$$+\frac{1}{6}\Delta m\left(2C+\frac{1}{2}AB\right)+\frac{1}{6}n(Ck-B\Delta)\,,$$

$$(p,\alpha)^4=\frac{3}{10}\nu\,,\quad (p,\alpha)^3=\frac{1}{10}k\left(\frac{1}{3}AB-\frac{1}{2}C\right)+\frac{1}{4}B\Delta-\frac{3}{20}lm\,,$$

$$(p,\alpha)^2=\frac{1}{6}A\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\zeta\right)+\frac{3}{20}l\alpha\,.$$

$$(p,\alpha)=-\frac{1}{12}Bfl-\frac{1}{4}pm+\frac{1}{6}k(A\Delta+Bk)\,,$$

$$(p,\beta)^4=-\frac{1}{5}\mu\,,$$

$$(p,\beta)^3=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}B^2-\frac{1}{2}AC\right)k-\frac{1}{8}Bk^2-\frac{1}{4}C\Delta+\frac{1}{5}ln+\frac{1}{40}m^2\,,$$

$$(p,\beta)^2=\frac{1}{12}B(\varepsilon+\zeta)-\frac{1}{12}C\delta-\frac{19}{120}k\nu-\frac{7}{60}m\alpha-\frac{1}{15}l\beta\,,$$

$$(p,\beta)=-\frac{1}{12}Bfm+\frac{1}{4}klm-\frac{1}{4}pn+\frac{1}{6}k(B\Delta-Ck)\,.$$

$$(p,\gamma)^4 = -\frac{3}{5}\lambda + \frac{1}{60}B\nu\,,$$

$$(p,\gamma)^3 = \left(\frac{1}{10}D - \frac{1}{24}BC\right)k + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}AC\right)\Delta - \frac{7}{120}Cl^3$$
$$+ \frac{1}{10}Blm - \frac{7}{20}mn\,,$$

$$(p,\gamma)^2 = \frac{1}{36}B^2\delta + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}AB + C\right)\varepsilon + \frac{1}{72}AB\zeta - \frac{7}{72}Bl\alpha + \frac{2}{15}n\alpha$$
$$- \frac{1}{15}l\gamma + \frac{1}{30}k\mu\,,$$

$$(p,\gamma) = -\frac{1}{12}Bfn - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}Bm + \frac{1}{3}Cl\right)p + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}AC\right)k^2$$
$$+ \frac{1}{6}A_u k\Delta + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}Bl - \frac{1}{5}n\right)kl\,,$$

$$(p,\delta)^6 = 0\,,\quad (p,\delta)^5 = \frac{1}{6}(n - Bl)\,,\quad (p,\delta)^4 = \frac{2}{45}(2A\alpha - 7\beta)\,,$$

$$(p,\delta)^3 = -\left(\frac{3}{10}C + \frac{1}{45}AB\right)f + \frac{1}{6}(km - Bp) + \frac{2}{3}l\Delta\,,$$

$$(p,\delta)^2 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}A^2 - B\right)\gamma + \frac{1}{18}(A\theta + k\alpha)\,,$$

$$(p,\delta) = \frac{1}{6}f\left(A\Delta + Bk - \frac{1}{2}l^2\right) - \frac{1}{12}k^2l - \frac{1}{3}p\left(2\Delta + \frac{1}{3}Ak\right)\,,$$

$$(p,\varepsilon)^6 = 0\,,\quad (p,\varepsilon)^5 = \frac{1}{9}\left(Cl + \frac{5}{4}Bm - \frac{1}{4}An\right)\,,$$

$$(p,\varepsilon)^4 = \frac{1}{2.9.5}\left(7B\alpha - \frac{11}{3}A\beta\right)\,,$$

$$(p,\varepsilon)^3 = -\frac{1}{36}B^2f + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{3}AB - \frac{1}{2}C\right)p - \frac{1}{60}Bkl - \frac{1}{36}Akm$$
$$- \frac{7}{200}l^3 + \frac{7}{180}Al\Delta\,,$$

$$(p,\varepsilon)^2 = -\frac{1}{24}f\nu + \frac{1}{8}m\delta - \frac{1}{54}Ak\alpha - \frac{1}{30}l\varepsilon + \frac{1}{18}B\theta\,,$$

$$(p,\varepsilon) = -\frac{1}{12}flm + \frac{1}{18}(A\Delta + Bk)p + \frac{1}{15}l^2p + \frac{1}{12}kl\Delta\,,$$

$$(p,\zeta)^6 = 0\,,\quad (p,\zeta)^5 = -\frac{1}{18}Cl - \frac{1}{4}Bm + \frac{1}{9}An\,,$$

$$(p,\zeta)^4 = \frac{1}{15}B\alpha - \frac{17}{270}A\beta + \frac{1}{5}\gamma\,,$$

$$(p,\zeta)^3 = -\left(\frac{1}{10}AC + \frac{13}{36.5}B^2\right)f - \frac{1}{6}\left(C + \frac{1}{3}AB\right)p + \frac{1}{20}l^3$$
$$+ \left(\frac{13}{90}A\Delta + \frac{7}{60}Bk\right)l + \left(\frac{3}{10}\Delta - \frac{1}{36.5}Ak\right)m,$$

$$(p,\zeta)^2 = \frac{1}{54}AB\gamma + \frac{1}{18}B\theta + \frac{1}{60}f\nu - \frac{3}{20}m\delta + \frac{1}{20}l\zeta + \frac{1}{6}\left(\beta - \frac{1}{9}A\alpha\right)k,$$

$$(p,\zeta) = \frac{1}{6}f(A\Delta - Bk + lm) - \frac{1}{12}k^2m - \frac{1}{3}p\left(\frac{1}{3}A\Delta + \frac{1}{3}Bk + \frac{1}{2}l^2\right)\,,$$

$$(p,\eta)^6 = 0\,, \quad (p,\eta)^5 = -\frac{7}{16.3}Bk + \frac{1}{8.3}A\Delta + \frac{1}{16}l^2\,,$$

$$(p,\eta)^4 = -\frac{1}{10}\zeta\,, \quad (p,\eta)^3 = \frac{3}{16}fm - \frac{1}{40}lp - \frac{1}{12}Ak^2 - \frac{3}{16}k\Delta\,,$$

$$(p,\eta)^2 = -\frac{1}{60}f\alpha - \frac{3}{20}k\delta + \frac{1}{20}l\eta\,,$$

$$(p,\eta) = \frac{1}{12}Bf^2 - \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{12}(fl + k^2)k\,,$$

$$(p,\theta)^6 = \frac{3}{28}\nu\,,$$

$$(p,\theta)^5 = -\frac{1}{8.3.5.7}\left(251\,C + \frac{1}{6}AB\right)k + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{24}A^2 - \frac{4}{7}B\right)\Delta$$
$$+ \frac{1}{20}\left(-\frac{19}{12}Al + \frac{37}{7}m\right)l\,,$$

$$(p,\theta)^4 = \frac{22}{3.5.7}B\delta - \frac{1}{2.7}A\left(\frac{13}{5}\varepsilon + \frac{1}{6}\zeta\right) - \frac{27}{4.5.7}l\alpha\,,$$

$$(p,\theta)^3 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}Am + \frac{27}{35}Bl\right)f + \left(\frac{13}{8.3.5}Al - \frac{1}{14}m\right)p$$
$$+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}A^2 + \frac{1}{28}B\right)k^2 + \frac{1}{16.7}\left(\frac{59}{3}A\Delta + 15\,l^2\right)k - \frac{3}{20}A_u k\,,$$

$$(p,\theta)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{15}Af - \frac{1}{7}p\right)\alpha + \frac{1}{30}Ak\delta - \frac{1}{12.7}k\varepsilon + \frac{1241}{12.7.25}l\theta$$
$$+ \frac{13}{4.9.5.7}Al\eta - \frac{1}{12}B\chi\,,$$

$$(p,\theta) = -\frac{1}{8}p\left(Ap - Bf + \frac{5}{3}kl\right) - \frac{1}{36}Afkl$$
$$+ \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{3}A\Delta + \frac{1}{3}Bk - \frac{7}{10}l^2\right),$$

$$(p,\chi)^6 = -\frac{2}{45}A\alpha + \frac{5.31}{36.7^2}\beta\,,$$

$$(p,\chi)^5 = -\frac{1}{5}\left(C + \frac{13}{2.27.7}AB\right)f - \frac{191}{36.7^2}Bp + \frac{377}{8.9.7^2}km + \frac{4}{9}l\Delta\,,$$

$$(p,\chi)^4 = \left(\frac{2}{27.5.7}A^2 + \frac{113}{2.3^3.5.7^2}B\right)\eta - \left(\frac{1}{3.5.7}Ak + \frac{1}{7^2}\Delta\right)p - \frac{17}{9.5.7^2}k\alpha - \frac{1}{9.7}A\theta\,,$$

$$(p,\chi)^3 = \frac{1}{120}\left(\frac{7}{2}A\Delta + 23Bk\right)f - \frac{1}{10}\left(\Delta + \frac{11}{12}Ak\right)p + \frac{29}{2400}fl^2 - \frac{73}{480}k^2l + \frac{7}{20}hm\,,$$

$$(p,\chi)^2 = -\frac{7}{120}f\varepsilon + \frac{7}{24}p\delta + \frac{1}{36}Ak\eta + \frac{1}{20}k\theta - \frac{2}{15}h\alpha - \frac{29}{120}l\chi - \frac{1}{6}Bt\,,$$

$$(p,\chi) = \frac{1}{2}(h,p)^2k - \frac{1}{2}(k,p)^2h - \frac{1}{5}(k,h)^2p = \dots\,,$$

$$(p,t)^6 = \frac{1}{3.5}A\delta - \frac{9}{2.7.11}\zeta\,,$$

$$(p,t)^5 = \frac{7}{2.27.5}Afl - \frac{389}{8.9.11}fm - \frac{489}{8.3.5.11}lp + \frac{559}{8.27.11}Ak^2$$
$$+ \frac{587}{8.9.11}k\Delta - \frac{1}{2}Bh\,,$$

$$(p,t)^4 = -\frac{193}{8.3.5.7} f\alpha + \frac{81}{8.5.11} k\delta - \frac{71}{8.5.11} l\eta + \frac{1}{9.5} A\chi ,$$

$$(p,t)^3 = \frac{27}{8.5.11} Bf^2 - \frac{1}{90} Afp - \frac{139}{32.3.11} p^2 - \frac{27}{8.5.11} fkl - \frac{1}{30} Akh + \frac{9}{16.11} k^3 + \frac{3}{10} h\Delta ,$$

$$(p,t)^2 = \frac{1}{30} f\theta + \frac{1}{60} Af\eta - \frac{1}{60} k\chi + \frac{1}{20} lt - \frac{3}{20} h\delta - \frac{3}{55} p\eta .$$

$$(p,t) = \frac{1}{36} Af^2k - \frac{1}{24} fkp + \frac{4}{15} fhl - \frac{1}{12} k^2h .$$

Spinte di m sulle forme di f.

$$.(m,m)^2 = D , \quad .(m,n)^2 = A_{mn} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} ABC + B^3 + 2C^2\right) ,$$

$$.(m,\Delta)^2 = \frac{1}{3}\left(Cl + \frac{1}{2} Bm\right) , \quad .(m,\Delta) = \gamma ,$$

$$.(m,\nu)^2 = 0 , \quad .(m,\nu) = \frac{1}{2}(Dl - A_{lm} m) ,$$

$$.(m,\mu)^2 = R , \quad .(m,\mu) = \frac{1}{2}(A_{lm} n - A_{mn} l) ,$$

$$.(m,\lambda)^2 = 0 , \quad .(m,\lambda) = \frac{1}{2}(A_{mn} m - Dn) ,$$

$$(m,\alpha)^2 = \mu , \quad (m,\alpha) = \frac{1}{2}\left(A_{lm} k - ln - \frac{1}{2} m^2\right) ,$$

$$(m,\beta)^2 = -\frac{1}{2}\lambda , \quad (m,\beta) = \frac{1}{2}\left(Ak - \frac{3}{2} mn\right) .$$

$$(m,\gamma)^2 = -\frac{1}{6} C\nu , \quad (m,\gamma) = \frac{1}{2} A_{mn} k - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} Bm + \frac{1}{3} Clm\right) - \frac{1}{2} n^2 ,$$

$$(m,\delta)^2 = \frac{1}{3}(B\alpha - 4A\beta + 2\gamma) .$$

$$(m,\delta) = \frac{1}{3}(B^2 + AC)f - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} A\Delta + \frac{1}{3} Bk + \frac{1}{2} l^2\right)l - \frac{1}{3}\left(2\Delta + \frac{1}{3} Ak\right)m ,$$

$$(m,\varepsilon)^2 = -\frac{1}{3}\left(C\alpha + \frac{4}{3} B\beta + \frac{1}{2} l\nu\right) ,$$

$$(m,\varepsilon) = +\frac{1}{6} l(Ck - B\Delta) - \frac{1}{9} m(Bk + A\Delta) + \frac{1}{2} A_{lm} p - \frac{1}{6} l^2 m .$$

$$(m,\zeta)^2 = \frac{2}{9}(B\beta - A\gamma) + \frac{1}{9} l\nu ,$$

$$(m,\zeta) = \frac{1}{2} Df - \frac{5}{6}\left(\frac{1}{3} A\Delta + \frac{1}{3} Bk + \frac{1}{2} l^2\right) m ,$$

$$(m,\eta)^2 = \frac{1}{4}\left(B\delta + \frac{1}{3} A\varepsilon + \frac{1}{6} A\zeta - \frac{5}{2} l\alpha\right) .$$

$$(m,\eta) = \frac{1}{2}\left(fn - \frac{1}{4} pm\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} A\Delta + \frac{1}{3} Bk + \frac{1}{2} l^2\right) .$$

$$(m,\vartheta)^2 = -\frac{1}{3}\left(2C + \frac{1}{4} AB\right)\delta - \frac{1}{36} A^2\varepsilon + \frac{1}{12}\left(B - \frac{1}{6} A^2\right)\zeta - \frac{5}{36.7} k\nu + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{8} Al - \frac{1}{21} m\right)\alpha - \frac{5.31}{18.7} l\beta ,$$

$$(m, \theta) = \frac{1}{2} f \left(\frac{1}{3} A_{ll}\, l + \frac{1}{4} B m\right) + \frac{1}{2} A_{lm}\, h - \frac{5}{24} k\, l\, m$$

$$+ \frac{1}{6} l^2 (5\Delta - A k) - \frac{1}{2} A p m \,,$$

$$(m, \chi)^2 = \frac{7}{20} f \nu - \frac{1}{6} k \beta - \frac{5}{24} m \delta - \frac{13}{40} l \zeta + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} AB - C\right) \alpha + \frac{1}{6} B \theta \,.$$

$$(m, \chi) = \frac{1}{6}\left(A_{ll} k - \frac{1}{5} l\, m\right) f + \frac{1}{6} k^2 \left(\frac{1}{2} m - A l\right) - \frac{5}{6} k\, l\, \Delta + \frac{1}{2} h\, n \,,$$

$$(m, t)^2 = \left(\frac{1}{9} A \alpha - \frac{1}{10} \beta\right) f + \left(\frac{1}{6} A l - \frac{3}{35} m\right) \alpha - \frac{3}{20} k \zeta - \frac{1}{3} B \chi + \frac{1}{2} l \theta \,.$$

$$(m, t) = -\frac{1}{6} A_{ll} f^2 + \frac{1}{6} f \left(5 l \Delta + A k l - \frac{1}{14} k m\right) - h \left(\frac{A\Delta + Bk}{6} + \frac{1}{4} l^2\right).$$

Spinte di n sulle forme di f.

$$. (n, n)^2 = A_{nn} = \frac{2}{9}(AC + B^2)\, C + \frac{1}{2} B D \,,$$

$$. (n, \Delta)^2 = \frac{1}{3}\left(C m + \frac{1}{2} B n\right), \quad (n, \Delta) = \frac{1}{3} C \alpha + \frac{1}{2} B \beta \,.$$

$$. (n, \nu)^2 = R \,, \quad . (n, \nu) = \frac{1}{2}(A_{mn} l - D m) \,,$$

$$. (n, \mu)^2 = 0 \,, \quad . (n, \mu) = \frac{1}{2}(D n - A_{mn} l) \,,$$

$$. (n, \lambda)^2 = 0 \,, \quad . (n, \lambda) = \frac{1}{2}(A_{mm} m - A_{mn} n) \,.$$

$$(n, \alpha)^2 = -\frac{1}{2}(\lambda + B \nu) \,, \quad (n, \alpha) = \frac{1}{2} D k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} C l + \frac{1}{2} B m\right) l - \frac{1}{4} m n \,,$$

$$(n, \beta)^2 = \frac{1}{3} C \nu \,, \quad (n, \beta) = \frac{1}{2} A_{mn} k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} C l + \frac{1}{2} B m\right) m - \frac{1}{4} n^2 \,.$$

$$(n, \gamma)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} B \lambda - \frac{1}{3} C \mu\right), \quad (n, \gamma) = \frac{1}{2} A_{mm} k - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} C l + \frac{1}{2} B m\right) n \,.$$

$$(n, \delta)^2 = -\frac{1}{9}(C \alpha + A \gamma) - \frac{1}{2} l \nu \,.$$

$$(n, \delta) = \frac{1}{2} D f - \frac{1}{2} l \left(l m - \frac{1}{3} C k + \frac{1}{3} B \Delta\right) - \frac{1}{3} n \left(2 \Delta + \frac{1}{3} A k\right).$$

$$(n, \varepsilon)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{2}{9} A C\right) \alpha - \frac{2}{3}\left(C + \frac{1}{3} A B\right) \beta + \frac{1}{9} B \gamma - \frac{4}{15} l \mu \,.$$

$$(n, \varepsilon) = -\frac{1}{6} k l \left(\frac{1}{3} A C + \frac{1}{2} B^2\right) - \frac{1}{8} B l^3 + \frac{7}{30} l^2 n + \frac{1}{2} D p$$

$$- \frac{1}{9} n (A \Delta + B k) + \frac{1}{6} l \Delta \left(2 C + \frac{1}{2} A B\right),$$

$$(n, \zeta)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} l \mu + m \nu\right) + \frac{1}{27} A C \alpha + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} A B - C\right) \beta - \frac{4}{9} B \gamma \,.$$

$$(n, \zeta) = \frac{1}{2} A_{mn} f - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} B \Delta - \frac{1}{3} Ck + lm\right) m - \left(\frac{A\Delta + Bk}{9} + \frac{1}{4} l^2\right) n,$$

$$(n, \kappa)^2 = \frac{1}{8} C \partial + \frac{1}{3} B \left(\frac{5}{8} \varepsilon + \frac{1}{9} \zeta\right) - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4} k \nu + \frac{1}{2} m \alpha\right),$$

$$(n, \kappa) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} Cl + \frac{1}{2} Bm\right) f - \frac{1}{8} pn + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} Ck - \frac{1}{3} B \Delta - lm\right),$$

$$(n, \theta)^2 = ((h, n)^2, l) - \frac{1}{4}((h, l)^2, n) = \ldots,$$

$$(n, \theta) = \frac{1}{2} Dh - \frac{1}{2}(h, n)^2 l - \frac{3}{8}(h, l)^2 n = \ldots,$$

$$(n, \chi)^2 = -((k, n)^2, h) + \frac{7}{5}((h, k)^2, n) - \frac{7}{12}(h, k)^3 n = \ldots,$$

$$(n, \chi) = \frac{1}{2}(k, n)^2 l - \frac{1}{2}(h, n)^2 k - \frac{1}{5}(h, k)^2 n = \ldots,$$

$$(n, t)^2 = ((f, n)^2, h) - \frac{3}{20}(f, n) k - \frac{1}{10} f \gamma - \frac{3}{55} n \kappa = \ldots.$$

$$(n, t) = \frac{1}{2}(h, n)^2 f - \frac{1}{2}(f, n)^2 h + \frac{1}{12}(h, f)^2 n = \ldots,$$

Spinte di Δ sulle forme di f.

$$(\Delta, \Delta)^4 = \frac{1}{6} BC, \quad (\Delta, \Delta)^2 = \frac{1}{3}\left(Ck - \frac{1}{2} B \Delta\right),$$

$$(\Delta, \nu)^2 = \frac{1}{6} B \nu, \quad (\Delta, \nu) = \frac{1}{6} Cl^2 + \frac{1}{4} Blm - \frac{1}{2} mn,$$

$$(\Delta, \mu)^2 = \frac{1}{6} B \mu, \quad (\Delta, \mu) = -\frac{1}{6} Clm - \frac{1}{3} Bln + \frac{1}{2} n^2,$$

$$(\Delta, \lambda)^2 = \frac{1}{3}(C\mu - B\lambda), \quad (\Delta, \lambda) = \frac{1}{6} C(m^2 - ln),$$

$$(\Delta, \alpha)^4 = 0, \quad (\Delta, \alpha)^3 = \frac{1}{6}(Bm - Cl), \quad (\Delta, \alpha)^2 = \frac{1}{6} B \alpha,$$

$$(\Delta, \alpha) = \frac{1}{2} k \left(n - \frac{1}{2} Bl\right) - \frac{1}{4} m \Delta.$$

$$(\Delta, \beta)^4 = o, \quad (\Delta, \beta)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} Bn - Cm\right),$$

$$(\Delta, \beta)^2 = \frac{1}{6} B \beta, \quad (\Delta, \beta) = \frac{1}{6} Ckl - \frac{1}{4} n \Delta.$$

$$(\Delta, \gamma)^4 = 0, \quad (\Delta, \gamma)^3 = \frac{1}{36} BCl + \frac{1}{24} B^2 m + \frac{1}{6} Cn,$$

$$(\Delta, \gamma)^2 = \frac{1}{6} B \gamma, \quad (\Delta, \gamma) = \frac{1}{6} Ckm - \frac{1}{4} \Delta \left(\frac{1}{2} Bm + \frac{1}{3} Cl\right),$$

$$(\Delta, \partial)^4 = -\frac{1}{2} \nu, \quad (\Delta, \partial)^3 = \frac{1}{4}(lm - A_{ll} k),$$

$$(\Delta, \delta)^2 = -\frac{1}{6} B \delta + \frac{1}{9} A \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) + \frac{1}{6} l \alpha \,,$$

$$(\Delta, \delta) = \frac{1}{2} f \left(n - \frac{1}{6} B l\right) - \frac{1}{4} k l^2 - \frac{1}{3} \Delta\left(2\Delta + \frac{1}{3} A k\right),$$

$$(\Delta, \varepsilon)^4 = -\frac{1}{30} \mu \,,$$

$$(\Delta, \varepsilon)^3 = \left(\frac{7}{45} B^2 + \frac{23}{120} A C\right) k - \frac{1}{30} B l^2 - \frac{23}{120} m^2 - \frac{29}{240} l n + \frac{1}{60} A_{ll} \Delta \,,$$

$$(\Delta, \varepsilon)^2 = -\frac{1}{18} B (\varepsilon - \zeta) - \frac{1}{18} k \nu + \frac{1}{9} m \alpha - \frac{37}{180} l \beta \,,$$

$$(\Delta, \varepsilon) = \frac{1}{2} p \left(n - \frac{1}{6} B l\right) - \frac{1}{12} k l m - \frac{1}{9} \Delta (A \Delta + B k) \,,$$

$$(\Delta, \zeta)^4 = \frac{2}{9} B\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) - \frac{1}{3} l \beta \,, \qquad (\Delta, \zeta)^3 = \frac{1}{4} (l n - A_{lm} k) \,,$$

$$(\Delta, \zeta)^2 = -\frac{1}{6} B \zeta + \frac{1}{9} B \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) + \frac{1}{6} (k \nu - m \alpha + l \beta) \,,$$

$$(\Delta, \zeta) = \frac{1}{6} f \left(\frac{1}{2} B m + C l\right) - \frac{1}{4} k l m - \frac{1}{3} \Delta \left(\frac{1}{3} A \Delta + \frac{1}{3} B k + \frac{1}{2} l^2\right),$$

$$(\Delta, \varkappa)^4 = -\frac{17}{40} \beta \,. \quad (\Delta, \varkappa)^3 = \frac{5}{8} k m + \frac{3}{5} l \Delta - \frac{3}{4} B p \,,$$

$$(\Delta, \varkappa)^2 = -\frac{1}{24} (5 k \alpha + B \varkappa) \,, \quad (\Delta, \varkappa) = \frac{1}{6} B f k - \frac{1}{4} k^2 l - \frac{1}{8} p \Delta \,,$$

$$(\Delta, \vartheta)^4 = -\frac{5}{24} B \alpha + \frac{1}{30} A \beta, \;\; (\Delta, \vartheta)^3 = \frac{1}{2} (\delta, l) - \frac{1}{6} (k, h)^4 l + \frac{3}{8} \left((h, l)^2, \Delta\right)^2 = \ldots,$$

$$(\Delta, \vartheta)^2 = \left((h, \Delta)^2, l\right) + \frac{1}{4} (h, k)^3 l - \frac{1}{4} \left((h, l)^2, \Delta\right) = \ldots,$$

$$(\Delta, \vartheta) = \frac{1}{2} (l, \Delta)^2 h - \frac{1}{2} (h, \Delta)^2 l - \frac{3}{8} (h, l)^2 \Delta = \ldots,$$

$$(\Delta, \chi)^4 = \frac{1}{18} A \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) - \frac{1}{12} l \alpha - \frac{1}{15} B \delta \,,$$

$$(\Delta, \chi)^3 = \left((k, \Delta)^3, h\right) + \frac{1}{4} (k, \Delta)^4 h - \frac{21}{10} \left((h, k)^2, \Delta\right)^2 + \frac{7}{4} \left((h, k)^3, \Delta\right) - \frac{5}{8} (h, k)^4 \Delta,$$

$$(\Delta, \chi)^2 = \frac{1}{6} B \chi - \frac{7}{80} l \left(\vartheta + \frac{1}{3} A \varkappa\right) + \frac{7}{120} f \beta + \frac{1}{6} k \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) + \frac{7}{4} \Delta \delta \,,$$

$$(\Delta, \chi) = -\frac{1}{30} f l \Delta - \frac{1}{12} k^2 \Delta - \frac{1}{4} k\left(\frac{1}{9} A k^2 - l p\right),$$

$$(\Delta, t)^4 = -\frac{1}{18} \varkappa \left(\frac{1}{30} A^2 + \frac{5}{11} B\right) - \frac{1}{170} A \vartheta + \frac{1}{4} l \delta + \frac{5}{36.11} k \alpha \,,$$

$$(\Delta, t)^3 = \frac{1}{2} (\alpha, k) - \frac{1}{2} h m + \frac{1}{16} B f k + \frac{27}{44} (\varkappa, \Delta) - \frac{5}{32} p \Delta + \frac{7}{24} (f, h)^4 \Delta = \ldots,$$

$$(\Delta, t)^2 = -\frac{1}{6} B t + \frac{1}{4} f \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) - \frac{1}{6} k \vartheta - \frac{1}{3} l \chi - \frac{1}{6} h \alpha - \frac{9}{44} \Delta \varkappa \,,$$

$$(\Delta, t) = \frac{1}{8} f k \Delta + \frac{1}{4} f \left(\frac{1}{9} A k^2 - l p\right) - \frac{1}{4} h\left(k l - \frac{1}{3} B f\right).$$

§ IV.

Sizigie.

Ad ottenere delle relazioni (sizigie) fra le forme del sistema completo della sestica f, servono assai utilmente le seguenti relazioni:

$$\varphi(\psi, \omega) + \psi(\omega, \varphi) + \omega(\varphi, \psi) = 0\,,$$

ove φ, ψ, ω son tre forme qualunque;

$$\begin{vmatrix} (\varphi, \varphi)^2 & (\varphi, \psi)^2 & (\psi, \omega)^2 & \varphi \\ (\psi, \varphi)^2 & (\psi, \varphi)^2 & (\psi, \omega)^2 & \psi \\ (\omega, \varphi)^2 & (\omega, \psi)^2 & (\omega, \omega)^2 & \omega \\ \varphi & \psi & \omega & 0 \end{vmatrix} = 0\,;$$

la relazione, alquanto più generale di questa, fra due terne di forme e le seconde spinte delle forme dell'una terna su quelle dell'altra;

la relazione, che dà il determinante funzionale di una forma e del determinante funzionale di altre due, espresso mediante le tre forme e le loro mutue seconde spinte, cioè

$$-(\varphi, (\psi, \omega)) = \frac{m-n}{2(m+n-2)}\varphi(\psi, \omega)^2 + \frac{1}{2}\psi(\varphi, \omega)^2 - \frac{1}{2}\omega(\varphi, \psi)^2\,;$$

la relazione che dà il quadrato del determinante funzionale di due forme espresso mediante le due forme e le loro seconde spinte, cioè

$$-2\,.\,\overline{(\varphi, \psi)}^2 = (\varphi, \varphi)^2\psi^2 - 2(\varphi, \psi)^2\varphi\psi + (\psi, \psi)^2\varphi^2\,;$$

la relazione, alquanto più generale, che dà il prodotto dei determinanti funzionali di due paia di forme espresso mediante le forme delle due paia e le loro mutue seconde spinte.

Data una forma φ e una sizigie $\psi = 0$, si ha l'identità $(\varphi, \psi) = 0$, e però anche le $\overline{(\varphi, \psi)}^2 = 0$, $((\varphi, \psi), \omega) = 0$; le quali identità forniscono nuove sizigie.

Ecco alcune delle sizigie che nel modo indicato possono ottenersi:

$$f\chi + kt + h\eta = 0\,,$$

$$\frac{1}{2}f\left(\theta + \frac{1}{3}A\eta\right) - k\chi - p\eta = 0\,,$$

$$f\alpha - k\delta + l\eta = 0\,,$$

$$f\beta - k\zeta + m\eta = 0\,,$$

$$f\gamma - \frac{1}{6}k(4B\delta - 2A\varepsilon - A\zeta - 5l\alpha) + n\eta = 0\,,$$

$$f\left(\varepsilon + \frac{1}{2}\zeta\right) - \frac{1}{2}k\left(\theta + \frac{1}{3}A\eta\right) - \Delta\eta = 0\,.$$

$$\frac{1}{2}f^2\Delta - fkp + \frac{1}{2}k^2h + \eta^2 = 0\,,$$

$$m\alpha - l\beta + \nu k = 0\,,$$

$$k\mu + l\gamma - n\alpha = 0\,,$$

$$lt + f\theta + h\delta = 0\,,$$

$$.\,\frac{1}{2}Bf^2 - fkl - 3p^2 + 3h\Delta + \frac{1}{2}k^3 = 0\,,$$

$$.\,-2Bfk - Af\Delta + \frac{1}{2}fl^2 + 2Akp + 6p\Delta - 3hm + 2k^2l = 0\,,$$

$$.\,-\frac{1}{3}ABfk - Bf\Delta + 2flm + 2Bkp + Ap\Delta - \frac{9}{2}l^2p$$
$$+ 3h(Bl - n) - k^2m = 0\,.$$

$$.\,fm - 2lp + Bh + \frac{1}{3}Ak^2 - k\Delta = 0\,,$$

$$.\,fn + Ch + \frac{3}{4}kl^2 - \frac{1}{2}Ak\Delta - 2\Delta^2 = 0\,,$$

$$.\,Cfl + \frac{1}{2}Bfm + 3pn - \frac{3}{2}klm + Ck^2 - 2Bk\Delta - A\Delta^2 - \frac{3}{2}l^2\Delta = 0,$$

$$.\,Cf + Bp - \frac{1}{2}km - 2l\Delta = 0\,,$$

$$.\,\frac{1}{3}B^2f + 2Cp - Bkl + kn - 2m\Delta = 0\,,$$

$$.\,\frac{2}{3}BCf - \frac{1}{2}Df - \frac{2}{3}ACp - \frac{2}{3}Ckl + \Delta\left(\frac{1}{2}Am - Bl + n\right) + \frac{3}{4}l^2m = 0,$$

$$.\left(\frac{4}{9}B^2 + AC\right)Bf + Dp + \frac{2}{9}ACkl + \frac{2}{3}Ckm + \frac{2}{3}Cl\Delta - B\Delta m$$
$$- \frac{1}{3}A\Delta n - \frac{1}{2}ln^2 - lm^2 = 0\,,$$

$$.\,\frac{2}{3}(AC + B^2)k + \frac{1}{3}(AB + 6C)\Delta + \frac{1}{2}Bl^2 - 2ln - m^2 = 0\,,$$

$$.\,Dk + \frac{2}{3}(AC + B^2)\Delta - \frac{1}{3}Cl^2 - 2mn = 0\,,$$

$$.\,\frac{1}{3}(AB + 6C)\left(\frac{1}{3}Ck - \frac{1}{2}B\Delta\right) + D\Delta - \frac{1}{4}B^2l^2 - \frac{2}{3}Clm + Bln - n^2 = 0.$$

$$.\,-Bfn + 4Apn - 3Dh + 4kln - \frac{2}{3}ABk\Delta - 4Ck\Delta$$
$$+ (6B - A^2)\Delta^2 + \frac{1}{2}A\Delta l^2 + 4\Delta lm + \frac{3}{4}l^4 = 0\,,$$

Torino, marzo 1892.

Studi sull'allenamento,

ricerche sperimentali di GREGORIO MANCA

Le prime ricerche scientifiche sull'allenamento furono fatte da G. TH. FECHNER (1). Egli sperimentava sopra se stesso, e l'esercizio giornaliero consisteva nel sollevare, al di sopra della testa, due manubri, uno per ciascuna mano, di cui ognuno pesava circa 9 libbre e $^1/_4$ (gr. 3244). Il sollevamento durava un minuto secondo e altrettanto l'abbassamento. L'esercizio era prolungato fino al momento in cui riusciva impossibile continuarlo col solito ritmo. Naturalmente per tutto il tempo di queste esperienze il FECHNER cercò di lavorare sempre alla stessa ora e di conservare lo stesso metodo di vita. Il risultato più importante osservato da FECHNER fu, come era da prevedersi, che si ha un aumento progressivo della quantità di lavoro giornaliero. Limitandomi a citare alcune medie, risulta che FECHNER nella 1ª settimana d'esercizio sollevò i manubri 57 volte al giorno; nella 2ª, 58 volte; nella 3ª, 70 volte; nella 4ª, 83; nella 5ª, 100; nella 6ª, 129; nella 7ª, 197; nella 8ª settimana 275 volte (2).

La parte nuova ed importante di queste esperienze non era

(1) G. TH. FECHNER, « Ueber den Gang der Muskelübung » (*Ber. d. K. S. Ges. d. Wissensch. zu Leipzig*, math. phys. Cl. 1857, Bd. IX, H. III, S. 113). Recentemente scrissero intorno all'allenamento, però da un punto di vista alquanto diverso dal mio, CH. HENRY, « Recherches expérimentales sur l'entraînement musculaire » (ne' *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXII, 1891, pag. 1473-1476), e WARREN P. LOMBARD « Some of the influences which affect the power of voluntary muscular contractions » (nel *Journal of Physiology*, vol. XIII, 1892, n. 1-2, pag. 14-19, capit. « The effect of Exercise »).

(2) Ammesso che, come dirò più avanti, i numeri indicanti le elevazioni de'manubri costituiscano una serie di carattere dinamico e crescano secondo una « progressione geometrica irregolare », avrei dovuto, per maggior precisione, servirmi esclusivamente delle medie geometriche (contr. A. MESSADAGLIA: « Il calcolo de' valori medii e le sue applicazioni statistiche, nell'*Archivio di Statistica*, anno V°, 1883, fasc. II° e IV°, pag. 26 e seg. dell'estratto; e W. STANLEY JEVONS: *The principles of Science;* London, Macmillan, 1887, pag. 362); invece mi sono contentato di cercare le medie aritmetiche, che offrono il vantaggio di non richiedere lunghi calcoli e di dare una precisione più che sufficiente per questa ricerca preliminare delle leggi dell'allenamento.

tanto lo stabilire l'aumento continuo della forza muscolare sotto l'influenza dell'esercizio, quanto di conoscere il decorso caratteristico di quest'aumento e di tracciare la curva dell'allenamento. A questo proposito FECHNER trovò che la curva in questione sale continuamente, ma non in modo uniforme, e che l'ascensione è più rapida alla fine delle esperienze che al principio. Siccome tanto nella tabella numerica quanto nella tavola grafica pubblicata da FECHNER non è molto evidente questo maggior aumento finale ed appare solo dopo un esame diligente delle cifre e della curva, io ho voluto studiare meglio il fatto cercando i modi di metterlo in maggiore evidenza e le leggi che lo governano. Ho perciò calcolato le variazioni delle cifre indicanti le quantità di sollevamenti, da un giorno all'altro. Dico *variazioni* e non *aumenti* perchè, sebbene il decorso tipico delle curve dell'allenamento sia complessivamente ascendente, si può — da un giorno all'altro — avere anche una diminuzione oppure una stabilità nel numero de' sollevamenti. Per brevità di linguaggio, sotto il nome di *variazioni*, comprendo tutti e tre questi casi possibili. Facendo le medie di queste variazioni per le singole quindicine di esercizio, ho calcolato la *variazione media giornaliera* in quella data quindicina, variazione che è sempre rappresentata da un numero positivo, cioè da un aumento continuo, per la sopravvalenza degli aumenti sulle diminuzioni. Nelle esperienze di FECHNER la *variazione* o *aumento medio giornaliero* nella 1ª quindicina fu di 0,57 sollevamenti; nella 2ª. di 3,06; nella 3ª, di 4,06; nella 4ª quindicina di 23. È evidentissimo il progressivo crescere di questo *aumento medio giornaliero.*

Io feci un gran numero di esperienze sopra una quindicina di persone; per ora esaminerò solo i risultati di 2 serie di esperienze. Nella prima serie, gli esercizî li feci io stesso per la durata di 70 giorni; nella 2ª serie si prestò cortesemente l'amico Dr. R. Cao, che fece gli esercizi per 35 giorni. I manubri da noi usati pesavano 5 kgr. ciascuno. Le condizioni di esperienza erano identiche per ambedue: i manubri, l'ora di lavoro, il ritmo erano i medesimi. Inoltre il nostro stato individuale era poco differente, avevamo la stessa età, avevamo abitudini quasi eguali, il vitto era eguale; per quanto riguarda la costituzione fisica, il Dr. R. Cao era un po' più robusto di me. Con condizioni così poco diverse non è da meravigliarsi se i nostri risultati siano stati quasi identici, e se, partiti da cifre vicine, dopo

35 giorni d'esercizio abbiamo raggiunto delle cifre che differiscono tra loro solo di 7, mentre la differenza iniziale era di 10.

I dati delle mie esperienze sono ordinati nelle tabelle numeriche 1ª e 2ª, e rappresentati graficamente nelle tavole Iª e IIª. L'aumento progressivo delle quantità di lavoro giornaliero risulta evidentissimo dalle cifre della tabella 1ª e dal rapido, benchè disordinato, ascendere delle curve della tavola Iª, nella quale la curva punteggiata è descritta secondo i dati del Dr. R. Cao, la curva a linea continua secondo i miei. Per citare alcune cifre, basti dire che nel 1° giorno d'esercizio io sollevai i manubri 25 volte, il Dr. R. Cao 35 volte; nel 15°, io 43 volte, il Dr. R. Cao 37; nel 30°, io 52, il Dr. R. Cao 45; nel 35° giorno, io 53; il Dr. R. Cao 60 volte. Continuando l'allenamento, io nel 55° giorno d'esercizio avevo raggiunto la cifra di 96, nel 70° quella di 126, che rappresenta un po' più del quintuplo della cifra iniziale. Su questi dati ho calcolato le medie settimanali, dalle quali risulta che nella 1ª settimana di esercizio il Dr. R. Cao sollevò i manubri 32,4 volte al giorno; nella 2ª, 32,7; nella 3ª, 43; nella 4ª, 44; nella 5ª settimana 51. Io invece, nella 1ª settimana ebbi 28, nella 2ª settimana, 42; nella 3ª, 46,6; nella 4ª, 46,8; nella 5ª, 54; nella 6ª, 63; nella 7ª, 59; nell'8ª, 59; nella 9ª, 95.

Anche in queste esperienze l'*aumento medio giornaliero* cresce progressivamente; facendone le medie quindicinali si hanno i dati della tabella 2ª, sui quali è costruita la tavola grafica IIª. Per il Dr. R. Cao quest' aumento nella 1ª quindicina fu di 0,23 elevazioni; nella 2ª, di 1,23. Per me nella 1ª quindicina l'*aumento medio giornaliero* fu d 1,28; nella 2ª, di 2.62; nella 3ª, di 3; nella 4ª, di 3,53; nella 5ª quindicina di 5.

I numerosi dati da me raccolti, offrono oramai materiale sufficiente per poter determinare con precisione le leggi dell'allenamento; spero di poter tra breve sottoporre le cifre ottenute ad una rigorosa analisi matematica. Contentandomi per ora di esprimere con una legge grossolana i risultati avuti da FECHNER e da me, dirò che la forza muscolare durante un prolungato esercizio ginnastico cresce secondo una « progressione geometrica irregolare ». L'espressione « progressione geometrica irregolare » è frequentemente usata in statistica (1), in cui per es. si dice

(1) Vedi MESSADAGLIA A., op. cit., pag. 28, e GABAGLIO A., *Teoria generale della statistica*, Milano, Hoepli, 1888, vol. II°, pag. 179 e seg. in cui parla delle « serie a carattere dinamico ».

che la popolazione cresce in tal modo. Che anche la forza muscolare nell'allenamento progredisca con questa legge è facile persuadersi, ricordando quanto ho detto per l'*aumento medio giornaliero* e guardando la tavola che rappresenta graficamente le medie quindicinali di quest'aumento: se si trattasse di « progressione aritmetica », regolare o irregolare, gli *aumenti medi giornalieri* non dovrebbero mostrare alcuna tendenza a crescere, le loro medie quindicinali — per il compensarsi degli errori casuali — dovrebbero differire pochissimo l'una dall'altra, e la curva della tavola II^a dovrebbe essere orizzontale (1).

Prima di finire, voglio accennare rapidamente ad un altro fatto osservato in molte esperienze, che ora non pubblico, e nel corso degli esercizi che facevo io stesso. Come risulta dalla tabella 1^a e dalla grafica corrispondente ne' giorni 17°, 18°, 19° e 20°; 32°; 40°, 41° e 42°; 65° e 66° d'esperienza, non feci alcun esercizio. Esaminando i numeri rappresentanti le quantità di elevazioni de' manubri fatte ne' giorni che seguirono immediatamente i periodi di riposo, si vede subito che o non si ha alcun aumento sulle cifre precedenti, o invece si ha una notevole diminuzione. Il primo caso è rappresentato, nella tavola grafica I^a, dal decorso orizzontale della curva, formata da rette interrotte da punti, che corrisponde a' giorni di riposo; il secondo dal decorso discendente della stessa curva. Tanto nell'uno che nell'altro caso si ha, dopo una semplice interruzione della ginnastica per 2-3 giorni, una evidente stabilità, o più sovente una diminuzione di quelle condizioni (di forza muscolare, di resistenza alla fatica, ecc.) che prima rendevano attuabile una data quantità di lavoro Nella curva della tavola 1^a, sono numerosi i tratti orizzontali ed i discendenti anche in corrispondenza di periodi di nessun riposo, e perciò si potrebbe fare l'obbiezione che anche quei tratti da me citati come indicanti l'influenza del riposo, si possano invece ritenere delle variazioni casuali al pari degli altri appartenenti a periodi di lavoro: quanto io ho affermato si basa però su calcoli e costruzioni grafiche che ora non riporto, ma che dimostrano la mia asserzione.

---

(1) Ciò che affermo sul decorso e sulle leggi dell'allenamento vale naturalmente solo per le condizioni e la durata delle mie esperienze; ho fatto delle ricerche anche sui limiti dell'allenamento e sull'allenamento intensivo e conto di pubblicare tra breve una nota in proposito.

TABELLA 1ª

GIORNI di esercizio	NUMERI delle elevazioni dei manubri		GIORNI di esercizio	NUMERI delle elevazioni dei manubri		GIORNI di esercizio	NUMERI delle elevazioni dei manubri. G. MANCA
	Manca G.	Cao R.		Manca G.	Cao R.		
a	*b*	*c*	*a'*	*b'*	*c'*	*a''*	*b''*
1	25	35	25	53	37	49	75
2	25	32	26	47	51	50	70
3	24	33	27	45	44	51	80
4	27	30	28	52	50	52	85
5	27	34	29	52	40	53	84
6	31	36	30	52	45	54	78
7	43	27	31	58	52	55	96
8	37	36	32		49	56	90
9	52	30	33	49	56	57	100
10	42	31	34	61	59	58	89
11	41	31	35	53	60	59	102
12	39	31	36	68	—	60	111
13	47	35	37	70		61	115
14	37	35	38	61		62	118
15	43	37	39	55		63	126
16	51	35	40			64	128
17		38	41			65	
18		39	42			66	
19		52	43	55		67	117
20		52	44	53		68	113
21	46	49	45	58		69	123
22	47	50	46	57		70	126
23	39	37	47	67		—	—
24	45	44	48	72			

Nelle colonne a, a' ed a'' sono notati progressivamente i giorni di esperienza tenendo calcolo anche di quegli in cui non si fece alcun esercizio. Per le esperienze su G. Manca, il giorno 1° corrisponde al 5 aprile del 1890; per il Dr. R. Cao al 7 Giugno dello stesso anno. Questi dati sono rappresentati graficamente nella Tavola I^a^, secondo la linea delle ascisse.

Nelle colonne b, b' e b'' sono indicati i numeri delle elevazioni de' manubri (contando come unità d'esercizio l'innalzamento ed il successivo abbassamento de' manubri) fatte da G. Manca ne' giorni corrispondenti. I dati sono rappresentati nella grafica I^a^ dalla linea continua, che viene interrotta da alcuni punti ne' periodi di riposo. Le colonne c e c' contengono i numeri di elevazioni fatte dal Dr. R. Cao, che sono rappresentati nella tavola I^a^ da una linea punteggiata.

TABELLA 2^a^

Quindicine	AUMENTO MEDIO giornaliero	
	G. Manca	R. Cao
1^a^	2^a^	3^a^
1^a^	1, 28	0, 23
2^a^	2, 62	1, 23
3^a^	3	——
4^a^	3, 53	
5^a^	5	

Nella 1^a^ colonna sono indicate progressivamente le quindicine.

Nella 2^a^ e 3^a^ colonna sono notati gli *aumenti medi giornalieri* delle varie quindicine, calcolati facendo prima la somma algebrica delle variazioni giornaliere delle diverse quindicine, e dividendo poi questa somma pel numero de' giorni presi in considerazione.

Questi dati sono rappresentati dalla tavola grafica II^a, nella quale le quindicine sono nella linea delle ascisse, gli *aumenti medi giornalieri* delle varie quindicine nella linea delle ordinate, la curva continua è tracciata coi dati di G. Manca, quella a rette interrotte da punti coi dati del Dr. R. Cao.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE GRAFICHE

TAVOLA I^a. — È costruita secondo i dati della tabella 1^a. I giorni sono indicati nella linea delle ascisse, le elevazioni dei manubri in quella delle ordinate, in numeri assoluti.

La curva a linee continue corrisponde a' dati di G. Manca. I tratti in cui le rette sono interrotte da punti neri appartengono a' periodi in cui si fece riposo.

La curva punteggiata è tracciata secondo i dati del Dr. R. Cao.

TAVOLA II^a. — Corrisponde alla tabella 2^a. Le quindicine sono nella linea delle ascisse, gli *aumenti medi giornalieri* in quella delle ordinate. La curva continua appartiene a G. Manca, quella punteggiata al Dr. R. Cao.

Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Torino.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

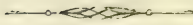



Tavola grafica II
1
2
3
4
5
0
1
2
3
4
5
Tavola grafica I
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
1
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. **10ª, 1891-92**

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 27 Marzo 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: SALVADORI, COSSA, BRUNO, BERRUTI, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE, PEANO e BASSO Segretario.

Il Socio Segretario, dopo aver letto il processo verbale dell'adunanza precedente che viene approvato, presenta in dono all'Accademia, a nome dell'Autore, il primo numero delle nuove Pubblicazioni del R. Osservatorio astronomico di Torino sull' « *Azimut assoluto del segnale trigonometrico di Monte Vesco sull'orizzonte di Torino determinato negli anni* 1890 *e* 1891 », del Prof. Francesco PORRO, incaricato della Direzione dello stesso Osservatorio.

Il Socio CAMERANO legge un suo lavoro nel quale vengono esposte le ricerche da lui eseguite *Intorno al parassitismo ed allo sviluppo del Gordius pustulosus* BAIRD.

Il Socio PEANO legge una sua Nota sulla *Generalizzazione della formula di Simpson.*

Il Socio NACCARI presenta e legge uno Studio sperimentale *Sulla trasformazione dell'energia in alcune pile elettriche* del Dott. Adolfo CAMPETTI, Assistente al Laboratorio di Fisica della R. Università di Torino.

I tre lavori ora accennati saranno pubblicati negli *Atti.*

LETTURE

Ricerche intorno al parassitismo ed allo sviluppo del Gordius pustulosus Baird;

Del Socio Prof. LORENZO CAMERANO

Il *Gordius pustulosus*, descritto per la prima volta dal Baird nel 1853 (1) sopra un esemplare femmina trovato parassita nella cavità addominale di un *Blaps obtusa*, è specie oggi ancora rarissima nelle collezioni ed è incompletamente nota. Un secondo esemplare di questa specie venne trovato solo nel 1884 dal Villot (2), pure parassita, nella cavità addominale di un *Blaps mortisaga* a Grenoble. Anche questo esemplare è una femmina. Un terzo esemplare io lo ebbi nel giugno 1889, raccolto in un pozzo del palazzo della R. Accademia Albertina di Torino. Un quarto esemplare, finalmente, venne raccolto dal dottor Cesare Lepori nell'acqua a Serramannu nella provincia di Cagliari. Questi due ultimi esemplari erano pure femmine (3).

Il fatto dell'essersi trovato un esemplare della specie in discorso in un pozzo del palazzo della R. Accademia Albertina in mezzo alla città di Torino e il fatto dell'essersi trovati esemplari parassiti nei *Blaps* mi indussero ad esaminare i *Blaps* che vivono nei sotterranei e nelle cantine della città di Torino.

La specie più comune, e della quale si possono raccogliere in poco tempo molte centinaia di individui, è il *Blaps mucronata* Latrel.

Feci raccogliere perciò molte centinaia di *Blaps mucronata* nei sotterranei e nei cortili degli edifizi di varie località di Torino, vale a dire: della casa del conte M. G. Peracca in via Madama Cristina, dell'edifizio degli Istituti Biologici in via di

(1) Baird, *Catalogue of the Entozoa in the British Museum*, p. 37. — Proc. Zool Soc. di Londra, 1853, pag. 20, tav. XXX, fig. 4. — Ann. and Mag. nat. hist., 2a ser., vol. XV, pag. 72.

(2) Villot, *Revision des Gordiens*. Ann. sc. nat. zool. 1886, pag. 303, tav. XIII e XIV, fig. 8-12.

(3) Camerano, *Nuove osservazioni intorno ai Gordii*, I. — Bollettino dei Musei di Zoologia e di Anatomia Comparata di Torino, 66, vol. IV, 1889, e III, *Gordii di Sardegna*, ibidem, 83, vol. V, 1890.

Po, dell'edifizio della R. Scuola veterinaria in via Nizza, di una casa in piazza Bodoni, di una casa in piazza Vittorio Emanuele II e del palazzo Carignano sede dei Musei di Zoologia e di Anatomia Comparata.

I *Blaps* provenienti dalle cantine della casa di piazza Bodoni e di quella della piazza Vittorio Emanuele non presentarono alcun Gordio; invece gli esemplari provenienti da tutte le altre località presentarono numerosi esemplari di *Gordius pustulosus* allo stato parassitico ed in varii stadii di sviluppo.

Le mie osservazioni vennero ripetute durante gli anni 1890-91 e 92 e mi diedero a un dipresso sempre gli stessi risultati, tanto che credo sia lecito conchiudere che per le località sopradette il parassitismo del *Gordius pustulosus* nel *Blaps mucronata* è un fatto normale.

Nelle cantine e nei sotterranei dove sogliono vivere i *Blaps mucronata* vivono pure, come è noto, altri artropodi; così ad esempio nei sotterranei del palazzo dei Musei non sono rari gli *Sphodrus leucophtalmus*, l'*Harpalus aeneus* e varie specie di piccole *Amara*; non sono rari neppure varie sorta di ragni e gli *Oniscus murarius*.

Ho esaminato diligentemente anche questi artropodi raccolti come i *Blaps* a più riprese, ed ho trovato il *Gordius pustulosus* parassita nello *Sphodrus leucophtalmus* (29 marzo 1891) e nell'*Harpalus aeneus* (12 aprile 1891). Il Gordio parassita di quest'ultimo era di piccole dimensioni e possedeva ancora i resti dell'armatura della tromba dello stadio larvale.

Credo utile di riunire in una tavola i risultati delle osservazioni fatte sui *Blaps* dei sotterranei del palazzo dei Musei di Zoologia e di Anatomia Comparata.

Nelle tavole seguenti chiamo giovanissimi gli individui di Gordii (stadio filiforme) che misurano non più di m. 0,10, a m. 0,12; chiamo giovani quelli che misurano da m. 0,13 a m. 0,17 circa.

Non ho d'uopo di far osservare che si tratta qui di una distinzione i cui termini non sono da considerarsi che relativi e destinati a dare soltanto una idea complessiva ed approssimativa dei vari stadii di sviluppo dei Gordii che si trovano allo stato parassitico in una data stagione nei *Blaps*. È noto infatti che in alcune specie di Gordii può osservarsi il fatto di esemplari di piccola mole completamente maturi. Ho avuto cura perciò, nel caso nostro, di tener conto anche dello stato di svi-

luppo degli strati cuticolari esterni i quali forniscono nella maggior parte dei casi un criterio migliore per determinare approssimativamente l'età di un Gordio allo stato filiforme.

Esemplari di Blaps mucronata *raccolti il* 27 *marzo* 1891 *nei sotterranei del Palazzo Carignano, sede dei Musei, contenenti individui di* Gordius pustulosus.

Blaps mucronata Nº degli esemplari	NUMERO DEI GORDII contenuti in ciascun esemplare di *Blaps*				OSSERVAZIONI
	Gordii adulti ma ancora bianchicci	Gordii adulti del colore normale	Gordii giovani	Gordii giovanissimi	
1	—	—	1 ♀	—	
2	—	—	3 ♀	—	
3	—	—	—	3	
4	—	—	2 ♀	—	
5	1 ♂	—	—	—	
6	1 ♀	—	—	—	
7	1 ♂ e 1 ♀	—	—	—	
8	1 ♀	—	3 ♀ e 1 ♂	4	
9	2 ♀	—	—	—	
10	1 ♂	—	5 ♀	2	Il *Blaps* venne trovato morto e i Gordii erano in parte già ammuffiti.
11	1 ♂	—	—	—	
12	1 ♂	—	—	—	
13	1 ♂ e 1 ♀	—	—	—	
14	1 ♂ e 1 ♀	—	—	—	
15	—	—	1 ♀	—	
16	2 ♂ e 2 ♀	—	—	—	
17	—	—	4 ♀ e 1 ♂	—	
18	1 ♂	—	—	—	Questo esemplare di Gordio e il seguente, messi nell'acqua, dopo pochi giorni morirono.
19	1 ♀	—	—	—	
20	—	—	6 ♂ e 3 ♀	1	
21	—	—	4 ♀	—	
22	1 ♀				

Il numero totale degli individui di *Blaps mucronata* era di 118. Di questi, 22 presentarono esemplari di *Gordius pustulosus*.

Esemplari di Blaps mucronata *raccolti il 3 giugno* 1891 *nei sotterranei del Palazzo Carignano, sede dei Musei, contenenti individui di* Gordius pustulosus.

Blaps mucronata N° degli esemplari	NUMERO DEI GORDII contenuti in ciascun esemplare di *Blaps*				OSSERVAZIONI E DATE alle quali vennero successivamente esaminati gli esemplari di *Blaps* raccolti il 3 giugno 1891 e tenuti vivi in laboratorio fino al 20 luglio 1891.
	Gordii adulti ma ancora bianchicci	Gordii adulti del colore normale	Gordii giovani	Gordii giovanissimi	
1	—	1 ♀	—	—	(3 Giugno) Appena aperto l'animale il Gordio esce da sè: lo colloco nella terra umida.
2	1 ♀ e 2 ♂	—	—	—	(6 Giugno). Messi nell'acqua si muovono lentamente.
3	1 ♀	—	—	—	(Idem). Questo esemplare di Gordio messo nell'acqua non dà segno di vita.
4	—	2 ♀	—	—	(Idem) I due Gordii erano morti.
5	—	1 ♂	—	—	(Idem) Il Blaps era morto e così pure il Gordio.
6	1 ♀	—	—	—	(Idem). Il Gordio messo nell'acqua non dà segni di vita.
7	—	1 ♂	—	—	(12 Giugno) Avendo osservato il Blaps starsene quasi immobile coll'estremità dell'addome molto sporgente lo collocai nella terra umida: dopo poco tempo ne uscì il Gordio che collocai nella terra umida.
8	—	1 ♂	—	—	(12 Giugno). Come il precedente; il Gordio mise fuori il capo: ma non riuscì ad uscire: dopo 4 ore lo estrassi e lo collocai col precedente nella terra umida.
9	2 ♀	—	—	1	(12 Giugno). Il Blaps era morto: l'esemplare di Gordio giovanissimo presentava i resti dell'armatura della tromba larvale.
10	1 ♀	2 ♂	—	—	(17 Giugno). Colloco i Gordii nella terra umida coi precedenti.
11	1 ♀	—	—	—	(Idem). Il Gordio non dà segni di vita.
12	—	1 ♀	—	—	(19 Giugno). Colloco il Gordio nell'acqua: esso è vivacissimo.
13	—	—	3 ♀	2	(Idem).
14	—	2 ♂	—	—	(27 Giugno). Colloco i Gordii nell'acqua: essi sono vivacissimi.
15	—	1 ♂	—	—	(28 Giugno). Idem
16	—	1 ♂	—	—	(Idem). Idem
17	—	1 ♂ e 1 ♀	—	—	(11 Luglio). Idem

Il numero totale degli individui di *Blaps mucronata* era di 124. Di questi, 17 presentarono esemplari di *Gordius pustulosus*. È d'uopo aggiungere ancora al numero dei Gordii segnato in questa tavola un individuo ♂ adulto che il 27 giugno trovai deposto all'asciutto nel vaso dove tenevo i *Blaps*.

Al 21 settembre 1891 gli individui di *Blaps mucronata* nei sotterranei del Palazzo Carignano erano poco numerosi e non ne potei raccogliere che una ventina. Di questi, un solo esemplare presentò 2 Gordii 1 ♂ e 1 ♀ adulti: ma ancora bianchicci.

Esemplari di Blaps mucronata *raccolti il 25 febbraio 1892 nei sotterranei del Palazzo Carignano, sede dei Musei, contenenti individui di* Gordius pustulosus.

Nº degli esemplari *Blaps mucronata*	NUMERO DEI GORDII contenuti in ciascun esemplare di *Blaps*				OSSERVAZIONI
	Gordii adulti ma ancora bianchicci	Gordii adulti del colore normale	Gordii giovani	Gordii giovanissimi	
1	—	—	1 ♀	—	Il Blaps venne trovato morto unitamente ad altri dieci i quali non contenevano Gordii.
2	—	—	—	3	
3	1 ♂ e 1 ♀	—	—	—	
4	—	—	—	2	
5	—	—	2 ♀	1	
6	1 ♀	—	—	—	Il Blaps muoveva le zampe con molto stento.
7	—	—	—	3	
8	—	—	—	2	
9	—	—	3 ♀	—	
10	—	—	—	1	Il Blaps venne esaminato il giorno 4 marzo ed era morto nel laboratorio.
11	1 ♀	—	—	—	
12	—	—	1 ♀ e 2 ♂	—	
13	—	—	1 ♀ e 1 ♂	—	
14	—	—	1 ♀	—	
15	—	—	1 ♂ e 2 ♀	—	
16	—	—	1 ♀	—	
17	1 ♀ e 1 ♂	—	1 ♀	—	
18	—	—	—	4	Uno dei Gordii ha appena la lunghezza di un centimetro circa.
19	—	—	2 ♀ e 1 ♂	—	

Il numero totale degli individui di *Blaps mucronata* era di 94. Di questi, 19 presentarono esemplari di *Gordius pustulosus*.

Come si scorge dalle tavole precedenti, si è verso il mese di giugno che i *Blaps* contengono i Gordii completamente sviluppati. Questo fatto io lo verificai anche nelle altre località di Torino sopracitate, nelle quali trovai il *Gordius pustulosus*.

Ora possiamo domandarci in che modo si sviluppa il *Gordius pustulosus* nelle condizioni speciali dei luoghi dove si trovano i *Blaps mucronata* e in che modo questi ultimi possono venire così abbondantemente infetti.

Anzitutto debbo osservare che il *Gordius pustulosus* ha gli apparati riproduttori foggiati sullo stesso stampo fondamentale dei Gordii più noti, come ad esempio: il *G. tolosanus*, il *G. Villoti*, ecc., ed inoltre che i due sessi sono separati. Mi era venuto il dubbio che si trattasse di una specie vivipara, ma nessun fatto è venuto a confermare questa ipotesi.

Gli individui adulti di *Gordius pustulosus*, estratti dai *Blaps*, e messi nell'acqua vivono benissimo e si comportano come gli individui delle altre specie. Ho provato ripetutamente a tenerne individui adulti nella terra umida, ed anche in questa essi vivono a lungo, il che del resto avviene anche, entro a certi limiti, per altre specie di Gordii. Non ho osservato l'accoppiamento nè negli individui tenuti nella terra umida, nè in quelli tenuti in acqua.

Ora, nei sotterranei del Palazzo Carignano, sede dei Musei, i Gordii per svilupparsi *non hanno a loro disposizione alcuna quantità di acqua.* Solo durante le piogge prolungate può gocciolare un po' d'acqua dalle finestre chiuse da inferriate che danno luce ai sotterranei stessi; ma come io ho verificato ripetutamente, durante due anni, l'acqua sopradetta serve soltanto ad inumidire il terriccio che sta sotto alle finestre. Si noti pure che si è precisamente in questo terriccio che sono più numerosi gli individui di *Blaps* attirati probabilmente dai detriti di varie sorta che cadono dalle inferriate sopradette. Nelle altre località di Torino nelle quali i *Blaps* mi presentarono Gordii, le condizioni di vita sono a un dipresso come quelle dei sotterranei del Palazzo Carignano.

Nel terriccio umido, seguendo le indicazioni del *Perris* (1), trovai alla profondità di 20 o 30 centimetri numerose larve di *Blaps mucronata*. Esaminatele diligentemente, anch'esse si presentarono infette da *Gordius pustulosus* a varii gradi di sviluppo, ma in complesso di piccole dimensioni: così, ad esempio, in una larva ne rinvenni un individuo della lunghezza di appena un centimetro. In nessuna tuttavia, sebbene io ne abbia esaminate oltre ad una settantina, trovai la prima forma larvale caratteristica dello sviluppo del *G. tolosanus*, o del *G. Villoti*.

Ciò premesso, mi pare si debba ammettere che nelle condizioni speciali dei sotterranei del palazzo Carignano e di altri edifizii di Torino l'accoppiamento e lo sviluppo delle uova del Gordius pustulosus *si compie nella terra umida in via normale.*

Per ciò che è dello sviluppo delle uova e della prima forma larvale non ebbi occasione di fare alcuna osservazione; mi pare tuttavia probabile che si abbia qui un caso di accorciamento di sviluppo.

Forse lo stadio di larva propriamente detto si compie entro all'uovo e l'animale quando esce ha di già la forma allungata nematodiforme, portando seco, come residuo dello stadio larvale, una parte dell'armatura chitinosa della tromba e piccole prominenze chitinose all'estremità posteriore del corpo. Il Gordio penetrerebbe forse nell'ospite essendo già allo stato nematodiforme.

Per quanto abbia cercato non mi venne fatto di trovare larve di Gordii incistidate nè nei *Blaps* adulti, nè nelle larve anche giovani di questi ultimi.

Mi pare inoltre che pel *Gordius pustulosus*, il quale si trova nelle condizioni di vita sopradette, si possa ritenere *che esso si sviluppa direttamente in un solo ospite* (2).

Sarebbe interessante di verificare se il *G. pustulosus* presenti a Londra e a Grenoble, dove venne pure trovato parassita di *Blaps*, un analogo fenomeno di adattamento.

---

(1) *Histoire des métamorphoses du Blaps producta*, Dey., *et du Blaps fatidica*, Sturm. — Annales de la Société entomolog. de France, 2ª ser., vol. X, pag. 603 (1852).

(2) Vedasi a proposito dell'incistidamento dei Gordii, Villot, *L'évolution des Gordiens.* — Ann. sc. nat., 7ª ser., 1891, pag. 343.

L'individuo di *G. pustulosus* che venne trovato in un pozzo della R. Accademia Albertina proveniva certamente da qualche individuo di *Blaps mucronata* cadutovi entro. Analogamente forse si può spiegare la presenza di un individuo di *G. pustulosus* in un serbatoio d'acqua a Serramannu in Sardegna.

Il Villot (1) ha descritto minutamente la femmina del *G. pustulosus*: i miei esemplari corrispondono a questa descrizione e così pure corrispondono in complesso le dimensioni delle areole dello strato esterno della cuticola, strato che il Villot chiama impropriamente epidermide (2). Riguardo ai tubercoli infraareolari ho osservato che questi sono più sviluppati verso l'estremità posteriore del corpo ed assumono l'aspetto di minutissime spine; talvolta questi tubercoli o queste spine si trovano anche sopra l'areola stessa (fig. 4 *c* e fig. 6 *c*).

Descriverò ora il maschio del *G. pustulosus* che fino ad ora non era conosciuto.

La forma generale del corpo è simile a quella della femmina: ma le differenze di diametro trasversale fra l'estremità anteriore, la posteriore e la mediana sono meno spiccate che nella femmina.

Le dimensioni degli individui più grossi sono m. 0,14, m. 0,15 in lunghezza e m. 0,0008 in larghezza. L'estremità posteriore è biloba: manca la lamina post-cloacale: vi sono due serie convergenti di peli setole come mostra la fig. 8 unita a questo lavoro.

---

(1) *Révision des Gordiens*, op. citata.

(2) Non ritornerò qui sopra la questione dell'*epidermide* e della *cuticola* dei Gordii poichè ho già avuto occasione di trattarla lungamente in altri lavori. Il VILLOT recentemente (*Evolutions des Gordiens*, op. citata) torna a sostenere la sua idea che lo strato cellulare periferico sottocuticolare del Gordio adulto sia da considerarsi come un ammasso di fibrille nervose fra le quali si trovano ancora i nuclei delle cellule primitive dello strato ch'egli chiama ipodermico (tav. 16, pag. 5, e spiegazione della figura pag. 397). Gli argomenti che il VILLOT adduce per combattere l'opinione del VEJDOVSKY, del MICHEL e mia a tale riguardo, e tanto meno le figure che egli unisce al suo lavoro, non mi paiono menomamente sostenibili; quindi io conservo allo stato cellulare periferico dei Gordii adulti il significato ed il nome di strato *epidermico* propriamente detto ed agli strati soprastanti il nome di strati *cuticolari*. Ritornerò del resto sopra questo e sopra altri punti dell'anatomia dei Gordii, sui quali non mi è possibile andare d'accordo col VILLOT, in altra occasione.

Lo strato cuticolare esterno presenta due sorta di areole: le une più piccole e di tinta più chiara, di dimensioni variabili (lunghezza da 12 a 15 micromillimetri, larghezza da 10 a 15 micromillimetri); e le altre più grandi sporgenti, e di tinta più scura. Queste grosse areole (lunghezza da 25 a 30 micromillimetri, larghezza da 22 a 30 micromillimetri) sono formate dalla fusione più o meno completa di varie areole più piccole. Le grosse areole sono più numerose e più sporgenti verso l'estremità posteriore del corpo. I tubercoli infraareolari sono come nella femmina.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Fig. 1. — *Gordius pustulosus*, individuo giovanissimo trovato parassita in un *Harpalus aeneus* nei sotterranei del Palazzo Carignano il 12 aprile 1891 (Zeiss. oc. 3. ob. F.). *a.* armatura chitinosa, residuo dell'armatura della tromba dello stadio larvale propriamente detto.

Fig. 2. — *Gordius pustulosus*, individuo giovanissimo trovato parassita in un *Blaps mucronata* nei sotterranei del Palazzo Carignano nell'aprile 1891 (Zeiss. oc. 3. ob. F.). *a.* come nella figura precedente.

Fig. 3. — *G. pustulosus* adulto, porzione dello strato cuticolare esterno del maschio trovato parassita in un *Blaps mucronata* nei sotterranei del Palazzo Carignano (Zeiss. oc. 1. ob. F. tubo chiuso — la carta da disegno sul tavolo da lavoro — camera chiara di Abbé). *a.* areole più grosse e più scure. — *b.* protuberanze infraareolari.

Fig. 4. — *G. pustulosus* adulto, porzione dello strato cuticolare esterno della femmina — il resto come nella figura precedente — *c.* protuberanze sopraareolari.

L. CAMERANO Ricerche intorno al parassitismo ed allo sviluppo del Gordius Pustulosus Baird

Atti R. Accad. delle Sc. di Torino

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 5. — *Gordius pustulosus* giovanissimo (lungo un centimetro appena) parassita di una larva di *Blaps mucronata* dei sotterranei del Palazzo Carignano (3 marzo 1892) (Zeiss. oc. 2. ob. E.). *a.* residuo dell'armatura chitinosa allo stadio larvale.

Fig. 6. — *Gordius pustulosus* adulto : porzione dello strato cuticolare esterno della regione anteriore del corpo vista in sezione (Zeiss. oc. 3. in ob. F.). *a.* areole — *b.* protuberanze tubercoliformi infraareolari — *c.* protuberanze tubercoliformi supraareolari.

Fig. 7. — Come la fig. 6, la sezione è fatta nella regione posteriore del corpo là dove le protuberanze infraareolari o supraareolari sono più sviluppate e sono più o meno spiniformi.

Fig. 8. — *Gordius pustulosus* maschio, parassita di un *Blaps mucronata* dei sotterranei del Palazzo Carignano (Hartn. ocul. 2. ob. 4.). *a.* serie divergenti di peli setole precloacali.

Fig. 9. — Estremità posteriore dell'individuo di cui è rappresentata l'estremità anteriore nella fig. 5. — *a.* protuberanza chitinosa, residuo probabile di uno degli uncini chitinosi posteriori dello stadio larvale propriamente detto.

Generalizzazione della formula di Simpson;

Nota del Socio Prof GIUSEPPE PEANO

Fra le formule per le quadrature sono notevoli quella dei trapezii

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + R,$$

ove

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(u);$$

e quella di Simpson:

$$(\beta) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] + R$$

ove

$$R = -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} f^{\text{IV}}(u),$$

rappresentando costantemente con u un valore intermedio fra a e b (*). Il resto nella (α) è nullo, se $f(x)$ è intera di primo grado, e nella (β) il resto è nullo, se $f(x)$ è intera di grado non superiore al terzo.

Parallelamente a queste formule si hanno quelle di Gauss. L'analoga alla (β) è

$$(\beta') \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\Bigg[& \left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{b-a}{2}\right) \\ & + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{b-a}{2}\right)\Bigg] + R \end{aligned} \right.$$

(*) Pubblicai quell'espressione del resto della formola di Simpson nelle *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, pag. 206.

ove

$$R = -\frac{(b-a)^5}{180.4!} f^{\text{IV}}(u),$$

e il resto è nullo per le funzioni di grado non superiore al terzo.

Paragonando le formule (β) e (β'), che si possono considerare come egualmente approssimate, risulta che è più semplice, in generale, il calcolo dei tre valori $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f(b)$, che esige la formula (β), che il calcolo dei due

$$f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}\right),\ f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}\right)$$

che esige la formola (β'). Questo spiega il maggior uso della formula (β) di Simpson sulla corrispondente (β') di Gauss.

Le formule di Gauss costituiscono una successione infinita, mentrechè le formule dei trapezii e di Simpson erano finora isolate. Io mi propongo di esporre qui una successione di infinite formule di quadrature, di cui le due prime sono appunto la (α) e la (β).

Per semplicità supporremo i limiti dell'integrale eguali a -1 e $+1$, poichè basta fare il cambiamento

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x',$$

onde ridurci a questo caso.

La questione che ci proponiamo è questa: Determinare gli $n+1$ coefficienti $A_0, A_1, \ldots A_n$, e gli $n-1$ valori $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$ compresi fra -1 e $+1$ in guisa che la formula

$$(1)\qquad \begin{cases} \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots \\ \qquad + A_{n-1} f(x_{n-1}) + A_n f(1) \end{cases}$$

sussista, qualunque sia la funzione $f(x)$ intera di grado $2n-1$.

La soluzione è la seguente. Pongasi.

$$(2)\qquad Y_n = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n.$$

Avendo la funzione $(x^2-1)^n$ le radici -1 ed 1 multiple d'ordine n, la sua derivata $(n-1)^{ma}$, Y_n, avrà le radici $x_0=-1$, $x_n=1$, semplici, ed $n-1$ radici $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}$ distinte e comprese fra -1 e $+1$. Si calcolino i coefficienti $A_0, A_1, \ldots$ colla formola

$$(3)\qquad A_r=\int_{-1}^{+1}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)\ldots(x_r-x_{n-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)}dx.$$

Allora sussisterà la formula (1).

Infatti, si divida la $f(x)$, funzione intera di grado $2n-1$, per Y_n, di grado $n+1$; siano $\varphi(x)$ il quoziente, $\psi(x)$ il resto, onde:

$$(4)\qquad f(x)=\psi(x)+Y_n\,\varphi(x).$$

Sarà $\psi(x)$ di grado n, e $\varphi(x)$ di grado $n-2$. Attribuendo ad x gli $n+1$ valori $x_0, x_1, \ldots x_n$, per cui si annulla Y_n, si avrà

$$f(x_0)=\psi(x_0),\; f(x_1)=\psi(x_1),\;\ldots\; f(x_n)=\psi(x_n).$$

Quindi la funzione $\psi(x)$, intera, di grado n, di cui si conoscono i valori per $n+1$ valori della variabile, si può esprimere colla formola d'interpolazione di Lagrange:

$$(5)\quad \psi(x)=\sum_r\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)}f(x_r)$$

Dalla (4) si ha:

$$(6)\qquad \int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{+1}\psi(x)\,dx+\int_{-1}^{+1}Y_n\,\varphi(x)\,dx$$

Ora, dalle (5) e (3), si ricava

$$(7)\qquad \int_{-1}^{+1}\psi(x)\,dx=\sum_r A_r\,f(x_r),$$

Riguardo al secondo integrale, coll'integrazione per parti si ha:

$$\int Y_n \varphi(x)\, dx = \int \varphi(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n\, dx =$$

$$= \varphi(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} (x^2-1)^n - \varphi'(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-3} (x^2-1)^n + \ldots$$

$$\pm \varphi^{(n-2)}(x) \cdot (x^2-1)^n \mp \int \varphi^{(n-1)}(x)\, (x^2-1)^n\, dx.$$

Mettendo i limiti -1 e $+1$, tutti i termini integrati nel secondo membro si annullano, perchè contengono il fattore x^2-1; e siccome $\varphi(x)$ è di grado $n-2$, sarà $\varphi^{(n-1)}(x) = 0$, onde:

$$(8) \qquad \int_{-1}^{+1} Y_n\, \varphi(x)\, dx = 0$$

Sostituendo nella (6) ai due integrali del secondo membro i loro valori dati dalle (7) ed (8), si ha la formola (1) che si voleva dimostrare.

La formola (1), esatta se $f(x)$ è intera di grado $2n-1$, è approssimata se $f(x)$ è una funzione arbitraria. Per calcolare l'errore R, tale che si abbia:

$$(9) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_r A_r f(x_r) + R,$$

si formi la funzione $F(x)$, intera, di grado $2n-1$, che soddisfa alle $2n$ condizioni:

$$F(x_0) = f(x_0),\quad F(x_1) = f(x_1),\quad F(x_2) = f(x_2),$$

$$\ldots\ F(x_{n-1}) = f(x_{n-1}),\quad F(x_n) = f(x_n),$$

$$F'(x_1) = f'(x_1),\quad F'(x_2) = f'(x_2),\ \ldots\ F'(x_{n-1}) = f'(x_{n-1}),$$

Si avrà, com'è noto:

$$(10) \quad f(x) = F(x) + (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)^2 \ldots (x-x_{n-1})^2 (x-x_n) \frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!}.$$

Integrando si avrà appunto $\int_{-1}^{+1} F(x)\, dx = \sum_r A_r f(x_r)$, onde

$$(11) \quad R = \int_{-1}^{+1} (x-x_0)(x-x_1)^2 \ldots (x-x_{n-1})^2 (x-x_n) \frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!} dx.$$

Portando fuori del segno integrale il fattore $\frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!}$, cosa lecita, poichè il fattore rimanente ha un segno costante nell'intervallo di integrazione, si ha:

$$(12) \quad R = \frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (x - x_0)(x - x_1)^2 \ldots (x - x_{n-1})^2 (x - x_n)\, dx .$$

Facendo $n = 1$, si ha la formula dei trapezii (α).
Per $n = 2$ si ha la formula di Simpson (β).
Per $n = 3$, fatti i calcoli, si ha:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \frac{1}{6} f(-1) + \frac{5}{6} f\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right) + \frac{5}{6} f\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6} f(1) + R,$$

ove

$$R = -\frac{2^5}{3 \,.\, 5^2 \,.\, 7 \,.\, 6\,!} f^{(6)}(u),$$

e il resto è nullo per le funzioni di grado inferiore al 6°.

Per $n = 4$ si ha:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \frac{1}{10} f(-1) + \frac{49}{90} f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \frac{32}{45} f(0) +$$

$$+ \frac{49}{90} f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \frac{1}{10} f(1) + R$$

ove

$$R = -\frac{f^{(8)}(u)}{2^2 \,.\, 3^4 \,.\, 5^2 \,.\, 7^3} = -\frac{f^{(8)}(u)}{2778300}.$$

Nota. — La stessa questione fu già trattata dal compianto D. Turazza, nel suo scritto: « *Intorno all'uso dei compartimenti diseguali nella ricerca del valore numerico di un dato integrale* » (Memorie I. R. Istituto Veneto, vol. V, 1855, pag. 277-298). Credo però nuove le espressioni di Y_n e dei resti.

Sulla trasformazione dell'energia in alcune pile elettriche;

Studio sperimentale del Dott. ADOLFO CAMPETTI

1º Il rapporto fra la quantità di calore fornita dai processi chimici che hanno luogo in una pila e l'energia della corrente prodotta, è stato oggetto di molte ricerche teoriche e sperimentali assai note, perchè non sia necessario di rifarne qui la storia. In alcuni elementi solo una parte dell'energia chimica consumata si trasforma in energia elettrica e l'altra parte si trasforma, in generale, direttamente in calore nell'interno dell'elemento; in altri elementi invece l'energia chimica consumata non è sufficiente a mantenere da sola la corrente; in questo caso l'elemento trasforma in energia elettrica una parte del suo calore e perciò, indipendentemente dal calore Joule, la pila si raffredda. — Nel primo caso, se si calcola la forza elettromotrice dai dati termochimici questa deve risultare maggiore della forza elettromotrice osservata che mantiene la corrente in quelle condizioni; nell'altro caso invece, minore.

Tra i lavori più recenti diretti a studiare sotto questo aspetto le coppie voltaiche, ricorderò quelli di Jahn (*), Gockel (**) e Levay (***) che considerano coppie costanti generalmente del tipo Daniell richiamandosi alla teoria di Helmholtz. — Per le pile non costanti i fenomeni riescono più complicati, giacchè la forza elettromotrice dipende da molte circostanze, come l'intensità della corrente, ecc. Fra i lavori relativi alle pile di questo genere accennerò, oltre al lavoro di Favre (*Annales de Chymie et de*

(*) JAHN, *Ueber die Beziehung von chemischer Energie und Stromenergie galvanischer Elemente*, etc., W. A., 1886.

(**) GOCKEL, *Ueber den Sitz der Veränderlichkeit der elektromotorischen Kraft galvanischer Elemente mit der Temperatur*. W. A., 1890.

(***) LEVAY, *Verhältniss der Stromarbeit zur chemischen Energie*, etc. W. A., 1891.

Physique 1854) alle memorie dei proff. Naccari e Guglielmo Oberbeck e Edler e Pagliani. — I prof. Naccari e Gugliemo (*), hanno studiato l'influenza della natura degli elettrodi, dell'ossigeno disciolto ecc., sulla forza elettromotrice; Oberbeck ed Edler (**) deducono dalle loro esperienze che la forza elettromotrice deve in generale calcolarsi dalle reazioni che avvengono in esse avendo riguardo ai processi calorifici che hanno luogo sugli elettrodi, e che le pile incostanti possono ricondursi alle costanti mediante l'ipotesi di strati molecolari di soluzioni del metallo dell'elettrodo; il prof. Pagliani (***) esamina il calore svolto nel primo tempo della chiusura del circuito per elementi costituiti da due metalli immersi in uno stesso liquido (acido solforico o cloridrico diluiti) ed adopera a tale scopo una specie di bolometro assai sensibile ecc.

In questa nota si sono presi a studiare elementi Bunsen ed elementi del tipo Smée: i primi possono riguardarsi sino ad un certo punto come costanti; degli altri, quelli studiati presentano nelle circostanze dell'esperienza una polarizzazione quasi costante e forniscono quindi per un tempo sufficiente una corrente della stessa intensità. — Per ognuno di questi elementi si è determinata la differenza fra il calore totale svolto nel circuito o l'energia della corrente data dalla pila in un certo tempo; a tale scopo era necessario conoscere la forza elettromotrice della pila a circuito chiuso e l'intensità della corrente che l'attraversa, e misurare la quantità di calore svolto nell'elemento durante l'esperienza. Si è esaminata inoltre la variazione della forza elettromotrice colla temperatura e, per la maggior parte delle combinazioni studiate, si è riportato il valore della forza elettromotrice quale risulta dai dati termochimici.

La forza elettromotrice veniva determinata col metodo di compensazione servendosi di un elettrometro di Lippmann e confrontando successivamente la pila da studiare e un elemento campione con due Daniell che, dentro un piccolo intervallo di tempo,

(*) Naccari e Guglielmo, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1881.

(**) Oberbeck und Edler, *Ueber die elektromotorischen Kräfte galvanischer Ketten.* W. A., 1891.

(***) Pagliani, Atti dell'Accademia di Torino, 1890: *Sull'origine della forza elettromotrice nelle coppie idroelettriche.*

possono riguardarsi come costanti: l'elettrometro usato poteva indicare circa 3 decimillesimi di Volt. Come elemento campione serviva un Latimer-Clark costruito secondo le indicazioni riportate nell'*Elektrotechnische Zeitschrift* (1891, pag. 338) con zinco in bacchette di Tromsdorff, solfato di zinco commercialmente puro e solfato di mercurio preparato direttamente da materiali puri. Il solfato di zinco si faceva bollire con carbonato di zinco, si filtrava ancora caldo e si poneva nella pila a una temperatura un po' superiore a quella a cui essa doveva adoperarsi. Per due elementi così preparati il rapporto delle forze elettromotrici si mantenne anche dopo varii mesi tra 1,0005 e 1,0006: il coefficiente di temperatura era circa 0,0004: anche Carhart trovò per coefficiente di temperatura in simili condizioni 0,00039 (*Elektrotechnische Zeitschrift* 1890, pag. 304). La cura con cui gli elementi Clark furono costruiti, la costanza relativa delle forze elettromotrici di due di essi, non che questa coincidenza nel valore del coefficiente di temperatura mi sono sembrate ragioni sufficienti per assumere come valore della forza elettromotrice 1,45 Volt, valore intermedio fra quelli assunti per gli elementi Latimer-Clark.

La intensità della corrente si determinava con una bussola di Siemens di cui si determinò la costante per diversi angoli con voltametri a solfato di rame commercialmente puro e fatto cristallizzare più volte. Le altre indicazioni relative al metodo seguito per la misura del calore svolto nell'elemento si troveranno nel corso del lavoro.

2° **Elementi Bunsen.** — Questi elementi erano preparati in bicchieri di vetro sottile di circa 9 centimetri di altezza e 6 di diametro: il polo negativo era costituito da tre bacchette di zinco di Tromsdorff, amalgamato ad ogni esperienza, infilate in un sughero attorno ad un vaso poroso contenente una bacchetta di carbone da lampade elettriche immersa nell'acido nitrico. La densità dell'acqua acidulata con acido solforico era 1,129 a 18°; quella dell'acido nitrico 1,31 a 18°. I poli della pila erano riuniti da una resistenza $r_2 =$ Ohm 1,04 e da una derivazione r_3 contenente la bussola con una resistenza totale di Ohm 19,41: dai poli stessi partivano pure i fili conducenti all'elettrometro.

Per questi elementi la forza elettromotrice E si determi-

nava a circuito aperto, perchè la forza elettromotrice a circuito chiuso differisce pochissimo dalla prima; nota la forza elettromotrice e la intensità I_3 della corrente che attraversava la bussola si calcolava dalle formule

$$r_1 = \frac{Er_2 - I_3 r_2 r_3}{I_3 (r_2 + r_3)}, \qquad I_1 = \frac{E(r_2 + r_3)}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$$

la intensità della corrente nella pila e nel ramo r_2 e si poteva quindi dedurre l'energia della corrente e il calore sviluppato nel circuito esterno.

Il calore svolto nella pila si misurava direttamente adoperando la pila stessa come calorimetro: un termometro in decimi era perciò infilato nel sughero che faceva da coperchio alla pila e aveva il bulbo immerso nell'acqua acidulata; l'agitatore era di ottone ricoperto di vernice di gomma lacca. Invece di misurare la variazione di temperatura della pila durante il passaggio della corrente, si preferiva mantenerla a temperatura costante facendovi discendere dell'acqua acidulata della stessa densità e a temperatura inferiore a quella dell'elemento; in tal modo si evitava la determinazione del calore specifico dei varii corpi componenti la pila e bastava conoscere solamente il calore specifico dell'acqua acidulata: questo si dedusse per interpolazione dalle tabelle di Thomsen (*) e si ottenne $c = 0,871$. L'acqua acidulata da versare nella pila era tenuta in un recipiente di vetro riparato il più possibile dall'irradiazione, munito di un termometro e, in alto, di un robinetto, in basso, di un sottile tubo di efflusso: aprendo il robinetto, il liquido poteva cadere nella pila. Da alcune esperienze risultò che il riscaldamento del liquido durante la caduta era circa di 0°,04 per ogni grado di eccesso della sua temperatura su quella dell'ambiente.

Le esperienze si eseguivano così. Determinata la forza elettromotrice a circuito aperto, si chiudeva questo per alcuni minuti e si notava la deviazione dell'ago della bussola; si apriva il circuito, si determinava di nuovo la FE, e si versava nella pila tanta acqua acidula da fare scendere la temperatura un po' al disotto della temperatura iniziale: poi si chiudeva di nuovo il circuito, si leggeva la bussola e agitando lentamente si ricon-

(*) J. Thomsen, *Thermochemische Untersuchungen.* Pogg. Ann., 1871.

duceva la temperatura al valore primitivo. Si interrompeva allora la corrente, si notava il tempo trascorso e si determinava un'ultima volta la forza elettromotrice. La trasmissione del calore nell'interno della pila avveniva abbastanza rapidamente e la irradiazione era così piccola che, terminata l'esperienza, la temperatura restava per qualche tempo costante ed uguale alla iniziale. Bastava dunque pesare la pila prima e dopo l'esperienza e sapere la temperatura dell'acqua acidulata aggiunta per conoscere la quantità di calore svolto nella pila. Qui sotto sono riportati i resultati di tre esperienze: per la prima delle tre soltanto sono riferiti per disteso i dati relativi alla forza elettromotrice, all'intensità della corrente ecc. — I numeri della prima colonna (T) indicano la durata dei due intervalli di ogni esperienza; I_3 è la intensità della corrente nella bussola, I_2 nella resistenza r_2, I_1 nella pila; E la forza elettromotrice, c il calore svolto nella pila espresso in piccole calorie, c_1 e c_2 rappresentano il calore svolto nel circuito esterno e l'energia della corrente $\left(\frac{EIt}{a}\right.$ essendo a l'equivalente meccanico del calore$\left.\right)$ espressi nelle stesse unità, $\Delta = c_1 + c - c_2$ la differenza fra il calore totale svolto nel circuito e l'energia della corrente riferita a 100 di energia della corrente.

Esp. I. — Temperatura della pila 11,81.
» del liquido aggiunto 7,60.
Peso del liquido aggiunto gr. 39,65.

T	I_3	I_2	I_1	E	c	c_1	c_2	Δ
5′	0,0643	1,203	1,267	1,917				
				1,907	143,7	217,3	326,5	10,6
4′, 30″	0,0653	1,227	1,292	1,888				

	c	c_1	c_2	Δ
Esp. II	137,4	223,2	315,8	14,2
Esp. III	171,1	265,9	381,5	14,5

Nel caso delle pile Bunsen dunque l'energia della corrente è minore del calore svolto in tutto il circuito, perciò una parte dell'energia chimica consumata si trasforma direttamente in calore nell'elemento: se si calcola la forza elettromotrice dai dati termochimici si trova secondo Thomsen 1,827; questa forza elettromotrice risultando un po' minore della osservata in tutte e tre le esperienze dovrebbe invece aversi un raffreddamento: se accade il contrario, ciò è dovuto probabilmente ad azioni secondarie, che possono avere origine per esempio dalla diffusione dell'acido nitrico attraverso il vaso poroso ecc.

Si esaminò anche la variazione della forza elettromotrice colla temperatura; a tale scopo, per non agitare il liquido dell'elemento, si collocava questo in un vaso calorimetrico e si osservava la FE, di 10 in 10 minuti, poi si faceva giungere attorno all'elemento stesso dell'acqua riscaldata e si continuava ad osservare le FE, di 10 in 10 minuti. Riporto qui sotto per brevità una sola esperienza; lo stesso farò anche nel rimanente del lavoro.

La prima linea orizzontale contiene le temperature, la seconda la FE in Clark

8,2	8,4	8,5	21,4	22	22
1,323	1,323	1,323	1,340	1,333	1,333

Il riscaldamento fa subire dapprima un aumento alle FE, la quale poi decresce mantenendosi però superiore a quello che era prima del riscaldamento.

3° Pile del tipo Smée. — Le pile di questo tipo erano preparate in bicchieri di vetro sottile del diametro di circa 5 centimetri, dell'altezza di 8: un tappo di sughero portava una lamina di argento platinato (di 5 centimetri di altezza per 2 di larghezza) tra due bacchette del metallo adoperato, un termometro in decimi ed era attraversato da un agitatore. La lamina veniva platinata con una soluzione assai concentrata di

cloruro di platino e sodio, poi lavata in acqua e nel liquido da usare nell' elemento, poi di nuovo in acqua. Come liquido eccitatore nella pila si adoperò acqua acidulata con acido solforico (Densità a 18° 1,090) o con acido cloridrico (Densità a 18° 1,025) e soluzione di idrato potassico (Densità a 18° 1,077). Il polo negativo della pila era costituito da bacchette di zinco o cadmio o stagno di Tromsdorff amalgamate. La lamina di argento veniva platinata tutte le volte che si cambiava il metallo attaccato nella pila.

La pila veniva chiusa direttamente sopra un circuito contenente la bussola e una resistenza nota; indicheremo con R la resistenza totale di questo circuito: la lettura della bussola dava direttamente la intensità I della corrente. Data la natura di questi elementi era necessario determinare la FE a circuito chiuso: questo valore si deduceva dalla lettura dell'elettrometro di Lippmann, adoperando il metodo di compensazione, come è stato spiegato prima, dall' intensità I della corrente che attraversava la pila e dalla sua resistenza interna ρ. Questa resistenza era determinata col metodo di Mance appena preparata la pila e dopo che questa era stata chiusa sopra una delle resistenze R per 10 o 15 minuti: si trovò in ogni caso che la resistenza variava solo di qualche millesimo di Ohm, di modo che si ritenne costante durante tutta l' esperienza ed uguale al valore medio (ρ) della resistenza iniziale e finale.

La quantità di calore svolto nella pila si misurava direttamente osservando la variazione di temperatura della pila e conoscendo il suo equivalente in acqua; questo equivalente (ε) era determinato come somma degli equivalenti in acqua delle varie parti dell'elemento: per il calore specifico del liquido si presero i numeri di Thomsen.

Nelle tabelle che seguono le lettere poste ad ogni colonna hanno lo stesso significato che nelle precedenti.

Zinco e acqua acidulata con acido solforico.

Esp. I. $\varepsilon = 94,0$ $R = 1,195$ $\rho = 0,479$.

Forza elettromotrice a circuito aperto 1,0712
Temperatura iniziale della pila 12,89.
» finale 13,29.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
5'	0,440	0,741				
5'	0,435	0,739	38,5	49,3	69,0	27,2
5'	0,432	0,738				

Si fecero altre due esperienze con resistenza esterna 1,195 e 2,149: la forza elettromotrice della pila a circuito chiuso era nella prima intorno a 0,745 Volt, nella seconda intorno a 0,734: e si ebbe

	c	c_1	c_2	Δ
Esp. II	35,6	49,9	70,1	22,0
Esp. III	28,6	50,9	60,3	31,9

Si vede come in tutte le esperienze il calore totale svolto nel circuito superi l'energia elettrica: a circuito aperto non si ebbe alcun cambiamento di temperatura. — La forza elettromotrice dedotta dai dati termochimici (*) sarebbe di 0,835 Volt: ora nelle esperienze eseguite la forza elettromotrice è stata sempre minore: è quindi naturale che una parte dell' energia chimica consumata nell'elemento si sia direttamente trasformata in calore nell'elemento stesso.

Il coefficiente di temperatura di questo elemento fu determinato col metodo stesso che per la Bunsen; si ebbe:

Temperatura	13	13	13	27,5	28	27	26
FE in Clark	0,7414	0,7409	0,7407	0,7352	0,7345	0,7329	0,7326

(*) Wright and Thompson, *Philosophical Magazine*, 1883.

La forza elettromotrice decresce dunque col crescere della temperatura: la diminuzione seguita anche dopo che la pila ha raggiunto la temperatura più elevata: l'agitazione del liquido della pila non modificava la forza elettromotrice.

Zinco e acqua acidulata con acido cloridrico (calore specifico 0,915).

A circuito aperto e pochi minuti dopo preparato l'elemento, la sua forza elettromotrice era compresa tra Volt 1,0556 e Volt 1,0612: decresceva però più rapidamente che nelle pile ad acido solforico; dopo qualche ora scese infatti a 0,822.

Si fecero quattro esperienze delle quali sono qui sotto riferiti i risultati.

ESP. I. $\varepsilon = 99,45$ $R = 1,195$ $\rho = 0,469$

Temperatura iniziale della pila 11,49.
» finale » 11,69.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
5′	0,477	0,782				
5′	0,474	0,774	19,9	58,3	78,6	−0,5
5′	0,474	0,767				

II. — La forza elettromotrice a circuito chiuso andava da 0,769 a 0,755: durata dell'esperienza 15 minuti: resistenza esterna 1,195: si ebbe

$$\Delta = -1,5$$

III. — La forza elettromotrice a circuito chiuso andava da 0,747 a 0,720: durata dell'esperienza 20 minuti: resistenza esterna 2,149: si ebbe

$$\Delta = +6,7$$

IV. — La forza elettromotrice a circuito chiuso andava da 0,722 a 0,708: durata dell'esperienza 20 minuti: resistenza esterna 2,149: si ebbe

$$\Delta = +6,1$$

La forza elettromotrice calcolata dai dati termochimici è (*l. c.*) Volt 0,754: si vede dunque che Δ è positivo o negativo, secondochè la forza elettromotrice che mantiene la corrente è minore o maggiore della forza elettromotrice calcolata, come vuole la teoria.

La forza elettromotrice cresce colla temperatura come indica la tabella seguente:

Temperatura	9,8	9,8	9,8	9,8	22	21
FE in Clark	0,5675	0,5561	0,5659	0.5646	0,5745	0,5764

quest'aumento però potrebbe, almeno in parte, dipendere dall'agitazione che si produce in seno al liquido per il riscaldamento: infatti una scossa data alla pila fa aumentare la FE di una quantità dello stesso ordine.

Zinco e soluzione d'idrato potassico (calore specifico 0,890).

La forza elettromotrice a circuito aperto, quando l'elemento sia preparato da pochi minuti, variava tra 1,232 e 1,206: col tempo la FE va aumentando fino a raggiungere, per es., il valore 1,426: a circuito chiuso invece decresce molto più rapidamente che nei casi precedenti e dipende dal valore che aveva prima di chiudere il circuito.

Si fecero tre esperienze; le prime due con un elemento che aveva per resistenza interna Ohm 2,174: l'ultima con un elemento di resistenza interna 1,319.

Esp. I. $\varepsilon = 102,5$ $R = 0,662$ $\rho = 2,174$

Temperatura iniziale della pila 9,80 a 9,79.
» finale » 9,83.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
5′	0,184	0,537				
5′	0,153	0,460	3,6	3,2	15,1	− 55
5′	0,123	0,389				

Esp. II. — La forza elettromotrice variava da 0,376 a 0,280: durata dell'esperienza 16 minuti: resistenza esterna 0,662: si ebbe

$$\Delta = -33$$

Esp. III. — La forza elettromotrice variava da 0,432 a 0,245: durata dell'esperienza 16 minuti: resistenza esterna 0,662: si ebbe

$$\Delta = -37$$

I valori di Δ sono negativi in tutti i tre casi, differiscono però assai l'uno dall'altro; questo può dipendere dal fatto che la corrente essendo di piccola intensità, la quantità di calore svolta nella pila viene determinata con piccola esattezza relativa.

La forza elettromotrice non subisce variazione apprezzabile riscaldando l'elemento: conviene però notare che la agitazione del liquido da sola fa diminuire la forza elettromotrice.

Cadmio e acqua acidulata con acido solforico. — La forza elettromotrice della pila pochi minuti dopo preparata varia tra Volt 0,815 e Volt 0,816; poi decresce lentamente fino a raggiungere dopo qualche ora il valore 0,776. In questo elemento dopo qualche tempo che è preparato si nota un raffreddamento anche a circuito aperto.

Anche qui si fecero le tre esperienze che seguono:

Esp. I. $\varepsilon = 101,4$ $R = 1,195$ $\rho = 0,331$

Temperatura iniziale della pila 11,40.
» finale » 11,45.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
5'	0,244	0,355				
5'	0,243	0,357	5,1	15,1	18,5	+ 9,2
5'	0,242	0,355				

Esp. II. — La forza elettromotrice varia da 0,379 a 0,370: durata dell'esperienza 15 minuti: resistenza esterna 0,662: si ebbe

$$\Delta = -0,3.$$

Esp. III. — La forza elettromotrice varia da 0,362 a 0,344: durata dell'esperienza 15 minuti: resistenza esterna 0,662: si ebbe

$$\Delta = -4,2.$$

In questo caso la forza elettromotrice dedotta dai dati termochimici sarebbe (*l. c.*) 0,470; risulta quindi in tutti i tre casi maggiore della *F. E.* che si ha effettivamente; il valore di Δ dovrebbe quindi essere positivo; abbiamo però notato che anche a circuito aperto la pila si raffredda e questo può avere influenza anche dopo stabilita la corrente.

Il riscaldamento della pila fa aumentare la forza elettromotrice da principio; poi questa torna a diminuire, come risulta dall'esperienza qui riferita:

Temperatura	12,3	12,3	12,3	25,5	23,5	21,4
Forza elettromotrice in Clark	0,5353	0,5354	0,5352	0,5370	0,5364	0,5355

Conviene però osservare che anche la semplice agitazione del liquido produce un aumento nella forza elettromotrice.

Cadmio ed acqua acidulata con acido cloridrico. — A circuito aperto la forza elettromotrice pochi minuti dopo preparata variava tra 0,734 e 0,699 Volt e descriveva poi abbastanza lentamente.

Anche qui si fecero le tre esperienze seguenti:

Esp. I. $\varepsilon = 96,8$ $R = 1,195$ $\rho = 0,315$

Temperatura iniziale della pila 11,99.
» finale » 11,93.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
5′	0,275	0,412				
5′	0,265	0,394	— 5,8	18,2	22,7	— 45
5′	0,259	0,385				

Esp. II. — La forza elettromotrice a circuito chiuso variava tra 0,416 e 0,380: durata dell'esperienza 15 minuti: resistenza esterna 1,195: si ebbe

$$\Delta = -38.$$

Esp. III. — La forza elettromotrice a circuito chiuso variava tra 0,419 e 0,369: durata dell'esperienza 15 minuti: resistenza esterna 0,662: si ebbe

$$\Delta = -36.$$

Se si calcola la forza elettromotrice dai dati termochimici risulta 0,388: ora nelle tre esperienze eseguite la forza elettromotrice media risulta superiore a quella calcolata e questo giustifica il valore negativo di Δ; anche in questo caso la pila a circuito aperto si raffredda lentamente. Il riscaldamento della pila produce un effetto analogo a quello che si ha per il caso del cadmio e dell'acido solforico: l'agitazione del liquido è senza influenza apprezzabile.

Cadmio e idrato potassico. — A circuito chiuso la forza elettromotrice discende subito a qualche millesimo di Volt.

Stagno e acqua acidulata con acido solforico. — La forza elettromotrice a circuito aperto pochi minuti dopo preparata la pila si trovò compresa tra 0,5467 e 0,5784 Volt: poi la forza elettromotrice decresce e la pila si raffredda lentamente; a circuito chiuso la forza elettromotrice assume valori molto piccoli e perciò le determinazioni relative al calore svolto nell'elemento riescono un po' incerte. A ogni modo in tutte le esperienze eseguite il valore di Δ risultò negativo: fra le esperienze eseguite riferisco la seguente:

$$\varepsilon = 108 \qquad R = 0{,}170 \qquad \rho = 0{,}238$$

Temperatura iniziale della pila 12,86.
» finale » 12,86.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
5′	0,284	0,119				
5′	0,247	0,101	0	2,3	5,6	—59
5′	0,228	0,089				

Il riscaldamento della pila non produce un' azione apprezzabile sulla FE: l'agitazione del liquido la fa invece diminuire.

Stagno e acqua acidulata con acido cloridrico. — La forza elettromotrice a circuito aperto pochi minuti dopo preparata la pila si trovò compresa tra 0,5142 e 0,5458; a circuito chiuso varia assai rapidamente. Riporto solo due esperienze:

Esp. I. $\varepsilon = 100,3$ $R = 0,170$ $\rho = 0,238$

Temperatura iniziale della pila 14,08.
» finale » 13,99.

T	I	E	c	c_1	c_2	Δ
2′	0,376	0,156				
2′	0,338	0,143				
2′	0,296	0,124	−9	2,1	5,3	−230
2′	0,243	0,103				
2′	0,196	0,081				

Esp. II. — La forza elettromotrice a circuito chiuso andava da 0,156 a 0, 108: resistenza esterna 0,170: durata dell'esperienza 10 minuti: si ebbe:

$$\Delta = -126.$$

La forza elettromotrice calcolata risulta 0,054: valore inferiore a quello che si osservò in tutte le esperienze; Δ quindi deve risultare negativo; la grande differenza nella sua grandezza da un'esperienza all'altra dipende da questo che l'elemento si raffredda notevolmente a circuito aperto qualche tempo dopo preparato: questo raffreddamento continua la sua influenza anche chiuso il circuito. Riscaldando la pila si ha una diminuzione nella forza elettromotrice e questa diminuzione continua anche dopo compiuto il riscaldamento.

4° Dalle esperienze che precedono risulta che: 1° Per le combinazioni esaminate del tipo Smée la forza elettromotrice a circuito aperto non ha alcuna relazione coi dati termochimici ed è in ogni caso superiore a quella da essi calcolata. 2° La forza elettromotrice a circuito chiuso dipende, ora più ora meno dalla resistenza del circuito; ma è assai più vicina a quella calcolata dai dati termochimici. 3° Nella maggior parte dei casi il valore di Δ è positivo o negativo, secondochè la forza elettromotrice osservata risulta minore o maggiore della *FE* calcolata; nei casi di eccezione ha luogo un'azione chimica nella pila anche a circuito aperto; la differenza fra l'energia elettrica e l'energia chimica consumata dipende dal liquido della pila non solo, ma anche dalla natura del metallo attaccato. 4° Il coefficiente di temperatura della pila non ha alcuna relazione con questa differenza nè coi dati termochimici, come accade per molti tipi di pile costanti; a questo proposito però conviene fare le seguenti osservazioni. Il riscaldamento della pila produce anzitutto un movimento in seno al liquido: dipendentemente da questo movimento o per la semplice elevazione di temperatura può modificarsi lo strato speciale che deve formarsi alla superficie di uno almeno dei due elettrodi (poichè la *F. E.* non assume un valore stabile se non qualche ora dopo che la pila è preparata). questa circostanza lascia in erto il valore che si deve attribuire al coefficiente di temperatura dell'elemento a circuito aperto; d'altra parte a circuito chiuso l'aumento di temperatura fa in ogni caso diminuire la polarizzazione della lastra platinata e quindi aumentare notevolmente la forza elettromotrice in modo da nascondere ogni variazione dipendente da causa differente.

Al termine di questo lavoro mi è grato di porgere i più vivi ringraziamenti al Ch. Prof. A Naccari che mi fu largo dei suoi consigli durante il corso delle esperienze.

Torino, Laboratoro di Fisica dell'Università.
Marzo, 1892.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

☞ NB. *A questa Dispensa va unita la Tavola relativa alla Memoria del Dott.* F. S. MONTICELLI: *Studii sui* Trematodi endoparassiti *ecc., pubblicata nella Disp.* 9ª.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. 11ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Aprile 1892

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio Direttore della Classe, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Giacomini, Peano e Basso Segretario.

Si dà notizia della morte del Socio corrispondente Professore Annibale De Gasparis della Università di Napoli. Il Direttore della Classe ricorda gl'importanti lavori compiuti dall'illustre estinto nel campo delle matematiche pure e dell'astronomia.

Le parole di commemorazione pronunciate dal Direttore D'Ovidio saranno pubblicate negli *Atti*.

Vengono quindi letti ed accolti per l'inserzione negli *Atti* i tre lavori seguenti:

1° « *Su di un sistema di coniche nello spazio* »; Nota del Dott. Domenico Montesano, presentata dal Socio D'Ovidio;

2° « *Sulla resistenza elettrica delle leghe facilmente fusibili allo stato liquido* »; Studio sperimentale del Professore Dott. Carlo Cattaneo, presentato, a nome del Socio Naccari, dal Socio Basso.

Infine il Socio Camerano presenta un lavoro manoscritto del Dott. Francesco Saverio Monticelli, intitolato: *Studi sui Trematodi endoparassiti: Monostomum Cymbium Diesing;* Contribuzione allo studio dei Monostomidi.

Essendo questo lavoro destinato, previa approvazione della Classe, ai volumi delle *Memorie*, il Presidente incarica una Commissione di esaminarlo e di riferirne alla Classe in una prossima adunanza.

LETTURE

Cenno necrologico di Annibale De Gasparis;

Nota del Socio Prof. E. D'OVIDIO

Conobbi Annibale De Gasparis (*) dopo la instaurazione del Regno d'Italia, quando egli era già Professore di Astronomia nella Università di Napoli e prossimo ad assumere la direzione dell'Osservatorio astronomico di Capodimonte, al quale infuse nuova vita, circondandosi di giovani astronomi, guidandoli e infervorandoli con l'esempio. La semplicità bonaria de' modi, il parlare modesto e insieme arguto, l'entusiasmo che addimostrava per la scienza, lo rendevano immediatamente simpatico, e gli procacciavano la riverenza di chi lo avvicinava. Sanno tutti quale notevole contributo egli abbia recato all'Astronomia con la scoperta di un gran numero di asteroidi (Igea, Partenope, Egeria, Eunomia, Psiche, Massalia, Temi, Ausonia, Beatrice, ...): ed

(*) Nacque a Tocco negli Abruzzi, il 1819.

è anche risaputo dai lettori dei volumi accademici con quale costanza egli si occupasse di perfezionare i metodi e gli sviluppi proprî dell'Astronomia intesa in senso lato.

Ma il De Gasparis non era esclusivista nei suoi studi, e sapeva guardarsi intorno e mirar lontano. Ricorderò quella sua geniale Nota, pubblicata in francese e segnata con l'anagramma Jean Blaise Grandpas, nella quale dava, egli primo, la nozione e la teoria dei determinanti cubici. Si dilettava anche di letteratura; era gran lettore di romanzi e ammiratore dei poeti, ad es. Virgilio e Ossian, che sapeva a memoria.

Fu un patriota, quando amar la patria era delitto; e la memorabile giornata del 15 maggio 1848 lo vide fra i combattenti per la libertà.

Ebbe gli onori che meritava; fu ascritto dal 1861 al Senato del Regno, e socio dei principali sodalizî scientifici. Purtroppo in questi ultimi anni la salute declinante lo aveva costretto a lasciar l'insegnamento e le ricerche astronomiche; ed ora si è spento a circa 73 anni.

La morte del De Gasparis è grave lutto per la scienza italiana, e particolarmente per l'Osservatorio e per l'Università di Napoli, di cui fu vanto, per i moltissimi suoi amici ed ammiratori.

Attendendo che altri, più competente e meglio informato, dica degnamente e compiutamente dell'Uomo e dell'Astronomo, io ho soltanto voluto oggi, all'annunzio della sua morte, esprimere il cordoglio dell'Accademia di Torino, che perde nel De Gasparis uno dei più insigni suoi Soci corrispondenti.

Su di un sistema lineare di coniche nello spazio;

Nota del Prof. DOMENICO MONTESANO

Nella Geometria dei sistemi di linee dello spazio ordinario, dopo la teoria dei sistemi di rette, che può ritenersi sufficientemente nota per le molteplici ricerche su le superficie rigate, le congruenze ed i complessi di raggi, si presenta la teoria dei sistemi di coniche dello spazio, su la quale poco sinora è stato fatto (*). Un contributo a tale teoria è la presente Memoria, nella quale viene studiato il sistema delle coniche intersezioni degli elementi corrispondenti di una stella di piani e di una rete di quadriche omografiche fra loro, sistema che già per incidente avevo ottenuto in altre ricerche (**).

Esso nella Geometria delle coniche dello spazio ha la stessa importanza che nella Geometria della retta ha la congruenza di raggi generata da due stelle di piani omografiche fra loro, ed al pari di tale congruenza il suo studio si connette intimamente con quello di una curva gobba (di 7° ordine e di genere 5) che ne è direttrice e che determina completamente il sistema.

Dopo aver considerato la rete di superficie di 3° ordine di cui tale curva C_7 è base, i cui fasci hanno per basi variabili le coniche del sistema Σ di cui mi occupo, ho stabilito le caratteristiche elementari di tali coniche ed il grado del complesso delle tangenti ad esse; ho dimostrato che il sistema ammette ∞^1 reti

(*) Degne di nota sono le Memorie di CHASLES (Comptes-rendus, 1865, pag. 389) di LÜROTH (Giornale di Crelle, vol. 67) e di HIEROLZER (Math. Annalen. Bd. II, p. 562) che stabiliscono il numero delle coniche dello spazio soddisfacenti ad otto condizioni elementari. Vg. anche SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, § 20, pag. 90.

(**) Veg. la mia Nota: Su le trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei. Vol. IV, p. 207).

di quadriche generatrici, i cui gruppi-base formano su la C_7 un'involuzione (*fondamentale*) di 8° ordine e di 4ª specie e possono riguardarsi come gli elementi di uno spazio lineare a quattro dimensioni, ho considerato alcune varietà lineari degne di nota di tale spazio e ne ho dedotto una nuova genesi mediante reti di coniche dell'involuzione che in un piano determina una rete di cubiche aventi sette punti in comune (*), mettendo in evidenza alcune notevoli proprietà di tale involuzione.

Poscia ho fatto cenno delle superficie costituite da ∞^1 coniche del sistema Σ e di quelle omaloidiche specialmente, fra le quali è degna di nota quella di 6° ordine per cui la C_7 è doppia, superficie di cui dà un breve cenno il Caporali nella sua classica Memoria: *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane* (**).

Quindi ho studiato le trasformazioni birazionali involutorie dello spazio nelle quali le coniche del sistema Σ sono coniugate ciascuna a se stessa (involuzioni irriducibili, mediante trasformazioni birazionali dello spazio, ad altri tipi già noti) ed ho dimostrato che ogni trasformazione razionale involutoria dello spazio, nella quale le coppie di punti coniugati siano sui raggi di un complesso di grado μ dotato di ∞^2 raggi $(\mu-1)$pli formanti una stella, è in generale del tipo da me studiato; ed infine ho esaminato una corrispondenza fra punti e rette dello spazio determinata dal sistema Σ, nella quale ai punti dello spazio corrispondono delle schiere rigate sì fatte che una sola di esse contiene una retta assegnata ad arbitrio; ed ho dato in ultimo un breve cenno del caso particolare in cui le coniche del sistema Σ hanno in comune un punto (nel quale caso la C_7 direttrice di Σ passa tre volte per tale punto e risulta di genere 3), dimostrando che in tale caso esiste una trasformazione birazionale (4, 5) dello spazio assai notevole che muta il sistema Σ in una stella di rette.

(*) È la ben nota involuzione studiata dal GEISER nella Nota: Ueber zwei geometrische Probleme (Giornale di Crelle. Vol. 67 e posteriormente considerata dal BERTINI nelle sue Note: Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano § 24 (Annali di Matematica, Serie II, vol. 8) e Sopra alcune involuzioni piane § 27 e 28 (Rendiconti dell'Istituto lombardo, Serie II vol. 16) e dal CAPORALI nella Nota: Sulle trasformazioni univoche piane involutorie § 11. (Sue memorie pag. 123).

(**) Sue memorie, pag. 202, § 43, 5°.

1. Date nello spazio ordinario una stella (O) di piani ed una rete R di quadriche riferite l'una all'altra con una corrispondenza proiettiva Π, ogni piano ω della (O) sega la corrispondente quadrica S_2 della R secondo una conica γ, il cui assieme è doppiamente infinito e lineare, nel senso che per un punto arbitrario dello spazio passa un'unica conica γ dell'assieme.

Designeremo con Σ tale sistema di coniche.

Un fascio di piani (r) della (O) ed il corrispondente fascio (K_4) della R generano una superficie di 3° ordine S_3 che è il luogo delle coniche del sistema Σ situate nei piani del fascio (r) considerato.

L'assieme di tali S_3 è una rete Ξ. Due qualunque di queste superficie S_3 dovute ai fasci (r), (r') della (O) hanno in comune, oltre la conica γ di Σ situata nel piano $\omega \equiv r\,r'$, una C_7 di genere 5 (*) passante per O e per gli otto punti-base della R ed appoggiata in 6 punti alla γ. Ogni punto P di questa linea C_7 è la sezione di un raggio k della stella (O) con la curva K_4 base del fascio della R che nella Π corrisponde al fascio (k), sicchè pel punto P passano ∞^1 coniche del sistema Σ, appartenenti alla S_3 della Ξ dovuta al fascio (k), la quale ha in P un punto doppio.

Tutte le superficie S_3 della Ξ contengono la C_7, (**) sicchè le coniche del sistema Σ sono le basi variabili dei fasci della Ξ.

Una qualunque γ di tali coniche ha sei punti sulla C_7, i quali con O costituiscono il gruppo di sezione della C_7 col piano ω della γ, sicchè nel fascio della Ξ che ha per base la γ, le singole superficie secano ulteriormente il piano ω di γ secondo i singoli raggi del fascio $(O$-$\omega)$.

2. La curva C_7 ottenuta nel § precedente, curva che d'ora in avanti sarà chiamata *linea direttrice del sistema* Σ, non ammette alcuna quatrisecante, giacchè se una tale retta esistesse, essa apparterrebbe a tutte le S_3 della Ξ, nè in questa la base variabile di un fascio risulterebbe una conica.

Ammette invece ∞^1 trisecanti costituenti una superficie per cui

---

(*) Veg. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie de Raumes, II Theil, 3ᵉ Auflage, pag. 132.

(**) Veg. Cremona, Mémoire de géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre, § 22 e 27 (Giornale di Crelle vol. 68) e i Preliminari di una teoria geometrica delle superficie. Parte seconda, n° 102 (Memorie dell'Accademia di Bologna, Serie II, vol. 7).

la C_7 è 5-pla. E siccome le superficie della Ξ passanti per un qualunque punto P di una trisecante t della C_7 contengono per intero la t, sicchè la base variabile del fascio che esse superficie formano, è costituita dalla t e di conseguenza da una seconda trisecante t' della C_7 situata nel piano $O\,t$, perciò può affermarsi che le trisecanti della C_7 si distribuiscono in coppie, in modo che le trisecanti di una coppia costituiscono una conica degenere del sistema Σ, sicchè il piano che esse determinano appartiene alla stella (O).

Si ha di più che ogni retta r della stella (O) è corda di cinque coniche degeneri di Σ, che sono le coniche degeneri situate nei piani del fascio (r) della $S_3 \equiv C_7\, r$ della Ξ, e perciò i piani delle coniche degeneri del sistema Σ inviluppano nella stella (O) un cono Δ di 5^a classe non dotato di alcun piano doppio (e perciò di genere 6) non essendovi alcun piano della (O) che contenga due coniche di Σ.

Per dedurre il grado della superficie Θ delle trisecanti della C_7, conviene notare che le coniche di Σ che si appoggiano ad una retta arbitraria r dello spazio, sono in piani della stella (O) inviluppanti un cono Γ_r di 3^a classe (dotato del piano doppio Or), giacchè di tali piani quelli che passano per una retta r' della stella (O), sono quelli che contengono le coniche di Σ situate sulla $S_3 \equiv C_7\, r'$ della Ξ e passanti per i punti di sezione di tale S_3 con la r.

Sicchè le rette della superficie Θ che si appoggiano ad una retta arbitraria r appartenendo a coniche degeneri di Σ i cui piani sono quelli comuni ai due coni inviluppi Δ e Γ_r precedentemente accennati, sono in numero di 15, e questo è l'ordine della superficie Θ.

3. La curva luogo dei punti comuni alle coppie di trisecanti delle C_7 che costituiscono le coniche degeneri del sistema Σ, è doppia per la superficie Θ di tali trisecanti; nè oltre di essa e della C_7 la Θ ammette alcun'altra linea o punto multiplo, non essendovi al di fuori della C_7 alcun punto che appartenga a due coniche degeneri di Σ.

Per dedurre l'ordine della curva doppia H ora accenata occorrono le seguenti considerazioni.

Le superficie $S_3 \equiv C_7$ della rete Ξ segano un piano arbitrario ω dello spazio secondo una rete ζ di cubiche aventi in comune i punti $P_1, \ldots P_7$, in cui ω sega la linea direttrice C_7; sicchè ogni

conica del sistema Σ, base variabile di un fascio della Ξ, dà per sezione con ω una coppia di punti che con $P_1, \ldots P_7$ costituiscono la base di un fascio della ζ e che quindi risultano coniugati in un'involuzione I_ω di ottavo ordine e di classe prima, che ha per punti fondamentali tripli i punti $P_1, \ldots P_7$.

La curva punteggiata unita della I_ω è la $C_6 \equiv (P_1 \ldots P_7)^2$ Iacobiana della ζ.

Questa curva C_6 risultando il luogo dei punti di contatto delle coniche di Σ col piano ω, contiene evidentemente i punti di sezione del piano ω con la curva H in quistione. Viceversa ogni punto comune alla C_6 ora accennata ed alla superficie Θ delle trisecanti della C_7, non situato su tale curva, trovandosi su di una conica degenere tt' di Σ tangente ad ω, coincide col punto doppio tt' di tale conica e perciò appartiene alla H ed è quindi doppio per la Θ, sicchè l'ordine della H è $\dfrac{6.15 - 7.5.2}{2} = 10.$

Il genere della H è 6 essendo essa riferita univocamente al cono Δ dei piani delle coniche degeneri di Σ.

Nell'involuzione I_ω ora considerata le coppie di punti coniugati infinitamente vicini si trovano su rette il cui inviluppo j è di 4ª classe, e di genere 3 (se ω è arbitrario,) perchè riferito con corrispondenza univoca alla curva punteggiata unita dell'involuzione. Tale inviluppo j è la traccia su ω del cono J_ω della stella (O) costituito dai piani sostegni di coniche di Σ tangenti al piano ω.

Questo è dunque un cono di quarta classe e, se ω è arbitrario, di genere 3.

I piani che esso ha in comune col cono Δ del § 2, sono quelli che contengono le coniche degeneri di Σ aventi i punti doppi nei punti $(\omega\ H_{10})$. Ciascuno di questi piani tocca perciò i due coni lungo la stessa generatrice.

E tenendo calcolo della genesi del sistema, della classe dei coni Γ_r, J_ω e dell'ordine della curva punteggiata unita della J_ω, può affermarsi che:

Indicando con i, k, λ, μ, ν, ρ i numeri delle coniche di Σ che passano per un punto, che hanno per corda una retta, che si appoggiano a due rette, che si appoggiano ad una retta e toccano un piano, che toccano due piani, che toccano un piano su di una retta assegnata, si ha:

$$i = 1; \quad k = 1; \quad \lambda = 9; \quad \mu = 12; \quad \nu = 16; \quad \rho = 6.$$

Si hanno con ciò le caratteristiche elementari delle coniche del sistema Σ.

4. Il complesso delle tangenti alle coniche di Σ è di 4° grado, giacchè le sue rette situate in un piano ω costituiscono l'inviluppo j_4 ottenuto nel paragrafo precedente e quelle che passano per un punto P costituiscono il cono di 4° ordine di vertice P circoscritto alla superficie S_3 della rete Ξ che contiene il raggio $r \equiv OP$. Questo cono contiene la tangente t in P alla conica di Σ che passa per P, e lungo tale retta tocca il piano $\tau \equiv Ot$. Esso ammette di più per raggio doppio la retta $r \equiv OP$. Ne segue che il complesso che si esamina, ha per raggi doppi le rette della stella (O).

Le trisecanti della C_7 sono anche rette doppie del complesso, perchè per un punto P di una di esse t si ha che la S_3 della Ξ che contiene il raggio OP, passa anche per la t, sicchè il cono circoscritto a tale superficie di vertice P ammette oltre OP il raggio doppio t.

In un piano ω della stella (O) l'inviluppo del complesso è costituito dal fascio $(O-\omega)$ contato due volte e dalle tangenti della conica γ di Σ di cui ω è sostegno, perciò se questa degenera nella coppia di rette t, t' segantisi in L, l'inviluppo in quistione riducesi ai due fasci $(O-\omega)$, $(L-\omega)$ da contarsi ciascuno due volte.

Si noti ancora che i raggi del complesso che passano per un punto P della C_7 costituiscono il cono di secondo grado (da contarsi due volte) che è tangente in P alla superficie della rete Ξ che ha in P un punto doppio.

Infine è agevole riconoscere che può stabilirsi una corrispondenza univoca e prospettiva fra i raggi del complesso in quistione ed i punti dello spazio. A ciò basta riguardare come corrispondenti un raggio t del complesso ed un punto T dello spazio quando il primo sia la tangente in T alla conica di Σ che passa per questo punto. In tale corrispondenza sono eccezionali i punti delle curve H_{10}, C_7; le trisecanti di quest'ultima ed i raggi della stella (O).

5 Una curva gobba C_7 di genere 5 trovasi su ∞^2 superficie di 3° ordine (*) formanti rete, i cui fasci hanno per ulte-

(*) Veg. Halphen, Sur la classification des courbes gauches algébriques. Journal de l'École polytechnique — 52° Cahier — cap. I; teor. 20.

riori linee basi coniche γ_2 appoggiate alla C_7 in sei punti e costituenti un sistema lineare doppiamente infinito.

Ora si vuol dimostrare che tale sistema è della stessa natura di quello studiato nei paragrafi precedenti, che cioè lo si può riguardare in infiniti modi come generato da una stella di piani e da una rete di quadriche proiettive fra loro.

A ciò, designando il sistema in quistione con Σ, e con Ξ la rete della S_3 che ha per base la C_7, occorre premettere i seguenti teoremi:

a) I piani delle coniche del sistema Σ costituiscono una stella di cui è centro un punto 0 della C_7 (*).

Che se γ_2, γ'_2 sono due qualsiansi coniche del sistema Σ, basi dei fasci φ, φ' della rete, ed ω, ω' sono i loro piani, il fascio φ' sega il piano ω secondo un fascio di cubiche del quale sei punti-base sono i punti d'appoggio della γ_2 alla C_7, onde gli altri tre sono su una stessa retta. Ora di questi ultimi punti due sono i punti $(\omega\,\gamma'_2)$ ed il terzo è il punto $0 \equiv (\omega\, C_7)$ non situato su γ_2; sicchè per questo punto 0 determinato completamente dal piano ω della conica γ_2 passa il piano ω' di ogni altra conica γ'_2 di Σ.

Inversamente ogni piano ω della stella (0) contiene una conica del sistema Σ, perchè un fascio arbitrario della Ξ sega il piano ω secondo un fascio di cubiche, in cui tre punti-base sono per diritto, sicchè gli altri sei che sono i punti di sezione, diversi da 0, del piano ω con la C_7, appartengono ad una conica γ, che evidentemente è base di un fascio della Ξ e perciò appartiene a Σ.

b) Le coniche del sistema Σ che appartengono ad una S_3 della rete Ξ, sono nei piani di un fascio della stella (0).

Infatti tali coniche hanno tutte per corda quell'unica retta r della superficie S_3 che ha un solo punto in comune con la C_7 (**), sicchè i loro piani costituiscono il fascio (r).

Inversamente le coniche del sistema Σ che appartengono ai piani ω di un fascio (r) della (0) sono su una superficie S_3 della rete Ξ che contiene la r.

Chè se γ_2 è una tale conica, nel fascio di S_3 che ha per

(*) Veg. la mia Nota già citata, pag. 213.

(**) Veg. STURM, Ueber die Curven auf der allgemeinen Fläche dritter Ordnung. (Math. Annalen, vol. 21, pag. 494, $n = 7,7$).

base le γ_2, C_7, ve ne è una che contiene la r, secante semplice della C_7, e che perciò contiene anche tutte le altre coniche del sistema Σ situate nei piani del fascio (r).

Vi è dunque corrispondenza univoca fra le superficie della rete Ξ ed i raggi della stella (O) in modo che una superficie della Ξ contiene il corrispondente raggio della (O).

Alle S_3 di un fascio della Ξ corrispondono i raggi di un fascio della (O) e viceversa.

c) Ogni quadrica F_2 che passi per una conica γ_2 di Σ, incontra la C_7 al di fuori della γ_2 in otto punti base di una rete di quadriche.

Infatti le superficie S_3 del fascio della Ξ che ha per base le C_7, γ_2, segano la quadrica F_2, oltre che in γ_2, secondo curve K_4 di 4^o ordine e di 1^a specie di un fascio φ, le quali hanno in comune gli otto punti in cui la C_7 sega al di fuori della γ_2 la F_2; perciò questi punti $P_1, \ldots . P_8$ sono, come si era affermato, i punti base di una rete R di quadriche.

Ogni conica del sistema Σ si trova su di una quadrica di questa rete R.

Infatti una conica arbitraria γ'_2 di Σ diversa da γ_2 (la quale già si sa che trovasi sulla quadrica F_2 della R) determina con la γ_2 una superficie $\Omega_3 \equiv C_7 \gamma_2 \gamma'_2$ della Ξ che le contiene, la quale appartenendo al fascio che ha per base le C_7, γ_2 sega la quadrica F_2 secondo una $K_4 \equiv P_1 \ldots . . P_8$ del fascio φ, appoggiata in quattro punti alla γ_2 e perciò anche alla γ'_2, che ha per corda la stessa retta o della Ω_3 (raggio della (O)) che è corda della γ. Ne segue che la K_4 e la γ'_2 appartengono ad una medesima quadrica $F_2' \equiv P_1 \ldots . . P_8$ della rete R, che è quella di cui fa parola il teorema.

Viceversa ogni quadrica F'_2 della rete R contiene una conica γ'_2 di Σ.

Infatti la quadrica F'_2 ha in comune con la F_2 una curva K_4 del fascio φ, la quale perciò appartiene ad una $\Omega_3 \equiv C_7 \gamma_2$ della Ξ. E la curva che con la K_4 forma la sezione di tale superficie Ω_3 con la F'_2 è una conica γ'_2 che ha per corda la stessa retta o della Ω_3 (raggio della (O)) che è corda della γ e che di conseguenza appartiene al sistema Σ.

Dunque le coniche di Σ appartengono una ad una alle singole quadriche della R, e perciò viene ad aversi fra la stella di piani (O) e la rete R una corrispondenza univoca Π nella quale

si corrispondono un piano della prima ed una quadrica della seconda sostegni di una medesima conica del sistema Σ.

Ora si ha che le coniche di Σ appartenenti ad una superficie Ω_3 della rete Ξ, e perciò situate nei piani di un fascio della (O), si trovano su quadriche della R formanti un fascio, e viceversa.

Infatti la quadrica F_2 della rete R che contiene una conica arbitraria γ_2 della Ω_3 del sistema Σ, sega ulteriormente la Ω_3 secondo una K_4 di prima specie che contiene i punti $P_1, \ldots. P_8$ base della R, giacchè questi punti appartengono tanto alla F_2 come alla Ω_3 essendo punti della C_7; nè tale K_4 incontra il raggio o della stella (O) situato sulla Ω_3, sicchè incontra le coniche della Ω_3 appartenenti al sistema Σ ciascuna in quattro punti, e quindi determina con ciascuna di esse la quadrica corrispondente della rete R; queste quadriche perciò appartengono al fascio che ha per base la K_4.

Viceversa se $\gamma_2, \gamma'_2, \gamma''_2 \ldots.$ sono le coniche di Σ situate sulle quadriche $F_2, F'_2, F''_2 \ldots.$ di un fascio della R, due qualunque di esse γ_2, γ'_2 appartengono ad una superficie Ω_3 della Ξ, a cui corrisponde un fascio della R che contiene le F_2, F'_2 e che perciò coincide con quello da cui si parte, sicchè anche le $\gamma'', \gamma''' \ldots$ al pari delle γ, γ' appartengono alla Ω_3 accennata.

Dalle precedenti proposizioni deriva che la corrispondenza Π già indicata che intercede fra la stella di piani (O) e la rete di quadriche R, è una proiettività, e può affermarsi che:

Il sistema delle coniche che costituiscono con una C_7 assegnata, gobba e di genere 5, le basi variabili dei fasci nella rete delle superficie di 3° ordine che ha per base la C_7, può in infiniti modi riguardarsi generato da una stella di piani e da una rete di quadriche fra loro proiettive.

Si noti ancora che ogni sistema ∞^2 di coniche dello spazio sì fatto che per un punto passi un'unica conica del sistema ed un'unica conica del sistema esista che abbia per corda una retta arbitraria dello spazio, è del tipo studiato in questa Nota.

Infatti i piani delle coniche del sistema costituiscono una stella di cui ogni fascio contiene coniche costituenti una superficie di 3° ordine, il cui assieme è una rete sì fatta che i suoi fasci hanno per basi variabili le singole coniche del sistema.

6. I gruppi base delle varie reti di quadriche generatrici del sistema Σ sono i gruppi variabili di sezione della linea direttrice C_7 con le quadriche passanti per una qualunque conica γ_2 di Σ. Ne segue che tali gruppi sono ∞^1 ed uno qualunque di esso è determinato da quattro suoi punti. Si ha dunque che:

Sopra una C_7 gobba di genere 5 si ha una involuzione fondamentale di 8° ordine e di 4ª specie, ogni gruppo della quale è base di una rete di quadriche generatrici del sistema di coniche che ha per direttrice la curva C_7.

Se nelle due varietà a quattro dimensioni V_4, V'_4 costituite dalle quadriche che passano per due coniche assegnate γ_2, γ'_2 del sistema Σ, si riguardano come corrispondenti due quadriche appartenenti ad una stessa rete generatrice di Σ, due quadriche cioè la cui curva di sezione si appoggi alla C_7 in otto punti, le due varietà risultano riferite omograficamente fra loro.

Infatti una qualunque K_4 delle curve di sezione accennate che sia dovuta alle quadriche F_2, F'_2 delle due varietà, avendo quattro punti su ciascuna delle γ_2, γ'_2 ed otto sulla C_7, appartiene per intero alla superficie S_3 della rete Ξ che contiene le γ_2, γ'_2, in modo che, quando la F_2 varia in un fascio φ della V'_4 avente per base le coniche γ_2, δ_2, la K_4 varia sulla S_3 nel fascio che ha per base i punti $P_1, \ldots P_4$ di sezione della δ_2 con la S_3 non situati su γ_2, e di conseguenza la corrispondente quadrica F_2' della V_4' varia contenendo sempre i quattro punti $P_1, \ldots P_4$ ora accennati e quindi descrive un secondo fascio φ' proiettivo al precedente avente per base una conica δ'_2 che passa per i punti $P_1, \ldots P_4$ e si appoggia in due punti alla γ'_2, in modo che alla superficie degenere dell'un fascio corrisponde la superficie degenere dell'altro.

E perciò la corrispondenza intercedente fra le V_4, V'_4 risulta proiettiva.

Ne segue che i gruppi G della C_7 basi delle reti generatrici del sistema Σ formano una varietà lineare W_4 a quattro dimensioni. Le varietà lineare ad una, a due, a tre dimensioni contenute nella precedente, sono costituite dai gruppi G situati sulle quadriche di un fascio, di una rete o di un sistema lineare triplo avente per base una conica arbitraria del sistema Σ.

In particolare costituiscono una varietà lineare ad una, a due o a tre dimensioni i gruppi G, che contengono tre punti, due punti o un punto assegnato della C_7.

E notando che fra le quadriche passanti per una conica γ di Σ quelle che contengono il punto O, degenerano nel piano α della γ ed in un piano arbitrario ω dello spazio e costituiscono una varietà lineare a tre dimensioni, in cui le varietà a due o ad una dimensione sono dovute ai piani ω di una stella o di un fascio, e di più pel fatto che una di tali quadriche degeneri $(\alpha - \omega)$ sega la C_7 ai di fuori della conica γ_2 situata in α, in 8 punti di cui uno è O e gli altri sette sono la sezione di ω con la C_7, sicchè nella rete di quadriche che ha per base questi punti, ogni superficie è costituita dal piano ω e da un piano arbitrario della stella (O), perciò si ha che:

Il gruppo di punti di sezione della C_7 con un piano arbitrario dello spazio forma assieme ad O un gruppo G della C_7. Col variare del piano si ha il completo sistema dei gruppi G che contengono il punto O. Tale sistema è una varietà lineare W_3, in cui ogni varietà lineare a due o ad una dimensione è costituita dai gruppi i cui elementi diversi da O sono nei piani di una stella o di un fascio.

In particolare nella W_3 vi è la varietà lineare W_2 formata dai gruppi costituiti dal punto O contato due volte e dalle sestuple sezioni della C_7 con le coniche di Σ.

Alla W_3 appartiene anche ogni gruppo G che contenga i tre punti di appoggio della C_7 con una qualunque sua trisecante, giacchè ogni quadrica che contiene tali punti di appoggio P_1, P_2, P_3 ed una conica arbitraria γ del sistema Σ, risulta degenere.

Però una quaterna di punti $P_4 \dots P_7$ che sia in un piano qualunque ω del fascio che ha per asse la $t \equiv P_1 P_2 P_3$, oltre che al gruppo $(OP_1 \dots P_7)$, appartiene ad ∞^1 altri gruppi G. Infatti la involuzione che si ha nel piano ω costituita dalle coppie di sezione del piano con le coniche del sistema Σ, ha i suoi tre punti fondamentali P_1, P_2, P_3 situati per diritto, e perciò gli altri suoi quattro punti fondamentali sono la base di un fascio di coniche unite nell'involuzione (*), sicchè tra queste coniche ve ne è una che si appoggia in due punti ad una conica assegnata γ di Σ e determina con la γ un fascio di quadriche che danno per sezione con la C_7 ∞^1 gruppi G aventi in comune i punti $P_1, \dots P_4$.

Escluso il caso ora esaminato, una quaterna di punti della C_7 appartiene sempre ad un solo gruppo G.

(*) BERTINI, Sopra alcune involuzioni piane, § 30.

7. Assunte ad arbitrio due reti R, R' generatrici di Σ, le corrispondenze proiettive che intercedono fra ciascuna di esse e la stella di piani (O) dànno origine ad una terza corrispondenza proiettiva Π, intercedente fra le due reti, nella quale due quadriche corrispondenti hanno in comune una conica di Σ.

Ora si vuol dimostrare che l'ulteriore sezione di due superficie corrispondenti in tale proiettività è una conica di un piano completamente determinato dalle reti assunte R, R'.

Infatti le coniche di Σ comuni alle superficie corrispondenti di due fasci φ, φ' delle R, R' appartengono ad una superficie S_3 della rete Ξ, sicchè la superficie generata da tali fasci proiettivi φ, φ' contiene la S_3 e di conseguenza anche un piano ω, sul quale si trovano le seconde coniche non appartenenti a Σ comuni alla superficie corrispondenti dei due fasci, cioè le curve basi dei due fasci hanno in comune quattro punti del piano ω e due superficie corrispondenti in essi passano per la stessa conica contenente i detti punti.

Perciò un punto qualunque P del piano ω risulta la sezione di due quadriche corrispondenti F, F' dei fasci φ, φ'. Ma di più esso trovasi sulle quadriche corrispondenti F_1, F_1' delle due reti, che hanno in comune la conica γ di Σ passante per esso, perciò risulta la sezione delle curve basi dei fasci corrispondenti (FF_1), $(F'F_1')$ delle reti R, R'; e per essere il punto P un punto arbitrario di ω, ne segue che le curve basi di ogni coppia di fasci corrispondenti delle R, R' hanno in comune quattro punti del piano ω in modo che la superficie S_4 che essi fasci generano, si spezza in una S_3 della rete Ξ e nel piano ω; questo cioè sega due superficie corrispondenti delle due reti R, R' secondo una medesima conica, ulteriore sezione (diversa da quella di Σ) delle due superficie.

Diremo ω *piano dell'omografia* delle R, R'.

Assunto ad arbitrio un piano ω dello spazio ed una rete R generatrice di Σ, considerando una quadrica arbitraria F della R che contenga la conica γ di Σ e la conica δ del piano ω, in ogni rete R' generatrice di Σ che ammette come piano di omografia con la R il piano ω, la quadrica F' corrispondente alla F deve contenere le coniche γ, δ; e viceversa ogni quadrica F' del fascio che ha per base le γ, δ appartiene ad una rete R' generatrice di Σ, il cui piano d'omografia con la R dovendo contenere la δ comune alle superficie corrispondenti F, F', coincide con ω.

Se ne deduce che:

Se due reti R, R' generatrici di Σ ammettono per piano di omografia il piano ω, i loro gruppi base G, G' trovansi nella W_4 in una medesima varietà lineare col gruppo G_0 costituita dal punto O e dai sette punti di sezione della G col piano ω; e viceversa.

8. Dalle proposizioni ottenute nei precedenti paragrafi si deducono mediante sezione con un piano i seguenti teoremi sull'involuzione piana di Geiser:

L'involuzione I_ω costituita dalle coppie di punti di un piano ω che formano la base di un fascio di cubiche con sette punti $P_1, \ldots P_7$ assegnati ad arbitrio nel piano, può in infiniti modi riguardarsi generata da un'omografia intercedente fra il sistema rigato (ω) ed una rete ρ di coniche, nel senso che ogni coppia della I_ω è la sezione di una retta r del piano con la conica corrispondente nell'omografia generatrice.

Le reti ρ sono ∞^3 in modo che in esse le curve corrispondenti ad una retta arbitraria r del piano nelle omografie generatrici della I_ω costituiscono il completo sistema delle coniche passanti per la coppia di punti HH' della I_ω situata sulla r.

Riguardando come corrispondenti nei due sistemi lineare ∞^3 di coniche che hanno per basi due coppie HH', KK' della I_ω due coniche che appartengano ad una stessa rete generatrice ρ, la corrispondenza che viene ad aversi è proiettiva.

In essa due coniche corrispondenti si segano sulla cubica unita $\gamma_3 \equiv P_1 \ldots P_7\, HH'KK'$ della I_ω che contiene le coppie HH', KK', sicchè alla conica degenere (HH', r) dell'un sistema corrisponde la conica degenere (KK', r) dell'altro sistema.

Ne segue che le ∞^3 reti ρ possono riguardarsi come elementi di una varietà lineare a tre dimensioni w_3, nella quale ogni varietà lineare a due o ad una dimensione è costituita dalle reti ρ le cui coniche passanti per una coppia arbitraria HH' della I_ω formano una rete od un fascio.

Fra le reti ρ ve ne sono ∞^2 degeneri, ciascuna costituita da coniche spezzantisi in una retta r del piano ed in una retta variabile di questo.

Tali reti degeneri, coordinate alle singole rette del piano, costituiscono una varietà w_2 lineare a due dimensioni della w_3.

Due qualunque reti ρ, ρ' generatrici della I_ω risultano riferite

omograficamente fra loro in modo che due coniche corrispondenti in esse hanno in comune una coppia di punti coniugati della I_ω ed una coppia di punti di una retta o completamente determinata con le due reti e sì fatta che la rete degenere coordinata ad essa è la rete degenere della w_3 situata nella varietà lineare ad una dimensione determinata dalle ρ, ρ'.

9. La polare o del punto O della C_7 rispetto ad una conica arbitraria ρ del sistema Σ è la sezione del piano ω della γ col piano ω' polare di O rispetto alla quadrica che in una qualunque delle reti generatrici di Σ corrisponde ad ω nell'omografia intercedente fra le (O), R.

Ora, tenendo fissa tale rete R e facendo variare la γ in Σ, il piano ω' descrive una stella (O') omografica a quella descritta dal piano ω della γ, avente per centro il punto O' reciproco ad O rispetto alla rete R, e la o descrive il sistema delle corde di una cubica gobba C_3 che passa per i punti O, O', sicchè per essere la R arbitraria fra le reti generatrici della Σ ne deriva che:

Il luogo dei punti reciproci al punto O rispetto alle reti generatrici del sistema Σ è una cubica gobba C_3 di cui ogni corda è la polare del punto O rispetto ad una conica del sistema Σ.

E siccome la quadrica polare del punto O rispetto ad una superficie S_3 della Ξ contiene la retta r della S_3 uscente da O e le polari di O rispetto alle coniche della S_3 aventi per corda la r, le quali appartengono a Σ, perciò essa coincide con la $I_2 \equiv r\,C_3$ e si ha che:

La rete delle quadriche polari del punto O rispetto alle superficie della rete Ξ ammette come linea base la cubica gobba C_3 precedentemente accennata.

In particolare la prima polare del punto O rispetto alla S_3 della rete Ξ che contiene la congiungente il punto O con un punto arbitrario P della C_3, risulta il cono che proietta tale curva dal punto P; sicchè rispetto alla superficie Ω_3 della rete Ξ che contiene la tangente t in O alla C_3, la quadrica polare del punto O è il cono che proietta da O la C_3 e quindi tale Ω_3 è la superficie della rete Ξ che ha in O un punto doppio.

E siccome ogni piano che passi per la tangente in O alla C_7, contiene una conica del sistema Σ che passa per O e che perciò

appartiene alla Ω_3 ora accennata, perciò la tangente in O alla C_7 è la tangente t in O alla C_3.

Di più nel piano ω che oscula in O la C_7, la conica γ del sistema Σ tocca in O la t, sicchè in tale piano la congiungente i due punti di sezione della C_3 diversi da O, essendo la polare di tale punto rispetto alla γ, risulta essere la t, cioè il piano ω oscula anche in O la C_3. Dunque le C_3, C_7 si osculano in O.

Le altre cinque rette della $\Omega_3 \equiv O^2 C_7$, diverse dalla t, che escono da O, sono le trisecanti $t_1, \ldots t_5$ della C_7 passanti per O.

Una qualunque t_i di tali rette che incontri oltre che in O, la C_7 nei punti P_i, P_i', trovasi su una S_3 della rete Ξ che ha in P_i, P_i' due punti doppi, e le polari del punto O rispetto alle ∞^1 coniche $\gamma \equiv P_i P_i'$ del sistema Σ passano tutte pel punto O_i che è coniugato armonicamente ad O rispetto a P_i e P_i', sicchè tale punto O_i è il punto di appoggio della t_i con la C_3. Si hanno con ciò sei punti $O, O_1, \ldots O_5$ della C_3.

Assunto ad arbitrio un punto O' della C_3 esistono ∞^3 reti generatrici del sistema Σ, rispetto alle quali i punti O ed O' sono reciproci fra loro. Le superficie di tali reti che passano per una conica arbitraria γ di Σ formano una varietà lineare, perchè rispetto ad esse il piano polare di O è il piano che passa per O' e per la polare o di O rispetto alla γ. E siccome a tale varietà appartiene quella lineare ed ∞^2 costituita dalle quadriche degeneri formate ciascuna dal piano ω della γ e da un piano arbitrario della stella (O), perciò si ha che:

Nella varietà W_4 costituita dai gruppi base G delle reti generatrici del sistema Σ, ogni varietà lineare W_3 che contenga la varietà lineare W_2 costituita dai gruppi di cui fa parte due volte il punto O, è costituita da gruppi dovuti a reti, rispetto alle quali il punto O ha per reciproco un medesimo punto O'.

10. Le coniche del sistema Σ che sono nei piani di un cono Γ della stella (O) di classe μ, costituiscono una superficie di ordine 3μ.

Infatti quelle di tali coniche che si appoggiano ad una retta r sono nei piani comuni al cono dato Γ ed al cono Γ_r costituito dai piani sostegni delle coniche di Σ appoggiate alla r, sicchè il numero di tali coniche è 3μ.

La superficie $S_{3\mu}$ che con ciò si ottiene, passa evidentemente con μ falde per la C_7 e contiene 10μ rette formanti le 5μ

coniche degeneri di Σ, i cui piani sono quelli comuni al cono Γ ed al cono Δ del § 2.

Se il cono Γ è razionale la corrispondente superficie $S_{3\mu}$ è omaloidica.

Infatti riferito il cono Γ (e perciò il sistema delle coniche della $S_{3\mu}$) ad un fascio di piani (r) con corrispondenza univoca, ed assunto un punto arbitrario O' dello spazio diverso da O e non situato sull'asse r del fascio, si proietti ogni conica della $S_{3\mu}$ sul corrispondente piano del fascio (r).

La superficie costituita dalle coniche proiezioni è una $S_{3\mu+2} \equiv k^{3\mu}$, e perciò risulta omaloidica; e siccome fra di essa e la $S_{3\mu}$ vi è corrispondenza univoca, perciò anche la $S_{3\mu}$ è omaloidica.

Se invece il cono Γ non è razionale, la corrispondente superficie non risulta omaloidica, perchè se così fosse, rappresentata su di un piano, le sue coniche avrebbero per immagini le curve di un fascio, il quale verrebbe ad essere riferito con corrispondenza univoca al cono Γ, ciò che non può essere.

Nel caso di $\mu = 2$, la superficie $S_8 \equiv r^6$ su cui si viene a rappresentare la $S_6 \equiv C_7^2$ nel modo anzidetto, ammette per rette doppie le sezioni d, d' dei due piani del cono Γ passanti per O' con i corrispondenti piani del fascio (r), contiene le 10 coppie di rette $p_1 p'_1, \dots p_{10} p'_{10}$ proiezioni delle coniche degeneri della S_6; contiene le due rette q, q' secondo cui il piano $r\,O'$ sega il cono che proietta da O' la corrispondente conica della S_6, ed ammette come punto doppio il punto O' perchè una retta uscente da questo punto sega ulteriormente la superficie S_8 solo in punti situati su coniche che sono le proiezioni di coniche della S_6 a cui essa retta si appoggia.

Sicchè rappresentando la S_8 su di un piano σ, le curve immagini delle sezioni piane della superficie risultano delle $C_8 \equiv A^6 P_1 \dots P_{10} (DD')^2 QQ'$, trovandosi i punti Q, Q' (immagini delle q, q') su di una retta o' del fascio (A) immagine del punto doppio O', sicchè le sezioni della S_8 con i piani della stella (O') [le quali su la S_8 corrispondono alle curve di sezione della S_6 con i piani della stella (O')] risultano essere delle

$$C_7 \equiv A^5 P_1 \dots P_{10} (DD')^2.$$

Ne segue che nella corrispondenza che viene ad aversi fra il piano σ e la S_6 come prodotto di quella stabilita fra il piano σ e la S_8

e di quella intercedente fra le S_6, S_8, alle sezioni della S_6 con i piani uscenti da O' corrispondono le $C_7 \equiv A^5 P_1 \ldots P_{10} (DD')^2$ precedentemente accennate e perciò il punto A risulta sul piano l'immagine di una curva razionale di 5° ordine della S_6. E pel fatto che una retta del fascio (A) è l'immagine di una conica della S_8 e perciò anche di una conica della S_6, ne deriva che le sezioni piane di quest'ultima superficie hanno per immagini delle $C_7 \equiv A^5 P_1 \ldots P_{10} (DD')^2$ su σ. Con trasformazione quadratica che abbia per base i punti A, D, D', al sistema delle predette curve viene a sostituirsi il sistema delle $C_5 \equiv Q^3 P_1 \ldots P_{10}$ e si ottiene la rappresentazione più semplice della S_6 su di un piano.

In essa l'immagine della curva doppia C_7 è una curva $C_{13} \equiv O_7 (P_1 \ldots P_{10})^3$, come può riconoscersi notando che ogni superficie $S_3 \equiv C_7$ ha in comune con la S_6 due coniche.

Il punto A ed ogni curva $C_\mu \equiv A^{\mu-1} P_1 \ldots P_{2\mu}$, per $\mu = 1, 2, \ldots 5$, rappresenta una cubica razionale γ della S_6 appoggiata in 7 punti alla C_7 ed in un punto ad ogni conica della superficie.

Tali cubiche γ, il cui numero è 512, sono gobbe, perchè ogni cubica piana che si appoggia in 7 punti alla C_7 risultando unita nell'involuzione I_ω che le coniche del sistema Σ determinano sul piano in cui trovasi, appartiene ad una S_3 della rete Ξ e le coniche del sistema Σ che si appoggiano ad essa (ciascuna in due punti) sono nei fasci di un piano.

Si noti ancora che ogni superficie di 6° ordine che abbia per linea doppia una C_7 di genere 5 è della specie studiata, perchè ogni conica del sistema Σ avente per direttrice la C_7, che passi per un punto della superficie, appartiene per intero a questa, avendo in comune con essa, oltre il punto considerato, i sei punti di appoggio con la C_7. È perciò che la superficie contiene ∞^1 coniche del sistema Σ anzidetto situate necessariamente nei piani di un cono di 2° grado.

Con metodo analogo a quello tenuto per la superficie S_6 di cui si è fatto ora cenno, si giunge alla rappresentazione su di un piano di una qualunque superficie razionale costituita da coniche del sistema Σ.

Per determinare una sì fatta superficie si può anche partire da una sua curva direttrice, da una curva cioè (razionale) a cui si appoggino le coniche della superficie ciascuna in un punto.

In generale le coniche di Σ appoggiate ad una curva C'_{μ} avente in comune con la C_7 ν punti, non tenendo calcolo della S_3 della Ξ per le quali questi punti sono doppii, è di ordine $3(3\mu-\nu)$. I piani delle coniche generatrici costituiscono nella stella (O) un cono di classe $3\mu-\nu$.

11. Nel caso più generale in cui la linea direttrice C_7 del sistema Σ non si spezza e passa semplicemente pel punto O, non si può coordinare ad ogni conica del sistema Σ un solo suo punto, perchè se ciò fosse possibile, la superficie luogo di tali punti avrebbe in comune con una qualunque conica γ del sistema Σ, al di fuori della C_7, l'unico punto coordinato alla γ, ciò che è assurdo perchè i sei punti comuni a questa ed alla C_7 contano per un numero pari o nullo di punti semplici di sezione.

Ne segue che nell'ipotesi anzidetta non esiste alcuna corrispondenza birazionale tra due sistemi dello spazio nella quale le coniche del sistema Σ abbiano per corrispondenti le rette di una stella, perchè se tale corrispondenza esistesse ad un piano del secondo sistema corrisponderebbe nel primo una superficie che avrebbe in comune, al di fuori della C_7, un punto con ogni conica del sistema Σ.

Esistono invece corrispondenze birazionali dello spazio nelle quali si corrispondono fra loro due sistemi di coniche Σ.

Fra tali corrispondenze noi studieremo quelle involutorie in cui ogni conica del sistema è coniugata a se stessa.

Un qualunque J di tali corrispondenze determina su di una conica arbitraria γ di Σ un'involuzione ordinaria. Ora, tre casi possono darsi: o il centro di tale involuzione qualunque sia la γ, coincide con O, o col variare della γ esso descrive in un piano ω della stella (O) una curva $C_{\mu} \equiv O^{\mu-1}$ in modo che ogni punto G di tale curva è coordinato a tutte le coniche γ che hanno per corda la retta OG; o col variare della γ in Σ il punto G descrive una superficie S_m.

1° Nell'involuzione J che si ottiene nel primo caso, ogni retta r della stella (O) è coniugata a se stessa con un'involuzione ordinaria che non ha, in generale, per elemento doppio il punto O, sicchè la J è una delle trasformazioni studiate dal De Paolis (*) ed è di 1ª classe e di 1ª specie secondo la classificazione dello stesso geometra.

(*) Alcune particolari trasformazioni involutorie nello spazio (Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Serie IV, vol. 1, pag. 735).

Le coppie di punti della J situate in un piano arbitrario ω della stella (O) costituiscono l'involuzione I_ω del § 3 di tale piano, e siccome dei suoi sette punti fondamentali $O, P_1, \ldots P_6$ gli ultimi sei si trovano su di una conica, perciò risulta di 4° grado con una curva punteggiata unita $C_4 \equiv O^2 P_1 \ldots P_6$ e con i punti fondamentali $O, P_1, \ldots P_6$ (cui corrispondono rispettivamente le $\gamma_3 \equiv O^2 P_1 \ldots P_6, r_1 \equiv O P_1, \ldots r_6 \equiv O P_6$).

Se il piano ω contiene una t_i delle cinque trisecanti $t_1 \ldots t_5$ della C_7 uscenti da O, questa viene a corrispondere ad ogni suo punto, sicchè il grado della I_ω si abbassa di 1.

Ne segue che la trasformazione J è di 4° grado, che la sua superficie punteggiata unita è una $\Omega_4 \equiv O^2 C_7 t_1 \ldots t_5$ e che in essa ai piani dello spazio corrispondono delle $\Phi_4 \equiv O^2 C_7 t_1 \ldots t_5$. Ciascuna di queste 5 rette corrisponde per intero nella J ad ogni suo punto, mentre al punto O è coniugata la Ω_3 della rete Ξ che ha in O un punto doppio (§ 9) ed alla C_7 è coniugato il cono che la proietta da O.

La superficie punteggiata unita Ω_4 della J è il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da O alle coniche del sistema Σ. Rispetto ad essa la prima polare del punto O è la $\Omega_3 \equiv O^2$ della Ξ già accennata, sicchè il cono tangente in O alle Ω_4 è il cono $\Gamma_2 \equiv t_1 \ldots t_5$ che proietta da O la cubica gobba C_3 del § 9.

E siccome rispetto a tutte le coniche del sistema Σ che hanno per corda una generatrice arbitraria di tale cono che si appoggi nel punto P alla C_3, i punti O e P sono reciproci fra loro (*) sicchè risultano i punti doppi dell'involuzione che la J determina sulla retta OP, perciò la C_3 appartiene alla superficie Ω_4. Questa contiene del pari la curva doppia H_{10} della superficie delle trisecanti della C_7.

2° Una trasformazione involutoria del 2° tipo, nella quale ogni conica del sistema Σ è coniugata a se stessa con un'involuzione il cui centro G appartiene ad una curva razionale piana $C_\mu \equiv O^{\mu-1}$ ammette come linea fondamentale doppia di 1ª specie tale curva C_μ di cui ogni punto ha per corrispondente la conica del sistema Σ che passa per esso, e come linea fondamentale 2μ-pla di 2ª specie la conica γ del sistema Σ che si trova nel piano ω della C_μ, perchè due punti arbitrarii P, P' di tale conica si pre-

(*) Infatti la quadrica polare del punto O rispetto alla S_3 della rete Ξ che contiene la retta OP, è il cono che proietta da P la C_3 (§ 9).

sentano come coniugati nella $J\mu$ volte rispetto ai centri $G_1 \ldots G_\mu$, che sono le sezioni della retta PP' con la C_μ.

Ulteriore linea fondamentale di 1ª specie della J è la C_7, ad ogni punto P della quale corrisponde la sezione (diversa dalla retta OP) del cono che proietta da P la C_μ, con la $S_3 \equiv P^2$ della rete Ξ, sicchè l'ordine di multiplicità della C_7 per la J è $2\mu+1$.

Infine nella J corrispondono per intero ciascuna ad ogni suo punto le trisecanti della C_7 appoggiate alla C_μ in punti diversi da O, il cui numero è $5(2\mu+1)$.

E siccome ogni superficie Φ che nella J sia coniugata ad un piano dello spazio, è segata da ogni conica del sistema Σ in due punti al di fuori della C_7, perciò il grado della trasformazione è $\frac{6(2\mu+1)+2}{2} = 6\mu+4$ e le Φ sono delle

$$\Phi_{6\mu+4} \equiv C_7^{2\mu+1} C_\mu^2 C_2^{2\mu} t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)}.$$

La Jacobiana delle Φ è costituita dalle:

$$J_{3(2\mu+1)} \equiv C_7^{2\mu+1} C_\mu C_2^{2\mu} t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)},$$

$$J_{9(2\mu+1)} \equiv C_7^{6\mu+2} C_\mu^6 C_2^{6\mu} (t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)})^3$$

che corrispondono rispettivamente alle C_μ, C_7.

La superficie punteggiata unita della trasformazione è una

$$U_{3\mu+4} \equiv C_7^{\mu+1} C_\mu C_2^\mu t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)} H_{10}.$$

3° Nell'involuzione J del 3° tipo nella quale ogni conica del sistema Σ è coniugata a se stessa con un'involuzione il cui centro appartiene ad una superficie S_m, le rette che congiungono le coppie di punti coniugati formano un complesso Γ costituito da ∞^2 fasci di raggi di cui ciascuno ha per sostegno un piano della stella (O) ed un punto della S_m, sicchè fra questa superficie e la stella (O) viene ad aversi una corrispondenza birazionale e prospettiva.

Viceversa ogni complesso di rette Γ costituito da fasci situati nei piani della stella (O), uno in ogni piano, ed aventi per centri i punti di una superficie S_m, determina con il sistema Σ una trasformazione J della specie che ora si esamina, in cui ogni coppia di punti coniugati appartiene ad un raggio di Γ e ad una conica di Σ.

In tale trasformazione J ad un punto arbitrario della C_7 è coniugata la curva che con la retta OP forma la sezione della

$S_3 \equiv P^2$ della Ξ con il cono di Γ che ha per vertice P, sicchè se μ è il grado del complesso Γ e di conseguenza è $\mu-1$ la multiplicità dei raggi della stella (O) in Γ, la curva in quistione è di ordine $2\mu+1$ con $\mu+1$ rami passanti per P.

Ne segue che la superficie punteggiata unita della trasformazione passa con $\mu+1$ falde per la C_7; e siccome ogni conica del sistema Σ al di fuori della C_7 ha due punti in comune con tale superficie, questa perciò risulta una $U_{3\mu+4} \equiv C_7^{\mu+1}$.

In un piano arbitrario ω dello spazio le coppie di punti non coincidenti della J sono le coppie dell'involuzione I_ω del § 3 situati su i raggi del complesso Γ, e siccome in ω le congiungenti i punti di una retta r arbitraria ai coniugati nella I_ω formano un inviluppo di 3ª classe, perciò le coppie in quistione formano una curva di ordine 3μ, la quale con la curva $u_{3\mu+4} \equiv (U_{3\mu+4}\omega)$ forma la sezione del piano ω con la superficie che gli corrisponde nella J. Questa perciò è di grado $6\mu+4$.

Nella corrispondenza birazionale e prospettiva che intercede fra i piani della stella (O) ed i punti della superficie S_m, nella quale due elementi corrispondenti sono sostegni di un fascio del complesso Γ, ai piani di un fascio (r) della (O) corrisponde una curva di ordine μ della S_m avente sulla r $\mu-1$ punti (dei quali alcuni possono coincidere in O), perchè il cono che proietta tale curva da un punto arbitrario P della r, è il cono del complesso di vertice P.

Ne segue che nella corrispondenza anzidetta ad una curva piana della S_m corrisponde nella stella (O) un cono inviluppo $G_\mu \equiv \sigma_1^{\delta_1}, \ldots \sigma_h^{\delta_h} \ldots$ (essendo $\mu^2 - \Sigma\delta^2 = m$) avendo indicato con σ_h un piano della stella (O) a cui corrisponde non un punto della S_m ma una curva C_{s_h} di ordine s_h giacente in tale piano. Perciò tutte le rette del piano σ_h sono raggi multipli secondo s_h pel complesso Γ e la conica γ_h del sistema Σ giacente nel piano σ_h è coniugata a se stessa nella J con ∞^1 involuzioni aventi i centri sulla C_{s_h} cioè la γ_h corrisponde per intero s_h volte ad ogni suo punto, e quindi è linea fondamentale $2s_h$-pla di 2ª specie per la J.

Fra le coniche del sistema Σ ve ne sono ∞^1 su le quali la J determina un'involuzione degenere, in modo che una qualunque di tali coniche corrisponde per intero al suo punto P centro dell'involuzione degenere di cui essa è sostegno.

Il luogo di tali punti P è una curva fondamentale doppia C_ν di 1ª specie, per la J. Questa curva C_ν incontra ogni conica

fondamentale γ_h nei $2s_h$ punti comuni alla γ_h ed alla curva C_{s_h} che nella S_m corrisponde al piano σ_h della γ_h, sicchè il cono costituito dai piani delle coniche di Σ coniugate ai punti della C_ν ammette come piani multipli secondo $2s_1, \ldots 2s_h \ldots$ i piani $\sigma_1 \ldots \sigma_h \ldots$

Per dedurre la classe di questo cono si noti che essendo r una retta arbitraria della stella (O) i centri delle involuzioni che la J determina sulle coniche del sistema Σ situate nei piani del fascio (r) e perciò sulla $S_3 \equiv r\, C_7$, costituiscono la curva C_μ che sulla superficie S_m corrisponde al fascio (r) della (O), sicchè i $2\mu+1$ punti in cui tale C_μ sega al di fuori della r la $S_3 \equiv C_7\, r$ sono centri di involuzioni degeneri dovute alla J sulle coniche del sistema Σ passanti per essi. Vi sono dunque $2\mu+1$ piani passanti per la r, sostegni di coniche di Σ su cui la J determina involuzioni degeneri, cioè l'inviluppo dei piani in quistione è di classe $2\mu+1$.

Ne segue che esistono $5(2\mu+1)$ coniche degeneri, ognuna delle quali è costituita da due rette t_i, t_i' che sono coniugate fra loro nella J con corrispondenza prospettiva, il cui centro P_i è situato su una di esse t_i, sicchè tale retta t_i corrisponde nella J per intero ad ogni suo punto. Nè oltre le C_7, C_ν, $\gamma_1, \ldots \gamma_h, \ldots t_1, \ldots t_{5(2\mu+1)}$ già accennate la J ammette altre linee fondamentali, sicchè in essa ai piani dello spazio sono coniugate delle

$$\Phi_{6\mu+4} \equiv C_7^{2\mu+1}\, C_\nu^2\, \gamma_1^{2s_1} \ldots \gamma_h^{2s_h}\, t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)}.$$

Due qualunque di queste superficie hanno in comune oltre le linee fondamentali una curva variabile di ordine $6\mu+4$, sicchè si ha

$$(6\mu+4)^2 - 7\,(2\mu+1)^2 - 4\nu - 8\,\Sigma s^2 - 5\,(2\mu+1) = 6\,\mu + 4$$

da cui si deduce

$$\nu = 2\,\mu^2 + \mu - 2\,\Sigma\, s^2 = 2\,m + \mu.$$

La Jacobiana delle Φ è costituita dalle

$$S_{3(2\mu+1)} \equiv C_7^{2\mu+1}\; C_\nu\, \gamma_1^{2s_1} \ldots \gamma_h^{2s_h} \ldots t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)},$$

$$S_{9(2\mu+1)} \equiv C_7^{6\mu+2}\; C_\nu^6\, \gamma_1^{6s_1} \ldots \gamma_h^{6s_h} \ldots t_1^3 \ldots t_{5(2\mu+1)}^3,$$

coniugate rispettivamente alle C_ν, C_7 e la superficie punteggiata unita è una $U_{3\mu+4} \equiv C_7^{\mu+1}\, C_r\, \gamma_1^{s_1} \ldots \gamma_h^{s_h} \ldots t_1 \ldots t_{5(2\mu+1)}$. Questa superficie contiene evidentemente anche la curva doppia H_{10} della superficie delle trisecanti della C_7, le quali a due a due si corrispondono con proiettività prospettiva nella J.

12. Se in una trasformazione involutoria X dello spazio le coppie di punti coniugati sono su i raggi di un complesso Γ costituito da ∞^2 fasci di raggi aventi per centri i punti di una superficie S_m e situati nei piani di una stella (O), la quale perciò risulta costituita da raggi $(\mu - 1)$-pli del complesso, due casi possono darsi: o le coppie di punti della X situate su un qualunque fascio $(D - \delta)$ del complesso appartengono ad una cubica C_3 passante pel centro D del fascio, o esse costituiscono una conica C_2 non passante per tale centro D. Tanto il sistema delle C_3 nel primo caso come il sistema delle C_2 nel secondo è si fatto che una sola sua linea passa per un punto arbitrario dello spazio ed una sola linea si trova in un qualunque piano della stella (O), sicchè nel secondo caso il sistema delle coniche C_2 è del tipo studiato in questa Nota, e la trasformazione involutoria X risulta essere una trasformazione J del 3° tipo studiata nel § precedente.

Nel primo caso invece il sistema Σ' delle C_3 è costituito dalle basi variabili di una rete di superficie di 4° ordine avente per base una linea di 13° ordine; nè si ha il sistema più generale di tale natura ma si presenta per esso la particolarità che fra le sue curve ed i punti P della S_m vi è una corrispondenza univoca e prospettiva. Questa particolarità determina senz'altro il sistema Σ', la S_m ed il corrispondente complesso Γ che non è quello più generale soddisfacente alla condizione già imposta di ammettere una stella di raggi $(\mu - 1)$-pli, ma ammette ulteriori particolarità.

Ne segue che in una trasformazione birazionale involutoria dello spazio le cui coppie di punti coniugati siano su i raggi di un complesso Γ_μ dotato di una stella di raggi $(\mu - 1)$-pli ma non soddisfacente ad ulteriori particolarità, risultano unite le superficie di 3° ordine di una rete avente per base una C_7 di genere 5.

Le coppie di una siffatta trasformazione J possono essere riferite con corrispondenza univoca ai punti dello spazio ordinario. Assunta infatti una cubica gobba H_3 che passi pel centro O della stella di raggi $(\mu - 1)$-pli del complesso Γ determinato dalla J, basta riguardare come corrispondente ad una coppia qualunque PP' della J quel punto P_o in cui la retta PP' sega la corda della H_3 non uscente da O situata nel piano OPP', perchè con ciò viceversa ad un punto arbitrario P_0 dello spazio situato sulla corda c_o della H_3 viene a corrispondere quell'unica coppia PP' della J che si trova nel piano Oc_o allineata con P_o.

13. Il sistema Σ di coniche studiato nei precedenti paragrafi determina una corrispondenza degna di nota fra i punti e le rette dello spazio, la quale si ottiene assumendo come corrispondente di una retta arbitraria r dello spazio il suo polo R rispetto alla conica γ di Σ che è nel piano Or. Viceversa ad un punto arbitrario R vengono a corrispondere le ∞^1 rette r polari di R rispetto alle coniche di Σ situate nei piani del fascio che ha per asse la $r' \equiv OR$, le quali rette appartengono alla quadrica polare del punto R rispetto alla $S_3 \equiv r' C_7$ e perciò costituiscono una schiera rigata ρ che ha per direttrice la r'.

Dunque la corrispondenza X in quistione intercede fra lo spazio punteggiato ed un sistema ∞^3 di schiere rigate, godente la proprietà notevolissima che una retta arbitraria dello spazio appartiene ad una sola di tali schiere.

E si ha ancora che: Se la quadrica sostegno della schiera rigata che corrisponde nella X ad un punto P passa pel punto P', viceversa la quadrica sostegno della schiera rigata che corrisponde a P' passa per P.

Infatti in tale caso i punti P, P' risultano fra loro reciproci rispetto alla conica del sistema Σ che trovasi nel piano OPP'.

Il punto O è elemento eccezionale per la corrispondenza X avendo per corrispondenti tutte le corde della cubica gobba C_3 del § 9. Di più se r' è un qualunque raggio della stella (O) e su di esso D, D' sono i due punti doppi dell'involuzione determinata dalle coniche del sistema Σ che hanno per corda la r' (punti che appartengono alla superficie Ω_4 del § 11, 1°), rispetto alle coniche accennate essi punti D, D' risultano reciproci fra loro, sicchè la schiera rigata ρ (o ρ') che corrisponde a D (o D') nella X risulta un cono quadrico di vertice D' (o D), e la cubica gobba γ_3 che con la r' forma la sezione di tali coni ρ, ρ' risulta il luogo dei poli della r' rispetto alle coniche di Σ che l'hanno per corda, risulta perciò la curva coniugata alla retta r' nella corrispondenza X, in modo che ogni altro punto della r' ha per corrispondente nella X una schiera rigata situata su di una quadrica che appartiene al fascio che ha per base le r', γ_3.

La γ_3 contiene i cinque punti della H_{10} in cui si segano a due a due le trisecanti della C_7 appoggiate alla r'. Essa incontra del pari in 5 punti la cubica C_3, perchè fra le quadriche del fascio $(r' \gamma_3)$; polari dei punti della r' rispetto alla $S_3 \equiv r' C_7$, vi è la quadrica $I_2 \equiv r' C_3$ polare di O, e su questa la r' è segante semplice della C_3 ed è corda della γ_3.

La γ_3 può anche definirsi come il luogo dei punti a cui nella X corrispondono schiere rigate contenenti il raggio r' della stella (O).

Dunque i raggi della stella (O) sono eccezionali nella corrispondenza X avendo per coniugati non dei punti ma delle curve

Sono del pari eccezionali per la X i punti della curva H_{10} del § 3.

Chè se P è un tale punto e t, t' sono le trisecanti della C_7 segantisi in esso, rispetto alla conica degenere $(t\,t')$ di Σ ogni retta r del piano $\pi \equiv t\,t'$ ha per polo il punto P, il quale perciò corrisponde alla r nella X, mentre rispetto alle altre coniche del sistema Σ che hanno per corda la $r' \equiv OP$, le polari di P costituiscono un fascio che ha il centro sulla r' e si trova nel piano π' che con π forma la quadrica polare di P rispetto alla $S_3 \equiv C_7\, r'$. Si noti ancora che se d, d' sono due rette del fascio $(P - \pi)$ separate armonicamente dalle t, t', ogni punto di una delle d, d' corrisponde all'altra nella X essendone il polo rispetto alla conica degenere $(t\,t')$ di Σ.

Perciò le rette d, d' sono anche esse eccezionali nella X. Il loro assieme essendo costituito da fasci di raggi i cui centri appartengono ad una linea H di 10^o ordine ed i piani ad un inviluppo conico Δ di 5^a classe, costituiscono una congruenza $\Gamma_{5,10}$ di 5^o ordine e di 10^a classe.

Infine la C_7 presenta questo di particolare nella X che ogni suo punto è vertice del cono corrispondente.

Noteremo in ultimo che le curve γ_3 coniugate nella X ai raggi r' della stella (O) sono le basi variabili dei fasci di una rete di superficie omaloidiche di 5^o ordine, aventi in comune le curve C_3, H_{10}, la prima doppia e la seconda semplice.

Infatti la cubica γ_3 coniugata nella X ad un raggio arbitrario r' della (O) forma con tale raggio la sezione delle quadriche $I_2 \equiv r'\, C_3$, I'_2 polari l'una di O e l'altra di un punto arbitrario O' della r', rispetto alla $S_3 \equiv r'\, C_7$. Ora quando il raggio r' descrive un fascio $(O - \omega)$ e si suppone che il punto O' varia su una retta arbitraria s di ω, la S_3 varia nel fascio che ha per base la C_7 e la conica γ di Σ situata in ω, la quadrica I_2 descrive il fascio φ che ha per base la C_3 e la polare o di O rispetto alla conica γ anzidetta, e la quadrica I'_2 descrive una varietà v di 2^o ordine, perchè per un punto arbitrario P dello spazio passano due superficie della v sostegni delle schiere rigate

coniugate nella X ai due punti in cui la quadrica sostegno della schiera coniugata a P sega la s. E la v risulta riferita proiettivamente al fascio φ in modo che la superficie generata dalle due forme si spezza nel piano ω e nella superficie Ω costituita dalle cubiche gobbe coniugate nella X ai raggi del fascio $(O-\omega)$. Quest'ultima superficie è perciò di 5° ordine, ha per linea doppia la C_3 e per linea semplice la retta o già accennata e le dieci rette della congruenza $\Gamma_{5,10}$ coniugate nella X ai dieci raggi della stessa congruenza situati nel piano ω (*). Di più la Ω contiene la curva H_{10} essendo questa incontrata in quintuple di punti variabili dalle singole cubiche generatrici della superficie. Sicchè ai piani ω di un fascio (r') corrispondono superficie Ω_5 le quali hanno in comune la C_3 doppia, la H_{10} e la γ'_3 coniugata alla r', e che perciò appartengono ad un fascio.

Di conseguenza variando il piano ω nella (O) la corrispondente superficie descrive una rete e ne segue il teorema.

14. 1° Alle rette di una stella arbitraria (P) dello spazio sono coniugati nella X i punti della quadrica I_2 che contiene la schiera rigata ρ coniugata nella X al punto P (paragrafo precedente).

Sulla I_2 si trovano, oltre la $r' \equiv OP$ e la γ_3 che le è coniugata nella X, i raggi $e'_1, \ldots e'_5$ della congruenza $\Gamma_{5,10}$ coniugati nella X alle rette $e_1, \ldots e_5$ della $\Gamma_{5,10}$ uscenti da P.

Le $e'_1, \ldots e'_5$ appartengono alla schiera ρ e la r' alla schiera rigata ρ' incidente alla ρ; e mentre i punti di una generatrice arbitraria g della ρ sono coniugati nella X ai raggi della (P) situati nel piano $\sigma \equiv r'g$, invece i punti di una retta d della schiera ρ' corrispondono nella X ai raggi della (P) formanti un cono $\Gamma_3 \equiv r'^2 e'_1 \ldots e'_5$. Infatti ogni piano π del fascio (r') contiene uno solo q di tali raggi che è la polare del punto $L \equiv d\pi$ rispetto alla conica di Σ giacente in π, e q coincide con r' nei due piani π che passano per i punti $\gamma_3 d$, come coincide rispettivamente con $e'_1, \ldots e'_5$ nei piani π che passano per i punti $de_1, \ldots de_5$.

(*) È la nota superficie studiata dal CLEBSCH (Ueber die Abbildung algebraischer Flächen insbesondere der vierten und fünften Ordnung, Math. Annalen. Bd. I) e dallo STURM (Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden-Math-Annalen-Bd. IV); ecc., ecc.

Ne segue che ai raggi di un fascio arbitrario $(P - \omega)$ della stella (P) corrispondono nella X i punti di una curva razionale C della I_2 che ha per secanti semplici i raggi della ρ e per trisecanti quelli della ρ', e che perciò risulta di 4° ordine e di 2ª specie.

Col variare del piano ω nella (P) la corrispondente curva C_4 descrive una rete omaloidica sulla I_2 avente per base i cinque punti $e_1 e'_1, \ldots e_5 e'_5$ della curva H_{10}.

2° Alle rette di un piano arbitrario ω dello spazio sono coniugati nella X i punti di una superficie omaloide di 6° ordine.

Infatti fra i punti di tale superficie Ω e i piani della stella (O) viene ad aversi una corrispondenza univoca e prospettiva riguardando come corrispondente ad un piano π della (O) il punto R della Ω coniugato nella X alla retta $r \equiv \pi\omega$. In tale corrispondenza ai piani π di un fascio (r') corrispondono i punti R di una curva di 4° ordine appoggiata in tre punti alla r, sicchè viceversa ai punti di una curva piana della Ω corrispondono i piani di un cono Γ di 4ª classe. E siccome i piani eccezionali della corrispondenza sono semplicemente i 10 piani che proiettano da O le 10 rette $e_1, \ldots . e_{10}$ della congruenza $\Gamma_{5,10}$ situati in π, ciascuno dei quali ha per corrispondente nella Ω una retta e'_i, e di conseguenza appartiene come piano semplice ad ogni cono Γ_4, perciò il numero dei piani variabili comuni a due di tali coni, che è l'ordine della Ω, risulta essere 6.

E la Ω ha in O un punto triplo, essendovi nel piano ω tre corde della cubica gobba C_3 del § 9.

La superficie $\Omega_4 \equiv O^2 t_1 \ldots t_5$ luogo dei punti aventi per coniugati nella X dei coni quadrici, sega il piano ω secondo una curva γ_4, che viene proiettata da O secondo un cono $X_4 \equiv O^1 t_1 \ldots t_5$, il quale oltre di O ha in comune con la Ω_4 una curva $H_7 \equiv O^3$ di genere tre.

Ora è agevole riconoscere che questa linea H_7 è doppia per la superficie Ω_6.

Infatti ad un punto arbitrario D della H_7 è coniugato nella X un cono quadrico avente per vertice il punto D' della γ_4 situato sul raggio OD, sicchè vi sono due rette in ω (generatrici del cono anzidetto) che hanno per coniugato nella X il punto D_1 il quale perciò è doppio per la Ω_6.

Questa perciò è la superficie di cui fa cenno il Caporali nel n° 4°, § 43 della Nota già citata (*).

La Ω contiene la curva punteggiata unita dell'involuzione I_ω del piano ω a cui è dovuta, e la curva H_{10} del paragrafo 3.

Nella corrispondenza univoca e prospettiva già accennata intercedente fra i piani della (O) e i punti della Ω_6, due elementi corrispondenti π, R sono sostegni di un fascio di rette $(R-\pi)$, i cui coniugati nella X sono i punti della $r \equiv \omega\pi$, sicchè il complesso di rette Γ_ω costituito da tali fasci (che è di 4° grado ed ha per raggi tripli i raggi della stella (O)) è quello formato dalle schiere rigate che nella X sono coniugate ai punti del piano ω.

Di tale complesso fa parte la congruenza $\Gamma_{5,10}$.

3° Col variare del piano ω in un fascio arbitrario (a) la corrispondente superficie Ω_6 descrive una varietà quadratica W, giacchè le superficie della W che passano per un punto P sono le corrispondenti dei due piani del fascio (a) che contengono i due raggi della schiera ρ coniugata a P appoggiati alla a.

Invece il complesso Γ_ω col variare di ω attorno alla a, descrive un fascio φ, perchè una retta arbitraria r dello spazio appartiene a quell'unico complesso dell'assieme dovuto al piano ω del fascio che contiene il punto R che nella X è coniugato alla retta r.

La base del fascio φ è formata dalla stella dei raggi tripli (O), dalla congruenza $\Gamma_{5,10}$ e dalla congruenza costituita dalle schiere rigate coniugate nella X ai punti della a, sicchè quest'ultima è di 2° ordine e di 6ª classe.

Siccome le quadriche sostegni delle schiere rigate che costituiscono tale congruenza $Q_{2,6}$ formano una varietà ad una dimensione e quadratica, esse perciò appartengono ad una rete, di cui due punti-base sono il punto O ed il punto A che nella X corrisponde alla a.

Gli altri sei punti-base $P_1, \ldots P_6$ hanno evidentemente per coniugate nella X sei schiere rigate $\rho_1, \ldots \rho_6$ aventi per direttrice la a, sicchè le cubiche coniugate nella X alle sei rette $OP_1, \ldots OP_6$ hanno tutte per corda la a.

(*) Veg. anche Bordiga, La superficie del 6° ordine con dieci rette, ecc. Memorie dell'Accademia dei Lincei, 1887.

Per ognuno dei punti $O, A, P_1, \ldots P_6$ passano ∞^1 raggi della $Q_{2,6}$, e già ci è noto che quelli passanti per $P_1 \ldots P_6$ costituiscono coni di 3° ordine aventi rispettivamente per raggi doppii i raggi $OP_1, \ldots OP_6$ che sono doppii per la congruenza, mentre quelli passanti per A costituiscono il fascio di raggi che ha per sostegno il piano delle rette OA, a.

E siccome fra le cubiche coniugate ai raggi di un fascio $(O - \omega)$ della stella (O) cinque ve ne sono che si appoggiano ad una retta arbitraria, sicchè viceversa fra le schiere rigate coniugate ai punti di una retta a cinque ve ne sono che contengono un raggio del fascio $(O - \omega)$, perciò il cono dei raggi della $Q_{2,6}$ che ha per vertice il punto O è di 5° ordine ed ha per raggi doppii i raggi $OP_1, \ldots OP_6$.

La $Q_{2,6}$ è perciò di 2ª specie (*).

Gli altri suoi quattro punti singolari (vertici di coni di 2° grado) sono i punti $A_1, \ldots A_4$ del piano $\omega \equiv OA\text{-}a$, in cui le quattro rette che proiettano da O i punti di sezione della a con le superficie $\Omega_4 \equiv O^2$ del § 11, 1°) segano ulteriormente tale superficie.

La superficie focale della congruenza risulta il luogo dei punti, a cui sono coniugati nella X delle schiere rigate situate su quadriche tangenti alla retta a.

Con ciò si è al caso di determinare le caratteristiche elementari delle quadriche sostegni delle schiere rigate coniugate nella X ai punti dello spazio: come può determinarsi mediante le note formole di Zeuten il grado del complesso di rette che nella X corrisponde ad una superficie assegnata o l'ordine della superficie che nella X corrisponde ad una congruenza di raggi.

15. Può succedere che la linea C_7 direttrice del sistema Σ si spezzi in due o più parti. Senza alcuna difficoltà, servendosi all'uopo della rappresentazione di una $S_3 \equiv C_7$ su di un piano, può stabilirsi nei singoli casi su quale delle linee in cui la C_7 si scinde, viene a trovarsi il punto O, e come si distribuiscono su tali linee gli otto punti base di una qualunque rete di quadriche generatrici del sistema Σ.

Ha maggiore importanza il caso in cui le superficie di 3° or-

---

(*) KUMMER, Ueber die algebraischen Strahlensystem u. s. w. Monatsberichte Ak. Berlin, 1866, § 12.

dine, che formano la rete che ha per base la C_7, sono dotate di un punto doppio, il quale allora risulta il centro O della stella di piani generatrice del sistema Σ ed è uno dei punti base di ogni rete di quadriche generatrici di Σ, sicchè trovasi su ogni conica di Σ ed è triplo per la linea direttrice C_7 del sistema la quale risulta di genere 3, ed ha in comune, oltre di O, quattro punti con ogni conica Σ.

In tale caso può stabilirsi una trasformazione birazionale dello spazio nella quale al sistema Σ corrisponde una stella (O') di rette.

Stabilita infatti una corrispondenza birazionale nulla χ fra i piani ed i raggi della stella (O) (*), si consideri per ogni conica γ del sistema Σ il suo punto di sezione G, diverso da O, con il raggio o della (O) che nella χ corrisponde al piano ω della γ. La superficie Φ luogo dei punti G risulta un monoide di vertice O, che passa semplicemente per la C_7; e siccome col variare di o in un piano π della (O), il piano ω descrive un cono quadrico tangente al piano π, e la conica γ una superficie di 6° ordine che ha in comune col piano π, oltre ad una conica γ, la linea di sezione col monoide Φ, perciò questo risulta di 4° ordine.

I tre raggi fondamentali della χ sono rette semplici della Φ non appoggiati alla C_7; invece le altre nove rette della superficie uscenti da O incontrano ciascuna in un punto la C_7.

Ora si consideri nella stella (O) il sistema delle reciprocità birazionali nulle χ nelle quali ad un fascio di raggi assegnati $(O—\pi)$ corrisponde un cono inviluppo assegnato Γ_2 della (O) tangente a π.

Tale sistema è lineare ed ∞^3 e due qualunque sue corrispondenze hanno un'unica coppia di elementi corrispondenti in comune (**), sicchè gli ∞^3 monoidi Φ dovuti a tali corrispondenze

(*) Veg. STURM, Ueber die reciproken und mitihn zusammenhängenden Verwandtschaften (Math. Annalen, Bd. 19, pag. 474).

(**) Infatti una reciprocità birazionale nulla in una stella è completamente determinata da sette coppie di elementi corrispondenti affatto arbitrarie.

Ora l'assegnare di un piano π il corrispondente cono Γ_2 tangente a π lungo la retta p, significa assegnare le quattro coppie $p\pi$, $p_1\pi_1$, $p_2\pi_2$, $p_3\pi_3$, avendo indicato con π_1, π_2, π_3 tre piani arbitrarii del fascio (p) e con p_1, p_2, p_3, le loro sezioni diverse da p con il cono Γ_2, sicchè le reciprocità nulle in cui π e Γ si corrispondono, formano una varietà lineare ∞^3.

Due qualunque χ, χ' di esse hanno ∞^1 coppie in comune i cui elementi costituiscono un cono di raggi di 3° ordine, che si spezza nel piano π ed in

formano un sistema lineare omaloidico V avente per base la $C_7 \equiv O^3$, ed una $C_4 \equiv O^3$ situata nel piano π (*).

Il sistema omaloidico W connesso al precedente sistema è costituito da superficie $\Psi_5 \equiv Q^3 H^2_3 C_9$, come può dedursi notando che la jacobiana del sistema delle Φ_5 è costituita dal piano $\pi \equiv C_4$ contato due volte, dalla $I_6 \equiv C_7^2 C_4$ luogo delle coniche di Σ appoggiate alla C_4, e dal cono $I_4 \equiv C_7$ che proietta da O la C_7.

Da ciò segue anche che la curva fondamentale C_9 del secondo sistema è di genere 3 ed ha nel punto Q un punto quadruplo e che la curva fondamentale H_3 è gobba e passa semplicemente per Q. Le C_9, H_3 hanno oltre di Q, 10 punti in comune.

E la Jacobiana delle Ψ è costituita dalla $S_3 \equiv Q^2 H_3 C_9$, dalla $I_8 \equiv H_3{}^4 C_9$ luogo delle corde della C_9 appoggiate ad H_3, e dal cono $I_2 \equiv H_3$ che proietta la H_3 da Q, le quali superficie corrispondono rispettivamente al punto O ed alle C_7, C_4 nella corrispondenza birazionale K connessa ai due sistemi.

In questa alla rete della stella (Q) corrispondono le coniche del sistema Σ (mentre alle rette della (O) corrispondono le corde della H_3); sicchè permette di studiare le superficie costituite da coniche del sistema Σ e quelle che hanno un solo punto in comune al di fuori della C_7 con ogni conica del sistema.

---

un cono quadrico $\rho_{\chi\chi'}$, ed un cono inviluppo di 3ª classe, che spezzasi nel cono Γ_2 ed in un fascio di piani $\varphi_{\chi\chi'}$.

Ne segue che tre corrispondenze arbitrarie χ, χ', χ'' del sistema hanno un'unica coppia variabile di elementi corrispondenti in comune costituita dal raggio comune ai coni $\rho_{\chi\chi'}, \rho_{\chi\chi''}$ diverso dai tre raggi fondamentali della χ, e dal piano comune ai fasci $\varphi_{\chi\chi'}, \varphi_{\chi\chi''}$.

(*) Il monoide di V che passa per tre punti assegnati A, B, C dello spazio, è quello dovuto alla corrispondenza χ del sistema in cui ai tre raggi OA, OB, OC corrispondono rispettivamente i piani delle coniche di Σ passanti per A, B, C.

Sulla resistenza elettrica delle leghe facilmente fusibili allo stato liquido;

Nota del Dott. Prof. CARLO CATTANEO

Nello scorso anno (*) ho studiato la dilatazione termica delle leghe di Wood, Lipowitz, Darcet e Rose, ad elevata temperatura al fine di constatare se anche per esse, come per le leghe binarie (**) e per le amalgame (***) allo stato di perfetta liquidità si verifichi la legge di approssimazione che i metalli componenti vi conservano i loro rispettivi coefficienti di dilatazione e se sia sensibile la variazione di volume accompagnante la loro formazione.

Ora ho eseguito una serie di ricerche sulla resistenza elettrica di tali leghe, fra 250° e 350°, per stabilire poi la relazione esistente fra la resistenza specifica della mescolanza di varii metalli e quella che dessa dovrebbe avere qualora i metalli stessi conservassero in essa invariate le singole proprietà fisiche.

Della misura della resistenza elettrica delle leghe facilmente fusibili si è già occupato il Weber (****), ma per temperature non superiori ai 130° circa; per lo scopo prefissomi occorreva eseguire le dette misure a temperature vicine a quelle di fusione dei singoli metalli componenti le leghe, ed anche a temperature superiori a quella di fusione del metallo (piombo) meno fusibile.

I metalli *Bi*, *Sn*, *Pb*, *Cd* che mi hanno servito per questo studio erano stati forniti come chimicamente puri dalla casa Trommsdorff.

Le pesate vennero fatte col metodo della tara mediante una

(*) R. Accad. Fisiocritici, Siena 1890, serie IV, vol. II (Cattaneo).

(**) R. Accad. Lincei, Roma 1887, vol. III, 2° sem. — 1888, vol. IV, 1° e 2° sem. (Vicentini ed Omodei).

(***) R. Accad. Scienze di Torino, 1890, vol. XXV, marzo (Cattaneo).

(****) Annal. Phisik und Chemie, Wiedemann 1886, 27, 2 (Weber).

bilancia di precisione sensibile al decimo di milligrammo; le leghe venivano preparate in un piccolo crogiuolo di carbone di storta, tenendole coperte da vapori di paraffina, per evitare quanto meglio era possibile il contatto coll'aria. Per lo studio delle temperature φ di fusione delle singole leghe rimando al mio lavoro precedente sopra segnato (V. nota (*) pag. 3).

Il metodo adottato per le misure di resistenza elettrica è lo stesso di quello già adottato dapprima da Vicentini ed Omodei per lo studio dei metalli facilmente fusibili (*) e poi da Vicentini e Cattaneo per lo studio delle amalgame (**); è il metodo suggerito da Kohlrausch per la determinazione di piccole resistenze, indipendentemente dalle resistenze dei contatti, coll'uso del galvanometro differenziale.

Rimando quindi ai lavori sopracitati (V. note (*) e (**) pag. 4) per tutto quanto riguarda la preparazione dei tubi di resistenza, la determinazione della loro capacità di resistenza mediante mercurio, le cautele da seguirsi per il loro buon riempimento, l'apparecchio riscaldante a paraffina, la lettura e correzione delle temperature, e le misure elettriche col galvanometro differenziale a grande resistenza (bussola di Wiedemann). Aggiungo soltanto alcuni schiarimenti per quanto riguarda i calcoli.

La capacità di resistenza dei tubi (C_t) l'ho determinata alla temperatura dell'ambiente in un bagno ad acqua; siccome operai sempre a temperature comprese fra 0° e 25° la riducevo a 0° (C_0) colla conoscenza del coefficiente di temperatura del mercurio fra queste temperature (0.00087). Reciprocamente dalla conoscenza di C_0 passavo a quella di C_t (per le alte temperature a cui eseguivo le determinazioni di resistenza elettrica delle leghe) mediante gli opportuni valori del detto coefficiente alle temperature stesse. Calcolata poi in Ohm la resistenza R della lega liquida alla temperatura T del bagno a paraffina, nel tubo di nota capacità di resistenza C_T, allora $\frac{R}{C_T}$ mi dava la resistenza specifica ρ della lega liquida a T riferita a quella del mercurio alla stessa temperatura, presa come unità. Colla formula

$$R_t = R_0 (1 + kt) \qquad \ldots (1)$$

(*) R. Accad. Fisiocritici, Siena 1890, serie V, vol. II (Vicentini ed Omodei).
(**) R. Accad. Lincei, 1892 (Vicentini e Cattaneo).

calcolavo poi, mediante la conoscenza dei valori di R e di ρ, rispettivamente i coefficienti di temperatura k (di resistenza) e k' (di resistenza specifica).

Per tutti i calcoli successivi ho tracciato poi le curve dei valori di R e di ρ per ogni lega.

Ho calcolato anche la resistenza specifica ρ_c che teoricamente ogni lega liquida dovrebbe avere qualora i metalli componenti conservassero in essa immutate le singole proprietà fisiche.

Per le leghe binarie (*) e per le amalgame (Vedi nota (**) pag. 4) il valore di ρ_c veniva desunto dalla formula

$$\rho_c = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 V_2 + \rho_2 V_1} (V_1 + V_2) \qquad \ldots (2)$$

nella quale $V_1 \rho_1$ e $V_2 \rho_2$ rappresentano rispettivamente volume e resistenza specifica dei due metalli componenti alla temperatura che si considera. Per il caso mio la formula adottata è la seguente:

$$\rho_c = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{\frac{V_1}{\rho_1} + \frac{V_2}{\rho_2} + \frac{V_3}{\rho_3} + \frac{V_4}{\rho_4}} \qquad \ldots (3)$$

ove $V_1 \rho_1$, $V_2 \rho_2$, $V_3 \rho_3$, $V_4 \rho_4$ indicano rispettivamente volume e resistenza specifica, alla stessa temperatura, dei metalli Bismuto, Stagno, Piombo e Cadmio; e ρ_c indica la resistenza specifica della mescolanza.

I valori dei singoli volumi alle varie temperature sono stati determinati in base alla conoscenza della composizione centesimale delle leghe e delle densità dei componenti; queste densità poi vennero a loro volta determinate in base ai valori normali trovati da Vicentini ed Omodei nel loro studio sulla dilatazione dei metalli allo stato liquido (**); così pure le resistenze specifiche dei metalli componenti si determinarono servendosi dei dati normali ottenuti dagli stessi sperimentatori nel loro studio sulla resistenza dei metalli (V. nota (*) pag. 4). Naturalmente per tali determinazioni teoriche si suppone che i metalli componenti, ancor quando si trovano nella lega liquida sciolti a temperatura inferiore a

(*) R. Accad. Lincei, vol. VII, fascicolo 7, 1891 (Vicentini).
(**) R. Accad. Scienze di Torino, 1887, vol. XXIII (Vicentini ed Omodei).

quella della loro fusione, seguano le stesse leggi di dilatazione e di resistenza elettrica che si sono trovate al disopra del loro vero punto di fusione quando vennero studiati isolatamente.

Ho calcolato infine i valori di λ e μ

$$\lambda = \frac{\rho_c - \rho}{\rho_c} \qquad \ldots(4)$$

coefficiente di variazione della resistenza specifica per effetto della mescolanza dei metalli;

$$\mu = \frac{Vc - V}{Vc} \qquad \ldots(5)$$

od anche

$$\mu = \frac{D - Dc}{D} \qquad \ldots(6)$$

coefficiente di contrazione che accompagna la formazione delle leghe; tale calcolo si eseguisce facilmente in base ai dati da me già ottenuti nello studio della dilatazione termica delle leghe ora in esame. I valori di D_c vengono dati dalla formula

$$Dc = \frac{100}{\frac{P_1}{D_1} + \frac{P_2}{D_2} + \frac{P_3}{D_3} + \frac{P_4}{D_4}} \qquad \ldots(7)$$

ove P_1 P_2 P_3 P_4 e D_1 D_2 D_3 D_4 sono rispettivamente le quantità percentuali in peso dei componenti la lega e le densità di questi alla temperatura per cui si vuol calcolare la D_c.

Segue ora la spiegazione delle tavole:

La *prima* dà la composizione atomica e centesimale e la temperatura di fusione delle quattro leghe.

Nella *seconda* T ed R hanno significati già noti; così pure k e K: k è determinato fra 250° e 350°, K fra la temperatura di fusione delle leghe e 350°.

Nella *terza* pure T, ρ, k' e K' hanno significati noti; k' è determinato come sopra e così K'.

I valori di T e di ρ sono le medie delle due serie di determinazioni concordanti, fatte separatamente per ogni lega, con due tubi di diversa capacità di resistenza.

La *quarta* contiene i valori delle densità D e delle resistenze specifiche ρ dei quattro metalli componenti, valori adoperati per

il calcolo delle ρ_c colla formula (3); α e k' sono rispettivamente il coefficiente di dilatazione e quello di temperatura (della resistenza specifica) dei detti metalli liquidi, che hanno servito a determinare D e ρ alle varie temperature.

La *quinta* contiene i valori delle D e D_c determinate rispettivamente, per le quattro leghe, coll'esperienza o mediante il calcolo della formula (7), vedi il mio lavoro già segnato (V, nota (*) p. 3).

Questa tabella mi ha servito per ottenere i valori di μ.

Nelle tabelle *sesta*, *settima*, *ottava* e *nona*, λ e μ hanno significati già noti; k', e k'_c sono rispettivamente i valori del coefficiente di temperatura della resistenza specifica, fra 250° e 350°, e dati dalle ρ sperimentali e dalle ρ_c teoriche.

Tavola 1.

Lega Wood	**Lega Lipowitz**
$Bi_4\ Sn_2\ Pb\ Cd_2$ $Bi = 55.74$ $Sn = 13.73$ $Pb = 13.73$ $Cd = 16.80$ 100.00 $\varphi = 69°.8$	$Bi_{11}\ Sn_5\ Pb_4\ Cd_4$ $Bi = 49.98$ $Sn = 12.76$ $Pb = 26.88$ $Cd = 10.38$ 100.00 $\varphi = 67°.5$
Lega Darcet	**Lega Rose**
$Bi_{13}\ Sn_{10}\ Pb_8$ $Bi = 49.05$ $Sn = 21.20$ $Pb = 29.75$ 100.00 $\varphi = 94°.2$	$Bi_7\ Sn_6\ Pb_4$ $Bi = 48.90$ $Sn = 23.55$ $Pb = 27.55$ 100.00 $\varphi = 94°.3$

Tavola 2

Lega Wood				Lega Lipowitz				Lega Darcet				Lega Rose			
$C_0 = 0.1841$		$C_0 = 0.0937$		$C_0 = 0.1701$		$C_0 = 0.0937$		$C_0 = 0.1701$		$C_0 = 0.0937$		$C_0 = 0.0937$		$C_0 = 0.1701$	
Primo tubo		Secondo tubo		Primo tubo		Secondo tubo		Primo tubo		Secondo tubo		Primo tubo		Secondo tubo	
T	R	T	R	T	R	T	R	T	R	T	R	T	R	T	R
346°.6	0.2142	350.6	0.1093	343.9	0.1937	343.2	0.1072	344.8	0.1781	340.9	0.0983	340.6	0.0961	340.2	0.1729
315.0	0.2125	321.3	0.1079	299.3	0.1904	297.6	0.1054	297.8	0.1745	298.2	0.0969	298.4	0.0944	301.5	0.1703
294.9	0.2114	297.7	0.1070	272.8	0.1885	275.4	0.1045	274.2	0.1723	277.2	0.0956	277.6	0.0934	279.1	0.1687
258.1	0.2090	260.9	0.1056	253.5	0.1872	258.5	0.1039	256.2	0.1713	258.5	0.0948	255.1	0.0926	258.6	0.1678
Dedotti dalla curva				Dedotti dalla curva				Dedotti dalla curva				Dedotti dalla curva			
69°.8	0.1968	69.8	0.0960	67.5	0.1742	67.5	0.0948	94.2	0.1584	94.2	0.0869	94.3	0.0856	94.3	0.1564
250.0	0.2080	250.0	0.1046	250.0	0.1869	250.0	0.1033	250.0	0.1707	250.0	0.0942	250.0	0.0920	250.0	0.1667
350.0	0.2144	350.0	0.1089	350.0	0.1940	350.0	0.1073	350.0	0.1785	350.0	0.0987	350.0	0.0963	350.0	0.1732
Valori medii.				*Valori medii.*				*Valori medii.*				*Valori medii.*			
$K = 0.000399$				$K = 0.000434$				$K = 0.000512$				$K = 0.000454$			
$k = 0.000359$				$k = 0.000383$				$k = 0.000466$				$k = 0.000428$			

Tavola 3.

Lega Wood		**Lega Lipowitz**		**Lega Darcet**		**Lega Rose**	
T	ρ	T	ρ	T	ρ	T	ρ
348°.6	0.8096	343.5	0.7987	344 8	0 7315	340.4	0 7172
318 1	0 8314	298.4	0.8280	297.8	0 7576	299.9	0.7399
296 3	0.8473	274.1	0 8436	275.7	0.7700	278 3	0.7509
259.5	0 8742	256.0	0 8555	257.3	0.7808	256.8	0 7641
Dedotti dalla curva		Dedotti dalla curva		Dedotti dalla curva		Dedotti dalla curva	
226 5	0.8982	226 5	0.8738	226.5	0.7981	226.5	0.7805
271.0	0.8654	271.0	0.8453	271.0	0 7730	271 0	0.7549
318.0	0.8310	318.0	0.8151	318.0	0.7465	318 0	0.7279
325.0	0.8259	325.0	0 8114	325.0	0.7426	325.0	0.7234
$K' = -0.000721$		$K' = -0.000660$		$K' = -0.000651$		$K' = -0.000674$	
$k' = -0.000835$		$k' = -0.000748$		$k' = -0.000717$		$k' = -0.000748$	

Tavola 4.

Bismuto			Stagno			Piombo			Cadmio		
T	D_1	ρ_1	T	D_2	ρ_2	T	D_3	ρ_3	T	D_4	ρ_4
226°.5	10 057	1.063	226.5	6.988	0 404	226 5	10.780	0.767	226.5	8.113	0 280
271.0	10.004	1.032	271.0	6.952	0.394	271.0	10.719	0.746	271.0	8.053	0 268
318.0	9 948	0 999	318.0	6.916	0.384	318.0	10.654	0.724	318.0	7.989	0 256
325.0	9.939	0.994	325.0	6.910	0 382	325 0	10.645	0.720	325.0	7 979	0.254
$\alpha = 0.000120$ $k' = -0\ 00067$			$\alpha = 0\ 000114$ $k' = -0.00054$			$\alpha = 0.000129$ $k' = -0.00065$			$\alpha = 0.000170$ $k' = -0.00104$		

Tavola 5.

Lega Wood			Lega Lipowitz			Lega Darcet			Lega Rose		
T	D	D_c	T	D	D_c	T	D	D_c	T	D	D_c
226.5	9.136	9.217	226.5	9.387	9.463	226.5	9.397	9.373	226.5	9.248	9.270
271.0	9.080	9.163	271.0	9.333	9.409	271.0	9.345	9.323	271.0	9.192	9 221
318.0	9.020	9.108	318.0	9.275	9.353	318 0	9.296	9.270	318.0	9.134	9.170
325.0	9 010	9.100	325.0	9.269	9.346	325 0	9.278	9.263	325.0	9.130	9.162

Tavola 6.

Lega di Wood

T	ρ	ρ_c	$\rho_c - \rho$	ρ/ρ_c	λ	μ	λ/μ
226°.5	0.8982	0.5672	−0.3310	1.583	−0.583	−0.00886	65.8
271.0	0.8654	0.5481	−0.3173	1.579	−0.579	−0.00914	63 3
318.0	0.8310	0.5285	−0.3025	1.572	−0.572	−0.00975	58.6
325 0	0.8259	0.5252	−0.3007	1 572	−0.572	−0.00998	57.8
250.0	0.8810	0.5575	—	—	—	—	—
350.0	0 8074	0.5144	—	—	—	—	—

(fra 250° e 350°) $k' = -0.000835$ $k'_c = -0.000773$ $k'/k'_c = 1.080$

Tavola 7.

Lega di Lipowitz

T	ρ	ρ_c	$\rho_c - \rho$	ρ/ρ_c	λ	μ	λ/μ
226°.5	0.8738	0 6212	−0.2526	1.406	−0.406	−0.00808	50.2
271.0	0 8453	0.6015	−0.2438	1.405	−0.405	−0.00814	49.7
318.0	0.8151	0.5813	−0.2338	1.402	−0.402	−0.00841	47.8
325.0	0.8114	0.5778	−0.2336	1.404	−0.404	−0.00831	48.6
250.0	0 8587	0 6112	—	—	—	—	—
350.0	0.7944	0 5668	—	—	—	—	—

(fra 250° e 350°) $k' = -0.000748$ $k'_c = -0.000726$ $k'/k'_c = 1.030$

Tavola 8.

Lega Darcet							
T	ρ	ρ_c	$\rho_c - \rho$	ρ/ρ_c	λ	μ	λ/μ
226°.5	0.7981	0.6799	—0.1182	1.174	—0.174	+0 00255	—68.2
271.0	0.7730	0.6618	—0.1112	1.168	—0.168	+0.00235	—71.5
318.0	0.7465	0.6431	—0.1034	1.161	—0 161	+0.00279	—57.7
325.0	0 7426	0.6398	—0.1028	1.161	—0.161	+0 00161	—100.0
250.0	0.7848	0 6704	—	—	—	—	—
350.0	0 7285	0.6292	—	—	—	—	—
(fra 250° e 350°)		$k' = -0.000717$		$k'_c = -0\ 000614$		$k'/k'_c = 1.167$	

Tavola 9.

Lega Rose							
T	ρ	ρ_c	$\rho_c - \rho$	ρ/ρ_c	λ	μ	λ/μ
226°.5	0.7805	0 6640	—0.1165	1.175	—0.175	—0.00237	73.8
271.0	0.7549	0.6463	—0.1086	1.168	—0 168	—0.00315	53.3
318.0	0.7279	0.6282	—0.0997	1.158	—0 158	—0.00394	40.1
325.0	0.7234	0 6250	—0.0984	1.157	—0.157	—0.00350	44.8
250.0	0.7669	0.6548	—	—	—	—	—
350.0	0.7095	0.6151	—	—	—	—	—
(fra 250° e 350°)		$k' = -0.000748$		$k'_c = -0.000606$		$k'/k'_c = 1.234$	

Prima di venire alla discussione dei risultati ottenuti credo opportuno mostrare come i miei dati sperimentali corrispondono bene a quelli che il Weber ha ottenuto colle sue determinazioni; i numeri registrati nelle tabelle del suo lavoro segnati col simbolo *s* rappresentano le resisteaze riferite al mercurio a 0°; per cui, per renderli paragonabili ai miei li ho ridotti riferendoli al mercurio alla temperatura stessa a cui dal Weber fu determinata la resistenza elettrica delle singole leghe. Cito come esempio i valori ottenuti per le temperature massime a cui il Weber sperimentò. Mancano i dati relativi alla Darcet poichè tale lega non venne studiata da quest'ultimo sperimentatore.

LEGA	Valore dato dal Weber *s*		Valore ridotto	Valore trovato nel presente studio	Differenze
Wood	$t = 122°.8$	1 173	1.046	0.980	0.066
Lipowitz	$t = 124.1$	1.049	0 934	0.942	0.008
Rose	$t = 129.8$	0.981	0 869	0.837	0.032

I valori miei furono determinati prolungando la curva delle ρ, misurate sperimentalmente fra 220° e 350°, sino alle ascisse corrispondenti alle temperature di circa 120° sopra segnate; per cui le piccole differenze notate potrebbero anche attribuirsi al fatto che realmente le leghe non seguano, per la loro resistenza elettrica, fra 100° e 200°, quella stessa legge che ho trovato fra 250° e 350°.

Quanto ai risultati ottenuti, dando uno sguardo alle tabelle 2, 3, 6, 7, 8, 9, si può facilmente venire alle seguenti conclusioni:

1° Entro i limiti di temperatura fra cui le singole leghe furono studiate, la curva tanto della resistenza elettrica quanto della resistenza specifica si confonde con una linea retta e quindi la variazione di resistenza si può per esse ritenere regolare.

2° La lega di Wood presenta, per la resistenza specifica, valori maggiori che la Lipowitz e la Darcet; quella di Rose i valori più piccoli.

3° I coefficienti k di temperatura della resistenza sono positivi, negativi invece quelli k' della resistenza specifica; i primi sono in valore assoluto minori dei secondi.

4° I valori calcolati per le resistenze specifiche e per i coefficienti di temperatura sono per tutte le leghe minori dei valori sperimentali; quindi $\rho_c - \rho$ risulta negativo e così pure il coefficiente λ di variazione di resistenza.

5° Meno che per la lega Darcet, come già avevo constatato nel mio lavoro dello scorso anno, il coefficiente μ di contrazione delle leghe è negativo, cioè si verifica piuttosto aumento di volume che contrazione.

6° Per ogni lega le differenze $(\rho_c - \rho)$ e le λ diminuiscono coll'aumentare della temperatura; aumentano invece le μ.

7° Le variazioni di resistenza elettrica sono, per il fatto della mescolanza dei metalli componenti, molto maggiori delle variazioni di volume.

8° Per le leghe quaternarie la variazione di resistenza e la variazione di volume sono maggiori che per le leghe ternarie, come risulta dallo specchietto seguente:

In media per la	λ	μ
Wood (quaternaria)	— 0.6	— 0.009
Lipowitz (idem)	— 0.4	— 0.008
Darcet (ternaria)	— 0.2	+ 0 002
Rose (idem)	— 0.2	— 0.003

Si scorge subito che entro certi limiti la variazione di resistenza dei metalli allegati è in relazione colla variazione di volume che avviene in seguito alla loro mescolanza; però nelle leghe binarie e nelle amalgame binarie λ presenta in generale valori più piccoli di questi ora trovati per le quaternarie e ternarie.

Avuto poi riguardo alla composizione centesimale delle quattro leghe studiate potrebbe sembrare che le differenze ora citate fossero dovute specialmente alla diversa percentuale di Bismuto, che

fra i metalli componenti le mescolanze è quello che presenta la massima resistenza specifica, e per il quale variazioni anche non troppo grandi nelle percentuali delle singole leghe potrebbero importare variazioni abbastanza sensibili nella resistenza elettrica complessiva. Se, ad esempio, si considerano da una parte le percentuali di Bismuto e dall'altra i coefficienti di variazione della resistenza elettrica successivamente nella Wood ($p = 55.7$ $\lambda = -0.6$), nella Lipowitz ($p = 49.9$ $\lambda = -0.4$), nella Darcet ($p = 49.0$ $\lambda = -0.2$), e nella Rose ($p = 48.9$ $\lambda = -0.2$) si potrebbe forse trovare in questi numeri una giustificazione dell'ipotesi sopracitata. Probabilmente però il fenomeno sarà più complesso; e in ogni modo i detti numeri non escludono che altre cause influiscano sulle variazioni di cui ora abbiamo parlato.

Dal Laboratorio della R. Università di Siena, marzo 1892.

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 12ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 1° Maggio 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Direttore della Classe, Cossa, Bruno, Berruti, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Viene letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente.

In nome dei rispettivi autori vengono presentati in dono all'Accademia:

1° dal Socio Camerano: il *Catalogue distributif des oiseaux de la Suisse, élaboré sur le catalogue questionnaire de la Commission fédérale*, 3^{me} *édition, par le Dr. V.* Fatio *et Prof. Dr. Th.* Studer. Genève, 1892; in-8°;

2° dal Socio Basso un'opera intitolata: *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft;* del Dott. Enrico Hertz, Professore di Fisica all'Università di Bonn;

3° dallo stesso Socio Basso i nnmeri compresi fra il 112 ed il 120 (vol. vii) del *Bollettino dei Musei di Zoologia e d'Anatomia Comparata*, che contengono studi dei Dottori L. Camerano, M. G. Peracca, D. Rosa, A. Griffini, E. Giglio-Tos e C. Camera.

Vengono in seguito letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i due lavori seguenti:

a) « *Sulle anomalie di sviluppo dell'Embrione umano* »; IV^{a} Comunicazione del Socio presentante Giacomini

b) « *Sulla risolvente di Malfatti* »; Nota del Signor F. Giudice, presentata dal Socio Peano.

Il Socio Camerano, anche a nome del condeputato Socio Bizzozero, legge una sua Relazione sopra il lavoro del Dottore

Francesco Saverio MONTICELLI che ha per titolo: « *Studi sui Trematodi endoparassiti Monostomum cymbium* DIESING; Contribuzione allo studio dei Monostomidi ».

Sulle conclusioni favorevoli di questa Relazione, la quale sarà stampata negli *Atti*, il lavoro del Dott. MONTICELLI viene ammesso alla lettura, ed in seguito approvato, con votazione unanime, per l'inserzione nei volumi delle *Memorie*.

LETTURE

Sulle anomalie di sviluppo dell'embrione umano;

Comunicazione IV^a, del Socio Prof. C. GIACOMINI

Lo studio delle anomalie di sviluppo dell'embrione umano incomincia ad incontrare il favore degli anatomici. Diverse pubblicazioni si sono fatte in questi ultimi tempi, e tutte sono concordi nel riconoscere l'interesse grande che presenta quest'argomento. Devo qui ricordare le osservazioni di Kollmann, di Romiti, di Chiarugi, di Phisalix, di Kiebel e di His (1). Quest'ultimo autore, in principal modo, colla sua autorità e competenza dà un vivo incoraggiamento per le ricerche sopra questo campo ed indica la meta che si dovrà raggiungere.

Io spero che tutti coloro che si interessano di embriologia umana e posseggono prodotti abortivi dei primi mesi, risponderanno all'appello e renderanno di pubblica ragione le loro osservazioni, preparando così il materiale per un nuovo capitolo dell'ontogenesi umana, il quale per la sua estensione e per l'importanza teorica e pratica non sarà certo uno dei meno apprezzati.

Fermo in questa convinzione, come nelle precedenti comunicazioni fatte a questa Accademia, io continuo ad illustrare il materiale che la gentilezza dei colleghi ogni giorno mi vien somministrando.

(1) KOLLMANN, *Die Körperform menschlicher normaler und pathologischer Embryonen*, 1889.
ROMITI, *Nota su un uovo umano mostruoso*, 1890.
CHIARUGI, *Intorno ad uovo umano mostruoso*, 1891.
PHISALIX, *Contribution à la Pathologie de l'embryon humain*, 1890.
KIEBEL, *Ein menschlicher Embryom scheinber bläschenförmiger Allantois*, 1891.
HIS, *Offene Fragen der pathologischen Embriologie*, 1891.

Oss. VI.

L'osservazione che segue è pressochè della stessa natura di quelle segnate ai N. II. III delle precedenti memorie; solo l'atrofia dell'embrione è spinta ad un grado estremo e stabilisce come un ponte di passaggio a quelle formazioni nelle quali l'embrione è completamente scomparso. Sopra di queste ritornerò in una prossima comunicazione, intanto dopo aver descritto questa nuova forma abortiva, farò uno studio comparativo tra quanto venne osservato nella specie nostra ed i prodotti che io ho ottenuto per mezzo dell'esperimento nel coniglio.

Nelle ore mattutine del 3 aprile 1890 il dott. Canton mi portava al laboratorio un aborto completo che era avvenuto nella notte precedente (numero della raccolta XLII). Esso risultava delle due caduche, diretta e riflessa fra le quali esisteva uno spazio abbastanza grande.

L'aborto aveva la figura piriforme con collo molto allungato. La parte ristretta era formata dalla caduca diretta che si era impegnata e modellata sul collo uterino, e conteneva nel suo interno grumi di sangue; la parte più grossa che corrispondeva perciò al corpo dell'utero era formata dall'ovolo, il quale solo per metà della sua estensione era rivestito ancora dalla caduca riflessa od ovulare sottile, che fu facile distaccare dal chorion e così si ebbe l'ovolo affatto libero dalle membrane materne. La costituzione di queste all'esame macroscopico si dimostrava normale. Immerso l'ovolo nel liquido picro-solforico appariva di forma che si avvicinava di molto alla sferica con un diametro che oscillava da 3 a 3 1ı4 di c. m.

Tutta la superficie era rivestita da villosità coriali non molto pronunciate in altezza e numero, ad eccezione di una piccola zona di forma circolare, dove esse erano più rare e più brevi, e questo era il punto che aderiva un po' più strettamente alla caduca, la quale per la posizione rappresentava la serotina.

Il chorion era ben disteso. Aperto, si trovò l'amnios ampio, applicato alla superficie del chorion. dal quale però si isolava con gran facilità in tutta l'estensione; solo in un punto le aderenze erano strette; e questo punto corrispondeva precisamente alla località dove il chorion era più intimamente legato alla caduca.

L'amnios era sottile, trasparente, e attraverso alla sua parete poteva essere con facilità esaminato ciò che racchiudeva dentro di sè, ma non si scorgeva traccia di embrione. Trasportato il preparato in alcool diluito, il contenuto s'intorbidò. La figura 1ª rappresenta il chorion e l'amnios intatto a grandezza naturale.

Aperto il sacco amniotico non fu possibile nei primi esami di riconoscere la presenza dell'embrione; esistevano solo dei depositi granulari, che potevano essere con facilità rimossi.

Non si è che dopo aver soggiornato per un certo tempo nell'alcool, che potè essere notato un piccolissimo rilievo a forma di tubercolo sulla superficie dell'amnios, in vicinanza della località dove esso aderiva al chorion; era appena distinguibile ad occhio nudo per il suo aspetto biancastro ed opaco e dal punto ove sorgeva partiva una stria biancastra (x) che terminava là dove l'amnios era aderente al chorion. Rappresentando il tubercolo un rudimento embrionale, queste aderenze erano quindi fatte dai residui del cordone ombellicale o meglio del peduncolo addominale. La figura 2ª dimostra l'oggetto a grandezza naturale, in rapporto con l'amnios. Il suo diametro di poco supera il millimetro.

Visto con lente d'ingrandimento questo tubercoletto puntiforme si dimostrò leggermente allungato come un bastoncino, con una estremità libera e l'altra infissa perpendicolarmente sull'amnios. Appare liscio nella sua superficie, ma diviso da due superficiali solchi in tre piccole dilatazioni, la prima delle quali è la più cospicua, di forma sferica, solo in avanti presenta un sottile prolungamento che si dirige verso l'amnios. Questa estremità libera rappresenterebbe la porzione cefalica.

La 2ª dilatazione è più piccola, corrisponderebbe al tronco; l'ultima sembra involta da una sottilissima membranella trasparente che ha l'aspetto di una vescicola. Questa è quella che aderisce all'amnios. La figura 3ª rappresenta il rudimento embrionario, come si scorge con lente d'ingrandimento.

Non è possibile dare una interpretazione esatta alle particolarità sopra descritte e riferirle a parti embrionarie. Non vi ha dubbio però che per la forma, per la posizione e per i rapporti qui si tratti di resti embrionari ridotti alle minime proporzioni; ciò è dimostrato dalle sezioni miscroscopiche.

Il tratto amniotico che sosteneva questo prodotto abortivo, con i procedimenti ordinari fu sezionato trasversalmente al de-

corso della stria ombellicale; l'embrione fu perciò colpito parallelamente al. suo asse. Furono così fatte 490 sezioni.

Nelle prime sezioni comparvero tosto ben distinte le tre divisioni che si sono notate sulla superficie esterna del rudimento embrionario (fig. 4 *a*, *b*, *c*). Tutte erano ben caratteristiche. L'anteriore (*a*), la più voluminosa, risultava costituita essenzialmente da quei piccoli elementi rassomiglianti a cellule linfoidi che abbiamo descritto nelle precedenti comunicazioni; ma in mezzo ad essi comparivano degli spazi più o meno regolarmente circolari, rivestiti da epitelio cilindrico ben distinto ed in condizioni normali. Questi spazi nelle sezioni successive andavano ingrandendo, ed assumendo forme svariate, sempre però erano rivestiti dall'epitelio sopradetto, il quale per altro non appariva continuo, essendo in certi tratti mancante, ed il suo posto essendo preso dagli elementi rotondeggianti. Questa disposizione, con variazioni impossibili a descriversi, persisteva per tutta l'estensione di questa dilatazione. Per gli studi fatti, questi spazi devono essere considerati come rappresentanti della porzione cefalica del canale midollare e delle sue dipendenze. Ma un tentativo di riferire queste formazioni alle vescicole cerebrali primarie è assolutamente impossibile. Questa prima dilatazione deve essere quindi considerata come estremità cefalica.

La 2ª (*b*) dilatazione più piccola e più semplice, non presentava alcuna particolarità nella sua struttura da meritare una descrizione; constava unicamente di elementi piccoli, rotondi, con contorni non troppo regolari. Essa ben presto si fondeva con l'estremità cefalica e più oltre faceva una sporgenza nella cavità della terza divisione. Rappresentava la regione cardiaca od epatica.

Finalmente la 3ª (*c*) dilatazione assumeva la forma di una vescicola, la quale circoscriveva una cavità, contenente elementi in via di scomposizione con depositi pulverulenti. Le pareti di questa vescicola avevano pressochè egual spessore in tutti i punti ed erano costituite esternamente da cellule epiteliari ectodermiche, le quali formavano il limite esterno di tutto il rudimento embrionario, generalmente disposte in doppio o triplice strato. Anche in questo esemplare, come negli altri embrioni descritti, la lamina cornea dell'ectoderma era strettamente applicata alle parti sottostanti e costituiva un potente mezzo di difesa.

Ho fatto speciale attenzione se vi fossero proliferazioni delle cellule della lamina cornea verso il mesoderma, siccome furono descritte nell'osservazione III, ma esisteva nulla di tutto ciò.

Sotto lo strato epiteliare si trovavano gli elementi del mesoderma stipati fra loro per la formazione e l'ingrandimento della cavità centrale. Verso il lato dorsale la vescicola si continua e si confonde con le altre parti embrionali, anzi nelle sezioni successive queste formano una sporgenza conica marcata entro la cavità, ed in essa si notano accumuli cellulari di natura epiteliare. In alcuni tratti della faccia interna della parete della vescicola si osserva un rivestimento endoteliare ben manifesto.

La cavità circoscritta dalla vescicola in gran parte è vuota. Solo nella parte centrale, là dove essa assume la maggior estensione, esistono elementi di volume e forma diversa, circondati da una sostanza amorfa irregolarmente disposta. Tutte queste parti erano sospese nel liquido che doveva riempiere la cavità (fig. 5).

Continuando a studiare le sezioni poste più in basso, si vede che la parete ventrale della vescicola viene in contatto dell'amnios, e contrae con esso delle aderenze senza formare un vero peduncolo; ed allora le cellule ectodermiche della lamina cornea passano a rivestire la faccia interna dell'amnios (fig. 5).

Considerando questo modo di congiungersi del rudimento embrionario con le membrane, senza l'interposizione di un cordone o peduncolo ombellicale, io sarei indotto a credere che la vescicola sopra descritta, anzichè all'embrione, appartenga al cordone ombellicale fortemente disteso per liquido raccoltosi entro il celoma o nel tessuto mesodermico che involge le parti costitutive del cordone, siccome occorre non raramente di osservare in periodi più inoltrati nello sviluppo, producendo così una separazione tra l'embrione propriamente detto e le sue membrane. È certo che la congiunzione si fa solo per mezzo delle pareti della descritta vescicola, nello spessore delle quali non si riconosce alcun organo il quale valga a stabilire legami funzionali tra l'embrione e le sue membrane.

Intanto l'estremità caudale dell'embrione va impicciolendo sempre più, si rende indipendente e poi scompare. Anche la vescicola ri restringe e sul prolungamento di essa noi troviamo un forte inspessimento dell'amnios dove esistono residui delle formazioni primitive.

Sulla faccia esterna o coriale dell'amnios, mentre sta per cessare il rudimento embrionario e precisamente al punto op-

posto ove esso aderiva, sorge un prolungamento cilindrico mal circoscritto il quale finisce in un piccolo accumulo cellulare di forma ovoidea, che credo di poter interpretare come vescicola ombellicale fortemente atrofizzata (fig. 7, *P. O*).

Il peduncolo (*P*) che rappresenterebbe il canale vitellino è ridotto ad una sostanza amorfa leggermente tinta dal carmino, sulla superficie della quale si notano nuclei liberi. Gli elementi invece dell'accumulo cellulare sono ancora ben distinti, hanno l'aspetto epiteliare e circoscrivono una microscopica cavità (*O*).

Le sezioni successive ci rappresentano solo l'amnios ed il suo inspessimento, il quale corrisponde a quella stria biancastra che si osservava ben evidente al primo esame. Essa fu sezionata in tutta la sua lunghezza, ed in mezzo al tessuto mesodermico si osservano traccie dei vasi ombellicali disposti molto irregolarmente, tratto tratto interrotti nel loro decorso e presentantisi sotto forma di masse nucleari intensamente colorate (fig. 9, *V*). Un canale epiteliare si rendeva pure manifesto nelle sezioni inferiori per scomparire più tardi. Esso aveva la figura regolarmente circolare e l'epitelio di rivestimento era in buone condizioni di conservazione (fig. 8, *V*). Avendo già riscontrato il rappresentante del canale vitellino nella parte superiore, questo secondo canale sarebbe da riferirsi al canale allantoideo, il quale insieme ai vasi ombellicali avrebbe costituito il peduncolo addominale. E le aderenze strette che abbiamo veduto esistere tra l'amnios e chorion, erano appunto fatte dal peduncolo addominale così profondamente modificato nella sua costituzione (fig. 8, 9).

In questo modo sarebbero state riconosciute nel nostro prodotto abortivo tutte le provenienze e formazioni fetali, le quali nella loro disposizione e costituzione armonizzavano con la condizione dell'embrione.

Sottilissimo era l'*Amnios*. Fu studiato in sezioni in quella parte che corrispondeva all'embrione, ed in larghi lembi convenientemente colorati visti di fronte. La parte ectodermica formata da un unico strato aveva gli stessi caratteri del rivestimento epiteliare dell'embrione. In mezzo alla porzione mesodermica si notavano dei cospicui elementi cellulari regolarmente sferici con nucleo centrale, protoplasma reticolare e delicato. Erano sparsi su diversi punti, si trovavano anche in corrispondenza del peduncolo addominale. Non mi sono mai incontrato in simili formazioni e non posso ora dire quale significato esse abbiano.

Anche il *Chorion* presentava disposizioni speciali, La parte mesodermale era pressochè normale, ma il suo epitelio come pure quello che rivestiva tutte le villosità era poco distinto. Appariva sotto forma di un orlo fortemente colorito, nello spessore del quale erano situati nuclei. I limiti cellulari erano scomparsi e in nessun punto distinguibili. Quà e là, applicati alla superficie delle villosità, comparivano ammassi di cellule deciduali d'aspetto normale. Tanto nel chorion come nelle sue dipendenze mancavano completamente i vasi sanguigni. Le villosità erano voluminose come edematose, la sostanza fondamentale conteneva scarsissime cellule e distanti fra loro. Sembrava che lo stroma del villo fosse stato infiltrato da un liquido sieroso.

Anche le due decidue furono studiate su molteplici preparati, ma in esse non furono riscontrate particolarità le quali potessero essere messe in rapporto collo stato in cui si trovava l'embrione.

È la prima volta che io osservo le membrane d'origine fetale in condizioni non troppo normali. Forse queste parti avevano cessato di vivere pochi giorni prima della espulsione dell'ovo, mentre l'arresto dell'embrione era avvenuto in epoca molto più lontana.

Non ho potuto raccogliere dati clinici e ginecologici ad illustrazione del fatto anatomico.

Questa osservazione ci dimostra che per quanto spinta sia l'atrofia dell'embrione, noi possiamo sempre in alcuni punti di esso riconoscere delle disposizioni, le quali, resistendo al processo di distruzione ci ricordano ancora la loro provenienza e la loro natura.

Fino ad ora non fu ancora descritto un rudimento embrionario nel quale con un attento esame microscopico non fosse possibile di riconoscere alcune di quelle formazioni che segnano la primitiva comparsa dell'embrione ed in sommo grado la caratterizzano. Se tutto ciò mancasse, evidentemente non si potrebbe con certezza riferire ad un prodotto embrionario l'oggetto del nostro studio, e solo i rapporti che esso mantiene con le membrane avrebbero valore nella decisione. Quindi le forme *nodulari* di His, colla quale denominazione io chiamava quei prodotti abortivi nei quali l'esame microscopico non dimostra più traccia di organi primitivi, devono essere molto rare, e probabilmente devono avere un altro significato riguardo all'epoca in cui si

iniziò il processo. In una prossima comunicazione io descriverò una nuova osservazione, la quale può essere interpretata come un arresto di sviluppo avvenuto nei primissimi periodi, e dove è ben difficile di riconoscere il prodotto embrionario.

Il caso studiato ha molta rassomiglianza con quello recentemente descritto dal Chiarugi (loc. cit.) però questo ci rappresenta uno studio meno avanzato del processo di atrofia e forma piuttosto un tratto intermedio tra le mie osservazioni II e III e la presente. Tutto ciò è importante, non solo perchè ci dimostra l'identità del processo per mezzo del quale si originano e si producono tutte le anomalie di sviluppo dell'embrione umano, ma ancora perchè ci lascia sperare, che continuando le nostre ricerche, si potrà giungere a raccogliere tutte le gradazioni, le quali si estenderanno dalla completa scomparsa dell'embrione, fino a quei prodotti i quali, pur conservando un certo volume, sono profondamente alterati tanto nella conformazione esterna quanto nella intima costituzione. Ed in allora sarà più facile di fare una distinzione di tutte le forme anomale, distinzione la quale ci rappresenterà i diversi stadi in cui si trova il processo di atrofia e la diversa epoca in cui esso ha sorpreso l'ovolo.

Per render meglio evidente la stretta affinità che esiste fra le forme anomale dell'embrione umano fino ad ora descritte, e per cercare di risolvere alcune di quelle molteplici questioni che ho già accennato nelle precedenti comunicazioni, e che ad ogni momento si affacciano alla nostra mente, quando tentiamo di interpretare i fatti osservati, io desidero qui brevemente riferire i risultati di alcune mie esperienze fatte nel coniglio. Esse, come si vedrà, si accordano in modo perfetto con le forme abortive che si riscontrano così frequentemente nella specie nostra.

Nel coniglio possiamo veramente dire che alloraquando la gravidanza procede liberamente e non è disturbata nel suo decorso dal nostro intervento, è raro di osservare embrioni deformati; ed anche, disponendo di un grande materiale, è difficile di poter raccogliere in breve spazio di tempo una quantità di esemplari sufficiente per studi di confronto. E queste anomalie nel coniglio rappresentano generalmente stadi molto avanzati e mai ho potuto osservare forme atrofiche e nodulari. Di più queste anomalie sono piuttosto l'effetto della semplice morte dell'embrione, ed allora si riscontrano alterazioni, che malgrado la loro rasso-

miglianza, non credo di poter del tutto paragonare ai fatti osservati nella specie nostra.

Mettendo invece ad incubare alcune dozzine d'ova di pollo ed esaminandole a periodo diverso di sviluppo, riesce più facile d'incontrarci in numerose deformità. Ma anche qui le forme atrofiche e nodulari sono relativamente rare; vale a dire che è più facile di trovare nel pollo vizii di conformazione, di posizione, di rapporti in alcuni organi, in specie appartenenti al sistema nervoso centrale od al sistema vascolare; ma è meno frequente che l'arresto di sviluppo avvenga in tutto l'embrione.

Ma esperimentando nel coniglio col metodo da me proposto *(Teratogenia sperimentale nei mammiferi)* si riesce ad avere tutte le forme e gradazioni necessarie per uno studio completo. Poche sezioni basteranno a dimostrare il nostro asserto.

La figura 10 ci rappresenta un embrione di coniglio al 12° giorno di gravidanza (esperienza 31) (*A* grandezza naturale - *B* leggermente ingrandito). Esso era arrestato nel suo sviluppo. Si presenta molto più piccolo dell'ordinario, non esisteva curvatura cefalica, però erano distinte tre fessure branchiali. La parte inferiore del tronco formava un angolo sporgente ventralmente, che ricordava la disposizione descritta da His in alcuni embrioni umani. (Lg. Sch. BB. fig. 1, 2, 3 tav IX del suo atlante).

L'embrione fu disegnato e sezionato trasversalmente, involto nell'amnios il quale anche qui, come nei prodotti abortivi umani, era più ampio del normale. Quest'arresto nello sviluppo si era ottenuto legando semplicemente i corni uterini alla distanza di 5. cm. dallo sbocco delle tube, poche ore prima che fosse compiuto il 3° giorno dal coito. Nel corno di sinistra non furono riscontrate parte embrionali; in quello di destra invece sopra la legatura esisteva una vescicola con l'embrione sopra descritto. È questo uno dei pochi casi nei quali colla legatura dell'utero io sia giunto ad ottenere un certo sviluppo dell'embrione.

Se l'animale fosse stato ucciso in un periodo più precoce, anche nell'altro corno uterino, si sarebbero riscontrati residui embrionali in via di scomparire.

La legatura dell'utero oltre ad agire meccanicamente impedendo alla vescicola blastodermica di disporsi regolarmente lungo l'utero ad una determinata distanza, deve far sentire la sua azione sul circolo sanguigno, per l'interruzione che avviene in corrispondenza della legatura dei vasi del mesometrio.

Il semplice esame esterno di questo embrione già dimostra una grande rassomiglianza con le forme abortive della specie nostra, ma lo studio delle sezioni è molto più istruttivo fig. 11. Qui è caratteristica la trasformazione o sostituzione degli elementi dei diversi organi, in quelle cellule piccole, rotonde, fortemente colorite che abbiamo ripetutamente descritto. I limiti degli organi sono ancora distinguibili, possono essere seguiti e conservano i loro rapporti normali. Il sistema nervoso centrale in tutta la sua lunghezza è completamente trasformato e composto nel medesimo modo. Esso risulta costituito dai soliti elementi disposti in un sottile nastro, il quale forma inflessioni e giri i più complicati senza mai perdere la sua continuità. La fig. 11 *n* rappresenta una sezione dell'estremità cefalica dove questo fatto appare evidentissimo, malgrado il piccolo ingrandimento a cui fu disegnata.

Mancano tutte le dipendenze del canale midollare, che, all'epoca in cui è giunto il nostro embrione, dovrebbero essere ben distinte. Non esiste traccia delle vescicole oculari ed uditive, l'arresto è certo avvenuto nel momento in cui queste formazioni stavano per iniziarsi; quindi in un periodo in cui l'embrione non presentava il volume attuale, ma era più piccolo; il che vuol dire che malgrado l'arresto egli continuò ancora a crescere senza raggiungere il volume di un embrione del 12° giorno.

Se continuò a crescere, l'evoluzione sua era arrestata; gli organi non subirono più alcuna modificazione tipica, ma erano invasi da un processo regressivo che li distruggeva. Quindi se vi era una parvenza di vita, questa non era più dominata da alcun principio regolatore.

Un' altra deformità è rappresentata nella fig. 12 (esperienza 34) e fu ottenuta pungendo la vescicola blastodermica al 9° giorno di gravidanza e facendo una leggera pressione sull'ilo dell'utero ove stava sviluppandosi l'embrione. Ucciso l'animale al 13° giorno, nella maggior parte delle vescicole operate non fu trovato traccia d'embrione, esse erano molto più piccole del corrispondente periodo di sviluppo ed il contenuto andava lentamente assorbendosi. Solamente in due fu riscontrato un rudimento embrionario informe applicato sulla placenta, la quale fu distaccata dall'utero e convenientemente indurita fu sezionata insieme all'embrione.

All'esame delle sezioni gli annessi fetali si dimostrano ben costituiti. Anche l' ectoplacenta nella sua disposizione generale ed in quella parte che corrisponde all'embrione, non si allontana

dalla norma. L'embrione invece è interamente guasto, principalmente nella porzione cefalica. Nella conformazione esterna ed interna nulla si osserva che possa essere riferito alle formazioni primitive. Anche qui tutto il campo della sezione è invaso dai soliti elementi, i limiti degli organi sono quasi interamente scomparsi. Però ad un attento esame si trova che la lesione è meno avvanzata che non nell'embrione della fig. 11, malgrado che questo conservi meglio la sua forma esterna.

Nella fig. 12 si vede l'amnios completamente chiuso e mal disposto *A*. La parte prossimale della vescicola ombellicale *O* si continua con la splancnopleura; il celoma interno è ampiamente comunicante con l'esterno *C*.

Un'ultima osservazione voglio riportare, la quale presenta alcune particolarità che la distinguono dalle precedenti. Anche questo preparato fu ottenuto col mezzo della puntura delle vescicole blastodermiche dopo l' 8° giorno di gravidanza. Le vescicole che non furono operate contenevano un embrione normale nello sviluppo e conformazione. Delle operate, alcune non presentavano più traccia di embrione; due invece contenevano un rudimento informe, legato alle membrane con l'estremità caudale, libero nella porzione cefalica. Le fig. 13 e 14 dimostrano la grande rassomiglianza che esiste fra le due formazioni che hanno l'aspetto di noduli o tubercoli. La rassomiglianza è pure marcata nella interna costituzione che per brevità non descriveremo. Mi limito a riprodurre una sola sezione fatta in corrispondenza del tronco di una di esse.

La disposizione, sulla quale desidero in principal modo chiamare l'attenzione, si è il modo di presentarsi del canale midollare. Questo è ben distinguibile in tutta la sua estensione, ma è alterata solo la metà ventrale di esso; la porzione dorsale ha pressochè i caratteri di una formazione normale. La parte ventrale è completamente distrutta, e sembra che la parete si vada sgretolando dall'avanti all'indietro (fig. 15 *M*).

Non vi ha dubbio che il processo deve essere un pò diverso da quello osservato nella fig. 11. Qui contemporaneamente tutta la parete del canale midollare, tanto nella regione cefalica, come nella spinale, è trasformata in quegli elementi piccoli, rotondeggianti, che mantengono ancora stretti rapporti fra loro, per modo che si può seguire questa parete nelle sue numerose ed intricate flessuosità; nell'altro caso invece il processo si inizia in un punto e progredisce poco a poco, non abbiamo la disposizione flessuosa.

Quando tutta la parete è distrutta troviamo un ammasso di elementi alterati nella loro conformazione e costituzione che rappresentano in certo qual modo i residui dell'avvenuto disfacimento. Si potrebbe paragonare il canale midollare ad un muro di fabbrica che vien demolito per opera del tempo o del piccone, per cui non si hanno che rovine là dove poco tempo prima si aveva un formazione tipica e regolare.

Questo duplice modo di presentarsi del sistema nervoso centrale nei prodotti delle nostre esperienze, si osserva pure distinto nei rudimenti dell'embrione umano, è abbastanza caratteristico e merita d'esser notato potendo essere anche diverso il processo che produce l'una e l'altra alterazione. Quando si saranno moltiplicati gli studi sopra questo punto, potrà meglio essere chiarita la natura del processo che produce, prima la totale rovina del piccolo organismo, poi la completa sua scomparsa.

Io potrei moltiplicare queste osservazioni; ma le sopradescritte le credo sufficienti ad affermare la stretta affinità che esiste tra le forme abortive umane e quelle prodotte artificialmente negli animali: è quindi certo che studiando attentamente quest'ultime nel loro modo di prodursi, si porterà rischiarimenti alle prime.

Più che una affinità io direi che esiste una identità perfetta fra tutte le forme abortive studiate. Anche nei prodotti sperimentali le membrane continuavano a vivere. Anche qui i fenomeni che si osservano nel rudimento embrionale non erano tutti da riferirsi alla pura morte dell'embrione, molti elementi apparivano ancora in condizioni normali e viventi.

Tutto ciò dimostra che la causa meccanica per mezzo della quale noi abbiamo agito sopra le vescicole blastodermiche non uccise l'embrione, ma disturbò grandemente il suo sviluppo, sia modificando i suoi rapporti, sia alterando la sua nutrizione. La morte completa sarebbe avvenuta più tardi.

Questa idea che io aveva manifestata nelle due prime memorie, vedo che è pure accennata da His, malgrado egli cerchi una diversa interpretazione; l'His infatti nel suo ultimo lavoro scrive: — Contenendo gli embrioni abortivi cellule ancora viventi, si potrà forse considerarli come non morti. Però è evidente che la vita che in essi si trova, da quel momento non è più la loro vita propria, quando cioè lo sviluppo si arresta, ed il sistema nervoso centrale perde la sua organizzazione; chi volesse conside-

rare ancora come viventi gli embrioni abortivi, potrebbe con la stessa ragione parlare della vita di un cadavere, divenuto sede di vermi (loc. citato, pag. 25).

D'accordo che la vita che si osserva in tutte le forme abortive non sia più quella dell'embrione normale, sia nelle sue esplicazioni, sia nel suo scopo finale; io credo però che dal punto di vista dello studio di questi prodotti, si debbono distinguere gli embrioni morti, da quelli colpiti da un arresto o disturbo nello sviluppo.

Quindi una delle prime questioni a studiarsi sarà di ben determinare i caratteri macroscopici e microscopici degli embrioni morti, per vedere se le lesioni che si osservano nei diversi organi corrispondano a quelle osservate negli arresti di sviluppo. Il materiale raccolto negli animali è adattissimo per questo scopo.

Intanto ciò che risulta evidente dalle esposte osservazioni, si è che non conviene risalire troppo in alto per spiegare queste formazioni. Trovando costantemente gli annessi d'origine fetale ben sviluppati, normali nella loro costituzione e viventi, egli è d'uopo che la causa perturbatrice abbia agito dopo la loro formazione e dopo che essi si sono resi indipendenti dall'embrione. Se la causa avesse fatto sentire la sua azione prima, nell'epoca, vale a dire, in cui l'ovolo è ancora allo stato di vescicola blastodermica, essa avrebbe certamente disturbato anche la formazione degli annessi. Quando la causa agisce in questo periodo il disturbo è più grave, la distruzione dell'embrione è più rapida e non riusciremo forse mai a trovarne le traccie.

Ciò è dimostrato dai nostri sperimenti. Noi siamo riusciti ad ottenere forme abortive solo quando si operavano coniglie gravide dopo l' 8° giorno, epoca in cui la vescicola blastodermica incomincia a fissarsi all'utero per mezzo dell'ectoplacenta. In allora si può dire che le membrane sono iniziate nel loro sviluppo e rese indipendenti dall'area embrionaria, esse si sviluppano per conto proprio, anche quando l'embrione si sia arrestato. Quando infatti l'operazione veniva praticata al 7° od 8° giorno, qualunque fosse il processo adottato non si giungeva mai ad ottenere alcun risultato, la vescicola si arrestava e l'amnios ed il chorion non si svolgevano.

Questa relativa indipendenza di sviluppo che si osserva fra le diverse parti dell'ovo, forse può esistere anche per le diverse parti dello stesso embrione. Per gli animali superiori non pos-

siamo dir nulla, ma le importanti esperienze di Roux nei vertebrati inferiori (rana), le quali hanno dimostrato una certa indipendenza di sviluppo delle singole sfere di segmentazione devono essere tenute in grandissimo conto, potendo esse darci la chiave per risolvere molte questioni più complesse che abbiamo incontrato nel nostro studio.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

della Tav. V.

Fig. 1. Ovolo (n. XLII) grandezza naturale. Fu aperto il Chorion per mettere in evidenza l'Amnios.

» 2. Rudimento embrionario col tratto d'Amnios al quale aderisce. *x*, Stria biancastra che rappresenta il peduncolo addominale.

» 3. Lo stesso preparato visto con lente. Si distinguono le tre divisioni della sua superficie *a*, *b*, *c*.

» 4, 5, 6, 7, 8, 9. Sezioni del rudimento embrionario, disegnato allo stesso ingrandimento. La fig. 4 corrisponde alla sezione 46ª, e dimostra le tre divisioni e la loro costituzione. *M*, residui del canale midollare.

» 5. (Sezione 118) La vescicola *c*, raggiunge il massimo volume e comincia ad aderire all'Amnios *A*.

» 6. (Sezione 132).

» 7. (Sezione 148). L'embrione è quasi completamente scomparso. Sulla superficie esterna dell'Amnios sorge un peduncolo *P*, che mette ad un cumulo di cellule *O*, che può considerarsi come rappresentante della vescicola ombellicale.

Fig. 8. (Sezione 334). Rappresenta l'inspessimento dell'Amnios che corrisponde al peduncolo addominale; in *V* si nota il canale allantoideo.

» 9. (Sezione 409). Corrisponde alla parte terminale dell'inspessimento dell'Amnios. Qui si notano delle parti più intensamente colorite che sarebbero gli ultimi residui dei vasi ombellicali *Y*.

» 10. Embrione di coniglio - esperienza 31; *A*, grandezza naturale; *B*, leggermente ingrandito.

» 11. Sezione della porzione cefalica dello stesso embrione per dimostrare il modo di comportarsi delle vescicole cerebrali primarie. *n*. Sistema nervoso centrale profondamente alterato.

» 12. Sezione del tronco di un rudimento embrionario di coniglio. *A*. Amnios; *O*, porzione prossimale della vescicola ombellicale; *C*, Celoma (esperienza 34).

» 13. 14. Due forme abortive di coniglio ottenute sperimentalmente (esperienza 18). *E* embrione. *H* membrane.

» 15. Sezione trasversale della regione dorsale di uno dei sopradetti embrioni. Canale midollare *M*, nella sua forma ventrale è completamente distrutto.

Fig. 1
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 2
Fig. 9
Fig. 12
Fig. 15

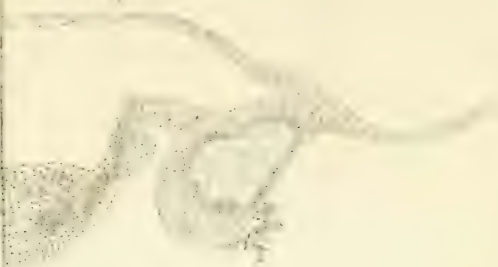
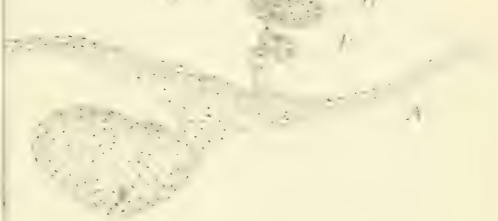
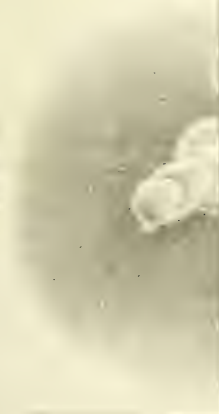
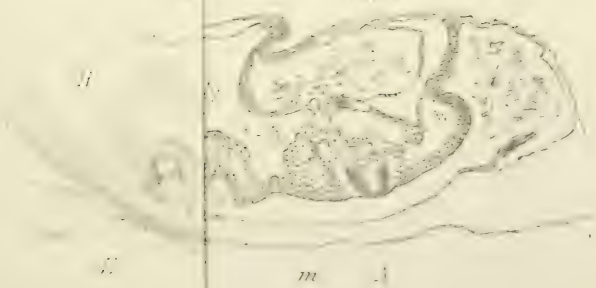



Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15

Sulla risolvente di Malfatti;

Nota del Prof. F. GIUDICE

Ricorrendo alla teoria degli invarianti, si calcolano facilmente delle speciali risolventi dell'equazione di 5° grado: però il calcolo della prima risolvente, trovata dal MALFATTI, ed in generale di quelle che non hanno per coefficenti degli invarianti è riescito molto laborioso. COCKLE ed HARLEY, essendosi proposto il calcolo d'una risolvente analoga a quella del MALFATTI, incontrarono calcoli tanto complicati che si limitarono a considerare l'equazione di 5° grado ridotta trinomia con la trasformazione di BRING; tale risolvente, per l'equazione completa, fu poi ottenuta da CAYLEY (*), con calcolo piuttosto complicato, in una Memoria intilolata: « *On a new auxiliary equation in the theory of equations of the fifth order* ». La forma precisa di questa risolvente era già stata data da JACOBI (**), come avvertì poi lo stesso CAYLEY (***), in una Memoria intitolata: « *Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes* ». I risultati a cui accennammo si sarebbero ricavati immediatamente da quelli ottenuti più di mezzo secolo prima dal MALFATTI, se i medesimi fossero stati conosciuti. Per ciò il BRIOSCHI, con cuore italiano, ritornò sulla prima risolvente calcolata per l'equazione:

$$x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 - 5cx + d = 0$$

e la ritrovò, per il caso di $b = 0$, seguendo lo stesso elegante processo d'eliminazione del MALFATTI: però il suo calcolo (****), nonostante la semplificazione introdotta col supporre nullo b, non si può ancora dire del tutto semplice. Senza discostarmi dal procedimento primitivo, io ho potuto ottenere la risolvente del

(*) V. *Collected Mathematical papers*, vol. IV, pag. 309. — Oppure: *Philosophical Transactions*, vol. CLI.

(**) *Gesammelte Werke.* Dritter Band, p. 278. — Oppure: *Crelle's Journal*, Bd. 13.

(***) *Collected...*, vol. IV, p. 324.

(****) *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. V, n. 5.

MALFATTI, per l'equazione completa, con calcolo semplice ed elementare, che ritengo conveniente far conoscere per l'importanza storica di essa risolvente.

L'eliminazione, specialmente con metodi elementari, introduce quasi sempre dei fattori estranei alle risultanti: noi avremo cura di notarne la comparsa, perchè ne riesca poi facile e naturale la soppressione.

Posto:

$$(1)\ldots\quad \begin{cases} y = ax + b \\ H = ac - b^2 \\ G = a^2d - 3abc + 2b^3 \\ L = a^2.(ae - 4bd + 3c^2) = a^2 I \\ M = a^3.(ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3) \\ \quad = HL - G^2 - 4H^3 = a^3 J \\ K = a^2.(a^2f - 5abe + 2acd + 8b^2d - 6bc^2) = a^2k \end{cases}$$

si trova:

$$(2)\ldots\quad \begin{cases} a^4.(ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f) \\ = y^5 + 10Hy^3 + 10Gy^2 + 5(L - 3H^2)y + K - 2HG. \end{cases}$$

Pongasi:

$$(3)\ldots\quad \begin{cases} y^5 + 10Hy^3 + 10Gy^2 + 5(L - 3H^2)y + K - 2HG \\ = Norma\left(y - \sqrt[5]{z} - t.\sqrt[5]{z^2} - u.\sqrt[5]{z^3} - v.\sqrt[5]{z^4}\right) \\ = - \begin{vmatrix} -y & 1 & t & u & v \\ vz & -y & 1 & t & u \\ uz & vz & -y & 1 & t \\ tz & uz & vz & -y & 1 \\ z & tz & uz & vz & -y \end{vmatrix} \\ = y^5 - 5.(vz + tuz).y^3 - 5.(uz + tv^2z^2 + t^2z + u^2vz^2).y^2 \\ - 5(tz + u^3z^2 + t^3vz^2 + uv^3z^3 + tuvz^2 - v^2z^2 - t^2u^2z^2)y \\ - 5(t^2vz^2 + tu^2z^2 + u^2v^2z^3 + t^2uv^2z^3 - uvz^2 - t^3uz^2 \\ - tv^3z^3 - tu^3vz^3) - z - t^5z^2 - u^5z^3 - v^5z^4, \end{cases}$$

per cui dovrà essere:

$$(4)\ldots\quad \begin{cases} z\,.(v+tu)=-2H \\ uz+tv^2z^2+t^2z+u^2vz^2=-2G \\ tz+u^3z^2+t^3vz^2+uv^3z^3+3\,tuvz^2=7H^2-L \\ 5z\,.(v-tu)\,.(uz+tv^2z^2-t^2z-u^2vz^2)-z \\ -t^5z^2-u^5z^3-v^5z^4=K-2HG\,. \end{cases}$$

Pongasi ora:

$$(5)\ldots\quad \begin{cases} z(v-tu)=2\alpha \\ uz+tv^2z^2-t^2z-u^2vz^2=2\beta \\ u^3z^2+t^3vz^2-tz-uv^3z^3=\gamma \end{cases}$$

e, per queste e per le (4), si avrà:

$$(6)\ldots\quad \begin{cases} zv=-H+\alpha \qquad\qquad ztu=-H-\alpha \\ uz+tv^2z^2=-G+\beta \qquad t^2z+u^2vz^2=-G-\beta \\ 2\,(u^3z^2+t^3vz^2)=4H^2-L+3\alpha^2+\gamma \\ 2\,(tz+uv^3z^3)=4H^2-L+3\alpha^2-\gamma\,. \end{cases}$$

Queste, con l'ultima (4), dànno:

$$2\,(G^2-\beta^2)=(-H+\alpha)\,(4H^2-L+3\alpha^2+\gamma)$$
$$-(H+\alpha)\,(4H^2-L+3\alpha^2-\gamma)\,.$$

$$(4H^2-L+3\alpha^2)^2-\gamma^2=4\,(-H+\alpha)\,(G+\beta)^2$$
$$-4\,(H+\alpha)\,(G-\beta)^2-16\,(H^2-\alpha^2)^2$$

$$40\,\alpha\beta+\frac{1}{\alpha+H}\cdot\Big[(4H^2-L+3\alpha^2-\gamma)\,(-G+\beta)$$
$$+2\,.\,(H-\alpha)^2\,(G+\beta)\Big]+\frac{1}{\alpha-H}\cdot\Big[(4H^2-L+3\alpha^2+\gamma)(G+\beta)$$
$$+2\,(H+\alpha)^2\,(-G+\beta)\Big]=2K-4HG\,.$$

Semplificando queste tre equazioni e moltiplicando l'ultima per α^2-H^2, per cui però importa osservare che si introducono le radici $\alpha=\pm H$, ed eliminando poi G^2 per mezzo della

$$(7)\ldots\qquad G^2=HL-M-4H^3,$$

che si ricava dalla penultima (1), si ottiene:

$$(8)\dots\quad\begin{cases} 3H\alpha^2-\alpha\gamma-\beta^2-M=0 \\ 25\alpha^4-(8H^2+6L)\alpha^2-16G\alpha\beta+8H\beta^2-\gamma^2 \\ \qquad +L^2-8HM=0 \\ 25\alpha^3\beta-(10H^2+L)\alpha\beta-(K+HG)\alpha^2+G\alpha\gamma \\ \qquad +H\beta\gamma+H^2K-LHG=0\,. \end{cases}$$

Eliminando γ, una volta mediante prima e seconda ed un'altra volta mediante prima e terza, s'ottiene:

$$(9)\dots\quad\begin{cases} \beta^4+(2M-14H\alpha^2)\beta^2+16G\alpha^3\beta-25\alpha^6+(17H^2 \\ \qquad +6L)\alpha^4+(2HM-L^2)\alpha^2+M^2=0 \\ H\beta^3+G\alpha\beta^2+(HM+7H^2\alpha^2+L\alpha^2-25\alpha^4)\beta \\ \qquad +(K-2HG)\alpha^3+(LHG+GM-H^2K)\alpha=0\,. \end{cases}$$

Per eliminare γ s'è però dovuto moltiplicare per α^2 la penultima (8) e per α l'ultima, introducendo così la radice multipla $\alpha=0$, la quale si riconosce pur subito osservando che le (9) sono soddisfatte da

$$\alpha=0 \qquad\qquad \beta=\pm\sqrt{-M}\,.$$

Se nell'ultima equazione, moltiplicata per $H\beta$, si pongono per β^4 ed $H\beta^3$ i valori dati per queste quantità dalle ultime due equazioni, s'ottiene un'equazione che si può mettere in luogo della penultima senza introdurre nè perdere radici, perchè si riconosce subito che, essendo H diverso da zero nel caso generale, la nuova equazione sarà soddisfatta da ogni sistema di valori che soddisfi entrambe le (9), e la penultima di queste sarà soddisfatta da ogni sistema di valori che soddisfi l'ultima di esse e la nuova equazione.

S'ottiene così, eliminando poi G^2 mediante (7),

$$\begin{aligned}\left[25H\alpha^4-(25H^3+M)\alpha^2+H^2M\right]\beta^2+\Big[&-25G\alpha^5 \\ &+(25GH^2+LG-HK)\alpha^3+(H^3K-LH^2G)\alpha\Big]\beta \\ &-25H^2\alpha^6+(25H^4+4LH^2+2HM+KG)\alpha^4 \\ &+(-M^2-4LH^4-2H^3M-H^2KG)\alpha^2+H^2M^2=0\,.\end{aligned}$$

Si riconosce facilmente che i coefficenti di β^2, β e β^0, annullandosi per $\alpha^2 = H^2$, sono divisibili per $\alpha^2 - H^2$: dividiamo per questa quantità e toglieremo le radici estranee $\alpha = \pm H$ introdotte per dare in forma intera l'ultima (8), come fu osservato. Otteniamo così:

$$(10)\ldots \left\{ \begin{aligned} &(25H\alpha^2 - M)\beta^2 + \left[-25G\alpha^3 + (GL - HK)\alpha\right]\beta \\ &\qquad -25H^2\alpha^4 + (4H^2L + 2HM + KG)\alpha^2 - M^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Dalla seconda (9) moltiplicata per $25H\alpha^2 - M$ togliamo la (10) moltiplicata per $H\beta + G\alpha$ e dividiamo la risultante per $H\alpha$, sopprimendo così una radice estranea $\alpha = 0$ introdotta dal calcolo come fu avvertito; con ciò otteniamo, eliminando G^2 con (7):

$$(11)\ldots \left\{ \begin{aligned} &(25G\alpha^2 + HK - GL)\beta^2 + \left[-625\alpha^5 + (100H^2 + 50L)\alpha^3 \right. \\ &\quad \left. + (16HM - L^2)\alpha\right]\beta + (25K - 25HG)\alpha^4 + (25GM \\ &\quad + 21HGL - 21H^2K - KL)\alpha^2 + HKM - GLM = 0. \end{aligned} \right.$$

Prendendo le ultime due equazioni in luogo della penultima con la seconda (9) s' introduce però, per l' equazione in α, il fattore estraneo $25H\alpha^2 - M$, perchè dal modo in cui fu ottenuta la (11) segue immediatamente che il sistema composto delle due ultime equazioni ammette precisamente tutte le soluzioni del sistema composto della penultima equazione e della seconda (9) insieme con le soluzioni dell'equazione che s'ottiene dalla (10) facendovi $\alpha^2 = M:25H$.

Se con A, $B\alpha$, C ed A', $B'\alpha$, C' indichiamo i coefficenti di β^2, β, β^0 nelle equazioni (10) ed (11), eliminando β otteniamo:

$$(AB' - A'B)(BC' - B'C)\alpha^2 = (AC' - A'C)^2.$$

Il secondo membro di questa risulta divisibile per α^4. Sopprimiamo il fattore α^2 che viene in evidenza, con cui sarà tolta la radice $\alpha = 0$ introdotta eliminando γ, come fu detto a suo tempo, e dividiamo pure pel fattore $25H\alpha^2 - M$, il quale deve certamente esservi, perchè fu introdotto formando l'equazione (11),

come fu osservato; poniamo poi

$$(12)\ldots \qquad 25\alpha^2 = \omega$$

ed eliminiamo G^2 per mezzo della (7). Otterremo così la risolvente, coll'incognita ω, senza radici estranee:

$$\frac{1}{H\omega - M}\Big\{\Big[-\omega^3 + 3L\omega^2 + (12HM - 3L^2 + 8H^2L + 2KG)\omega$$
$$-2KGL + L^3 - 4H^2L^2\Big] \times \Big[-H\omega^4 + (7HL + M)\omega^3$$
$$+(108H^2M + 72H^3L - 7LM - 31HL^2 + 18HKG$$
$$-K^2)\omega^2 + (-66KGM + 31L^2M - 264H^2LM$$
$$+25HL^3 - 84H^3L^2 - 42HKGL + 21H^2K^2$$
$$+K^2L + 68HM^2)\omega - 25M(HK^2 - 16M^2 - 2KGL$$
$$+L^3 - 4H^2L^2)\Big] - \Big[K\omega^2 + (24GM + 16HGL$$
$$-16H^2K - 2KL)\omega + 44HKM - 44GLM$$
$$-8H^2KL - GK^2 + 4HL^2G + KL^2\Big]^2\omega\Big\}$$
$$= \omega^6 - 10L\omega^5 + (55L^2 - 120HM - 80H^2L - 20KG)\omega^4$$
$$+(600HLM - 160M^2 + 80KGL + 360H^2L^2 + 10HK^2$$
$$-140L^3)\omega^3 + (800LM^2 - 200KGL^2 + 50HK^2L$$
$$+175L^4 - 100K^2M + 3600H^2M^2 + 4800H^3LM$$
$$+1200HKGM + 800H^2KGL - 400H^3K^2 - 1000H^2L^3$$
$$-1800HL^2M + 1600H^4L^2)\omega^2 + (2688HM^3 - 240L^2M^2$$
$$-7424H^2LM^2 - 1856KGM^2 + 240KGL^3$$
$$-3408HKGLM - 336H^2KGL^2 - 170HK^2L^2$$
$$+160K^2LM + 336H^3K^2L + 520H^2L^4 - 6816H^3L^2M$$
$$-448H^4L^3 + 28HK^3G - 106L^5 + 2120HL^3M$$
$$+1704H^2K^2M - K^4)\omega + 25(16M^2 + 2KGL$$
$$+4H^2L^2 - HK^2 - L^3)^2 = 0\,.$$

Mediante il processo ordinario d'estrazione di radice quadrata,

si riduce subito quest'equazione alla seguente:

$$(13)\ldots \left\{\begin{aligned} &\left[\omega^3 - 5L\omega^2 + 5(3L^2 - 12HM - 8H^2L - 2KG)\omega\right.\\ &\quad \left. + 5(HK^2 + L^3 - 16M^2 - 2KGL - 4H^2L^2)\right]^2\\ &\quad + (2160L^2M^2 - 6912HM^3 - 13824H^2LM^2\\ &\quad - 3456KGM^2 + 640KGL^3 - 4608HKGLM\\ &\quad - 1536H^2KGL^2 - 520HK^2L^2 + 360K^2LM\\ &\quad + 1536H^3K^2L + 1520H^2L^4 - 9216H^3L^2M\\ &\quad - 2048H^4L^3 - 256L^5 + 128HK^3G + 2720HL^3M\\ &\quad + 2304H^2K^2M - K^4)\omega = 0. \end{aligned}\right.$$

Se si sapesse ottenere un valore di ω, epperò di α, si determinerebbe poi subito il corrispondente valore di β, che sarebbe radice comune delle (10) ed (11); mediante le (6) si otterrebbero allora senza difficoltà valori tra loro corrispondenti delle z, t, u, v; e, per la prima (1) e per le (2) e (3), la

$$(14)\ldots \qquad ax^5 + 5bx^4 + 10cx^3 + 10dx^2 + 5ex + f = 0$$

avrebbe per radici i cinque valori dati dalla

$$x = \frac{1}{a}\cdot\left(-b + \sqrt[5]{z} + t\sqrt[5]{z^2} + u\sqrt[5]{z^3} + v\sqrt[5]{z^4}\right).$$

La (13) è dunque una risolvente della (14); essa non differisce sostanzialmente dalla risolvente del MALFATTI, la quale si potrebbe subito avere, senza secondo termine come la diede il medesimo, ponendo $\omega = \frac{5}{3}L - x$, sostituendo i loro valori nei coefficienti dell'equazione di 5° grado alle quantità H, K, G, L, M qui introdotte per comodo e ponendo infine 1, 0, $-\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $-c$, d in luogo di a, b, c, d, e, f, perchè MALFATTI, come fu già detto, ha considerata l'equazione

$$x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 - 5cx + d = 0.$$

Indicando con D il discriminante della quintica $(a, b, c, d, e, f)(xy)^5$,

ponendo cioè:

$$D=\frac{1}{5^5}(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_1-x_5)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2$$
$$.(x_2-x_5)^2(x_3-x_4)^2(x_3-x_5)^2(x_4-x_5)^2$$
$$=a^4f^4+\ldots$$

si riconosce facilmente (*) che il coefficente di $-\omega$ nel termine lineare della (13) non è altro che $a^{12}D$.

Pongasi ancora

$$(15)\ldots\quad \begin{cases} 6HM+4H^2L+KG=a^4q \\ HK^2+L^3+9M^2-2KGL-4H^2L^2=a^7s \end{cases}$$

ossia, per le (1),

$$(15')\ldots\quad \begin{cases} q=a^2df+10ac^2e-3abcf-5abde-4acd^2 \\ \qquad +2b^3f-5b^2ce+14b^2d^2-16bc^2d+6c^4 \\ s=a^2cf^2-2a^2def+a^2e^3-ab^2f^2-4abcef \\ \qquad +8abd^2f-2abde^2-2ac^2df+14ac^2e^2 \\ \qquad -22acd^2e+9ad^4+6b^3ef-12b^2cdf-15b^2ce^2 \\ \qquad +10b^2d^2e+6bc^3f+30bc^2de-20bcd^3 \\ \qquad -15c^4e+10c^3d^2. \end{cases}$$

Con ciò avendo riguardo anche alle (1), la (13) si può scrivere semplicemente così:

$$\left[\omega^3-5a^2I\omega^2+5a^4(3I^2-2q)\omega+5a^6(as-25J^2)\right]^2$$
$$-(a^6.\sqrt{D\omega})^2=0\,.$$

Il primo membro si decompone subito in due fattori.

Ponendo

$$(16)\ldots\qquad \theta=\frac{5\alpha}{a}\,,$$

ossia, per la (12),

$$\theta=\frac{1}{a}.\sqrt{\omega}$$

(*) Œuvres de LAGRANGE, *Traité de la résolution des équations numériques*, Paris MDCCCLXXIX; pag. 144.

ed operando l'accennata scomposizione, s'ottiene:

$$(17)\dots \quad \begin{cases} \left[\theta^6 - 5I\theta^4 + 5(3I^2 - 2q)\theta^2 + 5(as - 25J^2) + a\sqrt{D}\,.\,\theta\right] \\ \times\left[\theta^6 - 5I\theta^4 + 5(3I^2 - 2q)\theta^2 + 5(as - 25J^2) - a\sqrt{D}\,.\,\theta\right] = 0. \end{cases}$$

Una risolvente della (14) è quindi ancora la

$$(18)\dots \quad \theta^6 - 5I\theta^4 + 5(3I^2 - 2q)\theta^2 - a\sqrt{D}\,.\,\theta + 5(as - 25J^2) = 0\,,$$

come l'altra che si avrebbe prendendo col segno + la radice del discriminante.

Dalla (18) s'ottiene subito la risolvente di Jacobi e Cayley facendo

$$\theta = \frac{a}{2\sqrt{5}}\,\Phi\,.$$

Jacobi trovò che tal risolvente doveva ridursi a

$$y^6 + a_2 y^4 + a_4 y^2 + a_6 = 32\sqrt{\Delta}\,.\,y\,,$$

dove è $\Delta = 5^5 D$ e diede, ma inesatto, il valore di a_2. Cayley, indipendentemente da Jacobi, determinò tutti i coefficenti e li espresse, precisamente come nella (18), con discriminante e primi coefficenti di covarianti della quintica. Entrambi, per calcolare i coefficenti, ricorsero alla

$$\begin{aligned} \Phi = y &= (12345) - (13524) \\ &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 \\ &\quad - x_1x_3 - x_3x_5 - x_5x_2 - x_2x_4 - x_4x_1 \end{aligned}$$

che dà l'incognita della risolvente per mezzo delle radici dell'equazione di 5° grado.

Il calcolo della (13) riesce un poco più comodo procedendo così:

Indicando con a, b, c, d e con a', b', c', d' i coefficenti di β^3, β^2, β, β^0 nella (10) e nella seconda (9); s'ottiene subito col metodo di Bezout:

$$\begin{vmatrix} -a'b & -a'c & -a'd \\ -a'c & -a'd + (bc') & (bd') \\ -a'd & (bd') & (cd') \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dividansi per H tutti i termini del precedente determinante e per α la seconda orizzontale e la seconda verticale, togliendo così due radici $\alpha = 0$ introdotte formando la (9). All'ultima orizzontale s'aggiunga poi la prima moltiplicata per $H\alpha^2 - M$ e dividasi la nuova ultima orizzontale per α^2, con cui saranno soppresse le radici $\alpha = 0$ introdotte eliminando γ. Dopo ciò, all'ultima verticale s'aggiunga la prima moltiplicata per $H\alpha^2 - M$, si faccia $25\alpha^2 = \omega$ e si ponga ω in evidenza, dividendo per ω l'ultima verticale. S'otterrà così la risolvente (13) nella seguente forma

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & U + \frac{25}{\omega} V \end{vmatrix} \times \frac{\omega}{H^2} = 0.$$

dove è:

$$A = H\omega - M \qquad B = -G\omega + GL - HK$$

$$C = 4H^2L + KG - 24HM$$

$$D = \omega^2 - (4H^2 + 2L)\omega + L^2 - 16HM$$

$$E = -K\omega + 20H^2K + KL - 20HGL$$

$$U = H\omega^2 - 7HL\omega - 108H^2M + 31HL^2 - 72H^3L + K^2 - 18HKG$$

$$V = 16HM^2 + 2HKGL + 4H^3L^2 - H^2K^2 - HL^3.$$

14 Aprile 1892.

RELAZIONE intorno alla Memoria del Dott. Fr. Sav. Monticelli intitolata: *Studi sui Trematodi endoparassiti - Monostomum cymbium* Diesing. - *Contribuzione allo studio dei Monostomidi.*

L'A., già noto favorevolmente pei suoi precedenti lavori sui trematodi, avendo potuto avere dal Museo di Storia Naturale di Vienna i tipi del Diesing del *Monostomum cymbium* raccolti dal Natterer nel Brasile, ne fa uno studio diligente e minuto sia dal punto di vista anatomico, sia riguardo alle affinità colle altre specie di Monostomidi.

Per stabilire la posizione sistematica del M. *cymbium* l'A., fa una revisione critica di tutte le specie di *Monostomum* parassite delle Gralle e dei Palmipedi, e conchiude che a tre sole si devono ridurre le specie di *Monostomum* di questi uccelli: *M. mutabile*, *M. flavium*, *M. sarcidiornicola.*

I vostri Commissari credono che il lavoro del Dott. F. S. Monticelli costituisce un buon contributo alla conoscenza di questi parassiti e perciò ne propongono la lettura alla Classe, e qualora questa lo approvi, la stampa nei volumi accademici.

G. Bizzozero
L. Camerano, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. 13ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 15 Maggio 1892

PRESIDENZA DEL COMM. PROF. ALFONSO COSSA
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci Bruno, Bizzozero, Ferraris, Naccari, Mosso, Spezia, Gibelli, Giacomini, Camerano, Segre, Peano e Basso Segretario.

Letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, il Socio Spezia offre in dono all'Accademia una sua pubblicazione, intitolata: *Sulla origine del solfo nei giacimenti solfiferi della Sicilia.*

Lo stesso Socio Spezia presenta un lavoro manoscritto del Dott. C. F. Parona, Professore di Geologia nell'Università di Torino, il quale ha per titolo: *Revisione della Fauna liasica di Gozzano in Piemonte.* Essendo questo lavoro destinato, previa approvazione della Classe, ai volumi delle *Memorie*, il Presidente incarica una Commissione di esaminarlo e di riferirne in altra seduta alla Classe.

Il Socio Basso legge e presenta per la pubblicazione negli *Atti* una Nota: *Sul problema delle onde piane nella teoria elettromagnetica della luce*, del Signor Antonio Garbasso, laureando nella Facoltà matematica dell'Università di Torino.

LETTURE

Sul problema delle onde piane nella teoria elettromagnetica della luce (*).

Nota di A. GARBASSO.

Assumo le equazioni della teoria elettromagnetica nella forma sotto cui furono messe da Hertz:

$$(1)\dots\left\{\begin{aligned} A\varepsilon_1\frac{\partial X}{\partial t}&=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\\ A\varepsilon_2\frac{\partial Y}{\partial t}&=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\\ A\varepsilon_3\frac{\partial Z}{\partial t}&=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}.\end{aligned}\right. \qquad (2)\dots\left\{\begin{aligned} A\frac{\partial L}{\partial t}&=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\\ A\frac{\partial M}{\partial t}&=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\\ A\frac{\partial N}{\partial t}&=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

In queste equazioni sono X, Y, Z le componenti della forza elettrica; L, M, N le componenti della forza magnetica; x, y, z le coordinate del punto in cui si considera la perturbazione; t il tempo; ε_1, ε_2, ε_3 le costanti di polarizzazione dielettrica secondo le direzioni degli assi; A il reciproco della velocità della luce nell'etere.

Il mettere le equazioni sotto questa forma corrisponde al fare le due ipotesi seguenti:

1° Che gli assi principali della forza elettrica siano gli assi principali della forza magnetica;

2° Che la costante di polarizzazione magnetica sia uguale all'unità lungo i tre assi e quindi in ogni direzione.

Se si esclude la presenza di quantità libere di elettricità e

(*) La nota presente contiene la dimostrazione diretta di alcune proposizioni enunciate da HERTZ nella sua Memoria: *Uber die Grundgleichungen der Electrodinamik für ruhende Körper*. Wied. Ann. XL, S. 577, 1890.

di magnetismo si hanno oltre alle (1) e (2) ancora le equazioni seguenti:

$$(3)\ldots \qquad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0\,,$$

$$(4)\ldots \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0\,.$$

La simmetria dei sistemi (1) e (3) da una parte e (2) e (4) dall'altra, ci fa vedere che i risultati a cui si potrà giungere per la forza elettrica saranno perfettamente paralleli a quelli che si otterranno per la forza magnetica, quindi l'opportunità di eliminare le componenti di una delle due forze e di eseguire il calcolo solamente con le componenti dell'altra.

Volendo eliminare le componenti della forza magnetica, per es., basta derivare la prima delle (1) rispetto al tempo e le ultime due delle (2) rispetto a z e y ordinatamente, con che si ottiene:

$$A\varepsilon_1 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial t} - \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial t}\,,$$

$$A \frac{\partial^2 M}{\partial t \partial z} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z}\,,$$

$$A \frac{\partial^2 N}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,,$$

onde si ricava facilmente:

$$A^2\varepsilon_1 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$$

e così: (5)...
$$\left\{\begin{aligned} A^2\varepsilon_1 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \\ A^2\varepsilon_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \\ A^2\varepsilon_3 \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}. \end{aligned}\right.$$

Ora dalla (3), derivando rispetto ad x, si ottiene:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x} + \varepsilon_3 \frac{\partial^2 Z}{\partial z \partial x} = 0\;;$$

da cui:

$$-\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x}.$$

Il valore del primo membro sostituito nella prima delle (5) permette di scrivere quella equazione sotto la forma:

$$(*)\qquad A^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_3}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_3}\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y}.$$

Se si vuole che l'onda sia piana, rimanendo arbitraria la funzione che rappresenta il valor numerico della forza, bisognerà porre:

$$(6)\ldots\qquad \varepsilon_1 X = a.f(s.t) \qquad \varepsilon_2 Y = b.f(s.t) \qquad \varepsilon_3 Z = c.f(s.t)$$

essendo a, b, c i coseni (costanti) direttori del vettore di componenti $\varepsilon_1 X$, $\varepsilon_2 Y$, $\varepsilon_3 Z$; $f(s.t)$ una funzione qualunque del tempo t e del parametro s definito dall'uguaglianza

$$s = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Le quantità di α, β, γ risulteranno essere i coseni direttori della normale alla giacitura dell'onda.

Si può osservare che, essendo ψ una funzione ad arbitrio di s e di altre variabili comunque (indipendenti dalle coordinate), saranno verificate le relazioni:

$$(7)\ldots\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} = \alpha \dfrac{\partial \psi}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} = \beta \dfrac{\partial \psi}{\partial s} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = \dfrac{\partial \psi}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial z} = \gamma \dfrac{\partial \psi}{\partial s}. \end{cases}$$

Tenendo conto di queste e delle equazioni (6) la (*) diventa:

$$A^2 \frac{a}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{a\alpha^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_3}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{a\beta^2}{\varepsilon_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{a\gamma^2}{\varepsilon_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \frac{b\alpha\beta}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\frac{\partial^2 f}{\partial s^2};.$$

se ne deduce:

e così: (8)...
$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{1}{A^2}\left[\frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_1} + \frac{b}{a}\,\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{1}{A_2}\left[\frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_2} + \frac{c}{b}\,\frac{\beta\gamma}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{1}{A^2}\left[\frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha_2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_3} + \frac{a}{c}\,\frac{\gamma\alpha}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\right]\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\,.
\end{aligned}\right.$$

Le equazioni (8) si integrano immediatamente secondo un noto teorema di D'Alembert. Però, onde la funzione f che s'ottiene sia la stessa in tutti i casi, come l'indole del problema richiede, si devono verificare le uguaglianze:

(9)...
$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_1}\right) a + \frac{\alpha\beta}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\, b = \rho\, a \\
&\left(\frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_2}\right) b + \frac{\beta\gamma}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\, c = \rho\, b \\
&\left(\frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_3}\right) c + \frac{\gamma\alpha}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a = \rho\, c\,,
\end{aligned}\right.$$

essendo ρ una variabile ausiliaria, la cui definizione risulta dalle equazioni stesse.

Ponendo per semplicità:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_1} &= h_1 \\
\frac{\beta^2}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} &= h_2 \\
\frac{\gamma^2}{\varepsilon_2} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon_3} + \frac{\beta^2}{\varepsilon_3} &= h_3
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\frac{\alpha\beta}{\varepsilon_2\,\varepsilon_3}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) &= k_1 \\
\frac{\beta\gamma}{\varepsilon_3\,\varepsilon_1}(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) &= k_2 \\
\frac{\gamma\alpha}{\varepsilon_1\,\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &= k_3
\end{aligned}\right.$$

le (9) si scrivono:

$$\left\{\begin{aligned}
h_1 a + k_1 b &= \rho\, a \\
h_2 b + k_2 c &= \rho\, b \\
h_3 c + k_3 a &= \rho\, c
\end{aligned}\right.$$

ossia:

$$\begin{cases} (h_1 - \rho)\, a + k_1 b = 0 \\ (h_2 - \rho)\, b + k_2 c = 0 \\ (h_3 - \rho)\, c + k_3 a = 0 \,. \end{cases}$$

Sono queste tre equazioni lineari omogenee in a, b, c; perchè si verifichino per valori non tutti nulli delle variabili (ciò che trattandosi dei tre coseni d'una direzione non avrebbe senso) è necessario che sia

$$\begin{vmatrix} h_1 - \rho & k_1 & 0 \\ 0 & h_2 - \rho & k_2 \\ k_3 & 0 & h_3 - \rho \end{vmatrix} = 0 \,,$$

o, svolgendo:

$$(10)\ldots \qquad (h_1 - \rho)(h_2 - \rho)(h_3 - \rho) + k_1 k_2 k_3 = 0 \,.$$

Siccome ogni valore reale di ρ ci dà una terna di valori possibili per i coseni a, b, c saranno tante le direzioni del vettore $(\varepsilon_1 X, \ \varepsilon_2 Y, \ \varepsilon_3 Z)$ che soddisfano al problema quante sono le radici reali e distinte dell'equazione in ρ.

Ora, delle radici di questa equazione una sola cosa si può affermare *a priori*, che cioè una di esse è certamente reale, e ciò deriva dall'essere reali i coefficienti e di grado dispari l'equazione.

Indichiamo con $a_1, \ b_1, \ c_1$ i coseni della direzione (reale) che corrisponde a questa prima radice dell'equazione (10).

Si avrà identicamente:

$$h_1 + k_1 \frac{b_1}{a_1} = h_2 + k_2 \frac{c_1}{b_1}$$

$$h_2 + k_2 \frac{c_1}{b_1} = h_3 + k_3 \frac{a_1}{c_1}$$

$$h_3 + k_3 \frac{a_1}{c_1} = h_1 + k_1 \frac{b_1}{a_1} \,.$$

Se ora indichiamo con $a_2, \ b_2, \ c_2$ i coseni che determinano

la direzione che è nel piano dell'onda, a novanta gradi dalla (a_1, b_1, c_1), se cioè poniamo:

$$a_2 = \beta c_1 - \gamma b_1$$
$$b_2 = \gamma a_1 - \alpha c_1$$
$$c_2 = \alpha b_1 - \beta a_1 ,$$

è facile vedere che si verifica per identità la relazione:

$$(11)\ldots \qquad \frac{a_1}{\varepsilon_1} \cdot a_2 + \frac{b_1}{\varepsilon_1} \cdot b_2 + \frac{c_1}{\varepsilon_3} c_2 = 0 .$$

Infatti (a_2, b_2, c_2) è la direzione del vettore (L, M, N), quando si prende per il vettore $(\varepsilon_1 X, \varepsilon_2 Y, \varepsilon_3 Z)$ la direzione (a_1, b_1, c_1) (equazioni 1, 3, 4). Nella stessa ipotesi $\frac{a_1}{\varepsilon_1}, \frac{b_1}{\varepsilon_2}, \frac{c_1}{\varepsilon_3}$ sono proporzionali ai coseni di direzione di (X, Y, Z), ma quest'ultimo vettore è perpendicolare ad (L, M, N) per le equazioni (2).

Ciò posto, se si trasforma la (11) tenendo conto delle relazioni che legano le α, β, γ fra loro e con le a_1, b_1, c_1 si può con calcoli semplicissimi, per quanto un po' sviluppati, arrivare ad una qualunque delle identità:

$$h_1 + k_1 \frac{b_2}{a_2} = h_2 + k_2 \frac{c_2}{b_2}$$

$$h_2 + k_2 \frac{c_2}{b_2} = h_3 + k_3 \frac{a_2}{c_2}$$

$$h_3 + k_3 \frac{a_2}{c_2} \qquad h_1 + k_1 \frac{b_2}{a_2} .$$

Se ne deduce che la terna a_2, b_2, c_2 dà sempre una direzione possibile del vettore $(\varepsilon_1 X, \varepsilon_2 Y, \varepsilon_3 Z)$.

Ma alla terna soddisfacente a_2, b_2, c_2 dovendo corrispondere una radice reale della (10), ne segue che quest'equazione ha due radici reali e quindi le ha reali tutte tre.

Alla terza radice dell'equazione in ρ corrisponderà una nuova terna di coseni a_3, b_3, c_3.

Si può provare però che la terna a_3, b_3, c_3 soddisfacendo al problema deve coincidere con una delle due a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2.

E di vero, se si suppone per un momento la terna a_3, b_3, c_3 soddisfacente e distinta dalle due a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 (che sono distinte fra loro), si dimostrerà, con un procedimento simile a quello impiegato innanzi, che anche la terna a_4, b_4, c_4 definita dalle

$$a_4 = \beta c_3 - \gamma b_3$$

$$b_4 = \gamma a_3 - \alpha c_3$$

$$c_4 = \alpha b_3 - \beta a_3 ,$$

e però distinta da ciascuna delle tre precedenti, dà una direzione possibile del vettore $(\varepsilon_1 X,\ \varepsilon_2 Y,\ \varepsilon_3 Z)$.

Ora a questa quarta terna di coseni dovrebbe corrispondere una quarta radice della equazione in ρ, ciò che non può essere.

È evidente che ad ogni direzione possibile del vettore $(\varepsilon_1 X,\ \varepsilon_2 Y,\ \varepsilon_3 Z)$ corrisponde una ed una sola direzione del vettore $(X,\ Y,\ Z)$, una ed una sola direzione del vettore $(L,\ M,\ N)$.

Riassumendo i risultati ottenuti si può conchiudere che:

1° Per il vettore $(\varepsilon_1 X,\ \varepsilon_2 Y,\ \varepsilon_3 Z)$ (polarizzazione dielettrica di Hertz, parallelo e differente per una costante dallo spostamento dielettrico di Maxwell) vi sono in ogni caso due direzioni possibili, fra loro ortogonali, giacenti nel piano dell'onda; questo vettore è nella ipotesi meccanica della luce la vibrazione di Fresnel.

2° Per il vettore $(L,\ M,\ N)$ (forza magnetica di Maxwell e di Hertz) vi sono in ogni caso due direzioni possibili, fra di loro ortogonali, giacenti nel piano dell'onda e perpendicolare ciascuna alla posizione corrispondente del vettore $(\varepsilon_1 X,\ \varepsilon_2 Y,\ \varepsilon_3 Z)$; questo vettore è nell'ottica dedotta dalla teoria dell'elasticità la vibrazione di Neumann.

3° Per il vettore $(X,\ Y,\ Z)$ (forza elettrica di Hertz, forza elettromotrice di Maxwell) vi sono in ogni caso due direzioni possibili fuori del piano dell'onda, perpendicolari alle posizioni corrispondenti della forza magnetica: questo vettore nelle teorie meccaniche della luce è la derivata geometrica presa per rispetto al tempo della vibrazione di Sarrau.

La polarizzazione magnetica di Hertz nelle ipotesi adottate coincide con la forza corrispondente; la forza elettrica cade nel piano dell'onda ed ha la direzione dello spostamento corrispondente nel solo caso dei mezzi isotropi.

Si può notare che, dalle equazioni trovate dal Poincaré (*) fra i vettori di Fresnel, Neumann e Sarrau, si deducono con facili eliminazioni due sistemi che per la forma coincidono esattamente con quelli di Hertz (sistemi 1 e 2).

Ciò del resto si poteva affermare *a priori*, poichè quelle relazioni del Poincaré sono identiche, nella forma, con certe equazioni di Maxwell, da cui si possono appunto ricavare quelle uguaglianze a cui Hertz è giunto la prima volta per una via differente (**).

Torino, maggio 1892.

(*) H. Poincaré. *Théorie mathématique de la lumière.*, pag. 279.

(**) H. Hertz, *Über die Beziehungen zwischen den Maxwellschen electrodynamischen Grundgleichungen und den Grundgleichungen der gegnerischen Electrodinamik.* Wied. Ann. XXIII, S. 84, 1884.

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOL. XXVII, DISP. 14ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 29 Maggio 1892

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. ENRICO D'OVIDIO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: COSSA, BRUNO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, GIACOMINI, CAMERANO, SEGRE, e BASSO Segretario.

Il Socio Segretario legge l'atto verbale dell'adunanza precedente, che viene approvato.

Il Socio COSSA rammenta alla Classe la perdita che essa fece per la morte dell'illustre suo Socio straniero, Prof. A. G. HOFMANN, avvenuta quasi improvvisamente a Berlino la sera del 5 maggio, e ne enumera le benemerenze scientifiche. Sulla proposta del Presidente la Classe incarica lo stesso Professore COSSA di redigere una biografia dell'illustre Chimico tedesco per essere pubblicata nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Segretario dà comunicazione delle lettere di ringraziamento, per la loro recente nomina a Socio corrispondente, dei signori: Enrico POINCARÉ di Parigi, Giovanni HOPKINSON di Londra, Gabriele LIPPMANN di Parigi, Adolfo LIEBEN di Vienna, Carlo KLEIN di Berlino e Romualdo PIROTTA di Roma. Inoltre lo stesso Segretario presenta parecchie pubblicazioni dei nuovi colleghi KLEIN e PIROTTA, delle quali essi fanno dono all'Accademia.

Dal Socio BIZZOZERO viene segnalata, fra le opere pure pervenute in dono all'Accademia, quella intitolata: *Beiträge zur Kenntniss der Lage der weiblichen Beckenorgane nebst Beschreibung eines frontalen Gefrierschnittes des Uterus gravidus in situ*, del Socio Corrispondente Dott. W. WALDEYER, Direttore dell'Istituto anatomico dell'Università di Berlino.

Vengono poscia letti ed accolti per l'inserzione negli *Atti* i quattro seguenti lavori:

1° *Sulle ghiandole tubulari del tubo gastroenterico e sui rapporti del loro epitelio coll' epitelio di rivestimento della mucosa;* Nota IV^a del Socio Bizzozero, presentata dallo stesso Autore;

2° *Le zone terziarie di Vernasca e Vigoleno nel Piacentino*; Studio geologico del Prof. Dott. Federico Sacco, presentato dal Socio Spezia;

3° *Un nuovo apparato per misurare basi topografiche;* del Prof. Nicodemo Jadanza;

4° *Sopra alcune differenze trovate nel calcolo delle coordinate geografiche dei vertici del quadrilatero che congiunge l'Algeria colla Spagna;* Nota dello stesso Prof. Jadanza.

Questi due ultimi lavori sono presentati dal Socio Basso.

Il Socio Gibelli presenta un suo studio, eseguito in collaborazione del Dott. Saverio Belli, col titolo: *Rivista critica delle specie di Trifolium italiane, comparate con quelle del resto d'Europa e delle regioni circummediterranee delle sezioni: Cryptosciadum* Celak. *Calycomorfum* Presl. Questo lavoro viene accolto dalla Classe per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie.*

Il Socio Camerano, anche a nome del condeputato Socio Spezia, legge una sua Relazione sul lavoro del Prof. C. F. Parona, intitolato: *Revisione della Fauna liasica di Gozzano in Piemonte.* Sulle conclusioni favorevoli di questa Relazione, la quale sarà pubblicata negli *Atti*, lo Studio del Prof. Parona è ammesso alla lettura ed in seguito approvato per l' inserzione nei volumi delle *Memorie.*

Infine il Presidente nomina apposite Commissioni per l'esame di tre lavori, dei quali gli Autori desiderano l'accoglimento nei volumi delle *Memorie*, cioè:

1° *Sulle proprietà termiche dei vapori;* parte IV^a, Studio del vapor d'acqua rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac. Ne è autore il Prof. Angelo Battelli dell'Università di Padova.

2° *Il clima di Torino;* Studio del Dott. G. B. Rizzo, Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino;

3° *I Ditteri del Messico* (Stratiomydeae e Syrphideae, parte I) del Dott. E. Giglio-Tos.

Di questi tre lavori i due primi sono presentati dal Socio Naccari; l'ultimo è presentato dal Socio Camerano.

LETTURE

Sulle ghiandole tubulari del tubo gastro-enterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa;

Nota quarta del Socio Prof. G. BIZZOZERO

Intestino delle lucertole.

Degli studi che ho fatto sull'intestino della *lacerta muralis* potrò riferire molto in breve, perchè il processo di rigenerazione dell'epitelio vi è assai semplice (1).

La mucosa dell' intestino non presenta nè villi, nè valvole. La sua superficie, però, è resa più ampia da lunghe pliche longitudinali, le quali, come nel tritone, sono variabili per numero (20, 30 e più) e per altezza a seconda delle diverse porzioni dell'intestino. La loro disposizione e il loro decorso si possono studiar bene con una lente in un intestino appena tolto all'animale, spaccato pel lungo, disteso, e reso leggermente opaco col versarvi sopra qualche goccia di alcool. Esse sono disposte parallele fra loro, e tengono un decorso onduloso, ma con ondulosità meno marcate che nel tritone. In una sezione trasversa dell'intestino ogni plica si vede costituita di una sottilissima lamina connettiva, rivestita da uno strato epiteliare relativamente grosso, che si continua nei fornici fra una plica e l'altra.

L'epitelio è formato, al solito, di cellule protoplasmatiche e di cellule mucipare (2).

(1) Mi sono servito specialmente di preparati induriti coll'acido picrico, che più degli altri liquidi induranti, che pur ho provato, rende evidenti i contorni cellulari.

(2) Anche nella lucertola fra le cellule epiteliari si notano molti leucociti migranti, e nel protoplasma di alcune di esse non mancano quelle inclusioni, quei globetti di sostanza cromatofila che si osservano anche nel tritone e nei mammiferi, e che sono a considerarsi come avanzi di leucociti distrutti.

Le *cellule mucipare* sono relativamente assai scarse. Sia per ciò, sia anche per la loro notevole picciolezza, io non mi soffermai gran fatto nel loro studio. Nei fornici sono di forma tendente alla cilindrica; il nucleo è rotondo od ovale, e disposto (ma non schiacciato) all'estremità basale della cellula. Lo spazio fra il nucleo e l'estremità libera della cellula è occupato dal blocco di muco, il quale è giallo colla safranina, tanto se per l'indurimento si sia adoperato l'alcool, quanto se si sia fatto uso di acido picrico: il color giallo scompare quando si aggiunga, per la conservazione del preparato, la soluzione di zucchero, notandosi, però, che la scomparsa è più lenta nei preparati all'acido picrico. — Nella parte alta delle pliche gli elementi mucipari acquistano la forma di calice (fig. 2ª); nel fusto di questo si trova, alquanto allontanato dalla base delle cellule, il nucleo.

Le cellule *protoplasmatiche* sono, in generale, lunghe e sottili. Di solito, però, nei fornici sono più corte che nella parte alta delle pliche. Hanno un protoplasma reticolato, ricco, naturalmente negli animali ben nutriti, di gocciole di adipe di varia grossezza, e sono limitate verso la superficie libera da un orlo striato relativamente sottile, il quale si continua *su tutto* l'epitelio superficiale, quindi anche dove questo riveste la parte più profonda dei fornici. Il nucleo, ovale, è, nei fornici, disposto nella base della cellula; andando verso l'alto delle pliche esso si allontana dalla base e giunge fino alla metà del corpo cellulare, e qualche volta anche la supera (fig. 2ª).

Quello che più interessa nell'epitelio intestinale delle lucertole si è, che esso non può considerarsi dappertutto come un epitelio semplice. Tra le estremità profonde delle cellule cilindriche spesso stanno disposte delle cellule irregolarmente poliedriche, che da una parte si appoggiano sulla mucosa, coll'altra si spingono più o meno in alto fra le cellule sovrapposte. Il loro nucleo è simile a quello delle cellule cilindriche, ma di forma un po' più rotondeggiante.

Il numero di queste cellule varia a seconda dei punti che consideriamo. Nei fornici sono così abbondanti da formare talora uno strato continuo (figura 1ª). Quanto più ci avanziamo verso l'alto delle pliche si fanno, invece, più rare; sicchè qui l'epitelio acquista l'aspetto d'un epitelio cilindrico semplice (fig. 2ª).

Queste cellule sono vere *cellule di ricambio*. Infatti 1° si trovano graduate forme di passaggio da esse alle cellule cilindriche

superficiali; 2° *fra di esse se ne trovano non poche che hanno il nucleo in mitosi* (fig. 3ª). Quantunque si tratti di elementi relativamente piccoli, il nucleo presenta evidente la struttura filamentosa, ed assai apparente è anche il fuso acromatico (figura 3ª B).

Più che nelle altre specie animali antecedentemente descritte, appare nella lucertola che le mitosi dell'epitelio sono disposte a gruppi: si possono percorrere dei tratti piuttosto lunghi dello strato epiteliare senza trovarne, mentre in altri punti se ne possono vedere (come è disegnato nella fig. 3ª A) quattro o cinque in piccolissimo spazio.

In quei punti in cui il processo di mitosi si manifesta, là si ottiene per risultato un gruppo di cellule di ricambio, che poi, gradatamente, si trasformano in cellule cilindriche superficiali. Anche le cellule di ricambio, adunque, non formano uno strato continuo ed uniforme, ed i loro accumuli hanno una durata transitoria.

La grande maggioranza delle mitosi sta nello strato profondo dell'epitelio. Conviene tuttavia notare, che, come nel tritone, così anche nella lucertola si trovano delle mitosi anche fra le cellule cilindriche superficiali, in corrispondenza della loro metà interna. Sono, però, assai rare (fig. 4ª).

Conchiudendo, possiamo dire, che nella lucertola, come nel tritone, la rigenerazione dell'epitelio ha luogo per mitosi, e che il processo cariocinetico ha luogo principalmente in cellule che stanno negli strati profondi dell' epitelio. C'è però questa differenza fra i due: che nella lucertola mancano quei germogli sottoepiteliari che nel tritone raggiungono, invece, un notevole sviluppo.

Intestino della rana.

Il modo di comportarsi dell'epitelio nella rana è assai simile a quello della lucertola (1).

Anche nella rana la mucosa non ha villi, ma è sollevata in tante pliche che hanno diversa configurazione a seconda del tratto

---

(1) Le mie osservazioni vennero fatte specialmente su pezzi induriti nell'alcool, oppure dapprima, per due giorni, nell'acido picrico, poi (dopo lavatura per 24 ore nell'acqua) nell'alcool.

d'intestino in cui stanno. Nella porzione anteriore (che è la più lunga e che ha il diametro maggiore) esse costituiscono come due complicati sistemi di valvole semilunari trasversali (1); mentre nella posteriore decorrono, ondulose, in direzione longitudinale, e si continuano colle pliche della mucosa della cloaca.

Nella mucosa intestinale della rana non si scorgono ghiandole tubulari.

L'epitelio è costituito da cellule protoplasmatiche, fra cui stanno, sparsevi abbastanza uniformemente, le cellule mucipare.

Le prime (fig. 5) appaiono quali belle e lunghe cellule prismatiche, a contorni abbastanza marcati. Sono provviste di un nucleo ovale, disposto coll'asse maggiore parallelo a quello della cellula, e collocato nella metà profonda di questa; esso non è però del tutto alla base dell'elemento, poichè fra esso e l'estremità profonda di questo vi è generalmente un breve tratto occupato da protoplasma. Il protoplasma presenta una fina striatura longitudinale, la quale, nei preparati induriti nell'acido picrico (2) e convenientemente colorati, appare dovuta a un fascio di fibrille che incominciano alla base della cellula, decorrono passando ai lati del nucleo, e vengono a perdersi verso l'estremità libera dell'elemento. Queste fibrille sono relativamente grosse, massime nella parte profonda della cellula, dove hanno anche un decorso piuttosto rigido; mentre nella metà superficiale sono leggermente ondulose.

Alla superficie libera delle cellule si osserva il solito orlo striato, che esiste tanto sull' epitelio della cresta delle pliche, quanto su quello dei fornici, mantenendo dappertutto lo stesso aspetto e lo stesso spessore.

Le cellule mucipare sono, al pari delle protoplasmatiche, relativamente assai lunghe, e ciò si deve specialmente all'allungamento di quel tratto di corpo cellulare che separa la teca dal nucleo (fig. 5 *a*), e che potremmo designare col nome di *pezzo intercalare*. In ogni elemento potremmo quindi distinguere quattro parti, che, andando dal profondo verso la superficie, sarebbero: la porzione basale, la porzione contenente il nucleo, il pezzo intercalare e la teca.

---

(1) Se ne vegga la figura in: *Wiedersheim*. Lehrb. der vergleich. Anatomie. Jena, 1882, pag. 588.

(2) Bizzozero, *Giorn. dell'Accad. med. di Torino*, 1892, pag. 205.

La prima porzione, generalmente sottile, e la seconda, in cui il nucleo ovale sta disposto longitudinalmente, non presentano nulla degno di nota. Nel pezzo intercalare, invece, è curioso il fatto, che il protoplasma contiene sempre parecchi vacuoli, e da questi è, così, ridotto ad un sottile reticolo, le cui trabecole colla safranina (e successiva conservazione in soluzione di zucchero) si colorano in rosso intenso, come il resto del protoplasma cellulare. Quanto alla teca, essa è relativamente piccola e corta, di forma ovale od ovoidea, ed è ripiena di granuli mucosi, che presentano il solito aspetto già studiato negli altri animali. Essi nella rana, però, sono relativamente resistenti. Infatti la costituzione granulare del blocco mucoso si osserva ancora tanto nell'intestino intatto conservato per 24 ore (nell'inverno) nel corpo dell'animale, quanto in pezzetti d'intestino conservati per altrettanto tempo nel siero iodico di Schultze, o nel liquido di Müller allungato a parti eguali con acqua.

I granuli mucosi (in pezzi all'acido picrico) si colorano in giallo colla soluzione acquosa concentrata di safranina, e questa colorazione, che li fa spiccare assai sul fondo rosso dato dal protoplasma, si conserva aggiungendo soluzione di zucchero, previamente colorata pure con safranina. È, dunque, una colorazione che mi servì assai bene nelle mie ricerche.

Fra le cellule epiteliari dell'intestino di rana stanno disposti, come è già noto, numerosissimi leucociti, i quali giacciono a preferenza (ma non esclusivamente) fra le estremità profonde degli epitelii (fig. 5ª *d*). Dei leucociti, alcuni hanno il protoplasma a granuli fini; altri invece, contengono granuli grossi, fortemente colorabili (1).

Oltre ai leucociti, sono pure frequenti delle cellule che (a differenza dei leucociti) stanno a preferenza in corrispondenza della metà superficiale delle cellule epiteliari, e si distinguono per esser grosse (20-30 μ di diametro), per aver un nucleo spinto, di solito, alla periferia dell'elemento e per contenere dei granuli di color verde-giallo. Di queste cellule, la cui esistenza è già nota da lungo (vennero anche in questi ultimi anni descritte da Heidenhain e da Nicolas) non è ancora precisata la natura.

(1) Le stesse specie di leucociti vedonsi anche nel connettivo della mucosa.

Se ora, conosciuti i costituenti dello strato epiteliare, passiamo a studiare la rigenerazione de' suoi due costituenti essenziali (cellule protoplasmatiche e cellule mucipare), troviamo che essa è dovuta a quegli stessi processi che abbiamo verificato nel tritone e nella lucertola.

Le cellule protoplasmatiche si moltiplicano per mitosi; e la sede delle mitosi è doppia. Troviamo, infatti, delle cellule con tale forma di scissione tanto nella porzione superficiale dell'epitelio, al disopra, cioè, del piano corrispondente ai nuclei epiteliari in riposo, quanto nella parte profonda, quasi a contatto della mucosa. Di mitosi profonde ne contai due o tre in ogni sezione trasversale d'intestino; le superficiali mi parvero un po' più scarse. Queste cifre non possono, però, aver gran valore, perchè vennero ottenute nell'inverno, in condizioni cioè diverse da quelle in cui l'epitelio si trova a intestino vivacemente funzionante nella bella stagione.

La moltiplicazione di queste cellule dà luogo alla produzione di cellule giovani di ricambio. Queste, però, appaiono più scarse che nella lucertola, e, naturalmente, assai più scarse che nel tritone. Infatti, esse si vedono sparse qua e là fra le cellule protoplasmatiche, tanto nell'epitelio dei fornici (fig. 5 *c*) quanto in quello delle creste. Non mai arrivano a costituire uno strato continuo, e tanto meno dei germogli subepiteliari. L'epitelio della rana, quindi, si avvicina, più che quello della lucertola e del tritone, al tipo dell'epitelio cilindrico semplice, ad un solo strato.

Quanto alle cellule mucipare, sono riuscito a riconoscere che anche nella rana, come nel tritone, *le loro forme giovani stanno nel profondo dello strato epiteliare*, e che è solo ad un periodo più avanzato della loro vita che arrivano, con quella loro estremità che secerne muco, alla superficie dell'epitelio. Nella figura 5 *b* ho ritratto appunto una di queste cellule mucose giovani; si vede come essa sia racchiusa fra le metà profonde delle cellule protoplasmatiche, e come quasi tutto il suo corpo sia costituito da un ammasso di granuli mucosi. Questi ultimi, al pari di quelli delle cellule adulte cui assomigliano per forma e grossezza, presentano la reazione caratteristica del colorarsi in giallo colla safranina.

Queste cellule mucose giovani si trovano a preferenza nell'epitelio che riveste i fornici. In ogni sezione d'intestino (porzione posteriore) io ne trovai un paio. Qui pure, però, devo notare,

che si trattava di rane esaminate in inverno, in stagione, cioè, in cui la rigenerazione epiteliare deve essere minima.

Anche nelle rane, adunque, si conferma che le cellule caliciformi non sono il prodotto di una trasformazione, di una degenerazione delle comuni cellule epiteliari, come Paneth ed altri vorrebbero. Le loro forme giovani si distinguono per aver già una costituzione, un contenuto specifico.

Epitelio muciparo dello stomaco del cane.

Trattando della struttura delle ghiandole rettali del cane io ho messo in rilievo, come esse siano particolarmente favorevoli allo studio dello sviluppo delle cellule mucipare ed alla dimostrazione del fatto, che queste ultime sono elementi ben caratterizzati fino dal principio della loro vita, giacchè esse possono contener muco, ed essere, così, differenziate *specificamente* quando ancora stanno moltiplicandosi per cariocinesi.

A meglio confermare questo fatto ho pensato bene di istituire delle osservazioni sulla mucosa dello stomaco dello stesso animale, ove le condizioni dello studio dovevano essere ancora più favorevoli che nel retto. Infatti, nello stomaco (superficie libera della mucosa, e fossette gastriche) oltre all'aversi una vivace rigenerazione dell'epitelio di rivestimento, si ha anche il vantaggio che l'epitelio stesso è tutto costituito di cellule mucipare, sicchè c'era da aspettarsi che le mitosi mucose vi si dovessero trovare in gran numero.

Ho incominciate le mie indagini dalla porzione pilorica, dove, essendo le fossette gastriche più profonde, l'epitelio muciparo è più sviluppato; per ciò mi pareva dovesse riuscire più facile seguire lo sviluppo de' suoi elementi. Ma nella regione pilorica non si ottengono colla safranina e coll'ematossilina quelle colorazioni brillanti che sono necessarie per riconoscere con sicurezza i più piccoli ammassi di muco contenuti negli elementi cellulari. Dovetti, quindi, rivolgermi al fondo dello stomaco; e qui ottenni risultati che mi hanno pienamente soddisfatto.

Come è noto, le ghiandole del fondo gastrico non sboccano direttamente alla superficie della mucosa; esse, quando sono vicine allo sbocco, si assottigliano alquanto (costituendo così il *colletto* ghiandolare, Drüsenhals di Heidenhain) e svuotano il loro

secreto in quelli infossamenti della mucosa che prendono il nome di *fossette gastriche.*

Ora, il rapporto fra i colletti ghiandolari e le fossette mi pare non sia stato esattamente descritto e disegnato dagli osservatori; del che non dobbiamo meravigliarci, considerando che in questa parte della mucosa i tubuli ghiandolari sono assai numerosi e tortuosi, sicchè nella sezione microscopica difficile è seguirli distintamente per un certo tratto del loro decorso. — Di solito si ammette che i colletti ghiandolari vadano singolarmente a metter capo nel fondo della fossetta. Ne' miei preparati, invece, io osservai assai di frequente (fig. 7ª) che a variabile, ma generalmente breve distanza dalla fossetta (fig. 7ª I), i colletti di due ghiandole (fig. 7ª III) vicine si fondono in un condotto unico (fig. 7ª II) e un po' più grosso, il quale, poi, va effettivamente a metter capo al fondo della fossetta.

Questi brevi condotti, adunque, mettono in rapporto le ghiandole colla fossetta, epperò io li chiamo *dotti collettori.* Siccome al fondo di ogni fossetta troviamo gli sbocchi di tre o quattro dotti collettori, e siccome ognuno di questi, come dissi, a breve distanza si biforca e dà origine a due ghiandole gastriche, così ne deriva che ad ogni fossetta corrispondono 6-8 ghiandole; del che possiamo persuaderci tanto studiando dalle sezioni verticali, quanto confrontando fra loro delle sezioni orizzontali della mucosa fatte in serie. Non considero qui quelle altre biforcazioni delle ghiandole che talora si osservano in parti più profonde della mucosa.

Riguardo all'epitelio che riveste queste diverse parti, si posson distinguere con Heidenhain, venendo dal profondo alla superficie: 1° *l'epitelio ghiandolare;* 2° *l'epitelio del colletto*, che, succedendo al precedente, effettivamente occupa quasi tutto il colletto; 3° *l'epitelio cilindrico,* che occupa il resto del colletto, e s'innalza fino a rivestire la superficie libera della mucosa. I limiti fra l'una e l'altra specie di epitelio non sono costanti. Ciò vale specialmente per l'epitelio cilindrico, il quale, come già aveva osservato Heidenhain (l. c., p. 371), s'inoltra ora più, ora meno profondamente nei colletti ghiandolari.

Epitelio ghiandolare. — È costituito da quelle due specie di cellule che vennero rese note dalle ricerche di Heidenhain e di Rollett, cioè dalle cellule *principali* (Hauptzellen) o *adelomorfe*, e dalle cellule di *rivestimento* (Belegzellen) o *delomorfe.* Non mi dilungo a descriverle, non avendo nulla da aggiungere a quanto ne hanno scritto i due sovracitati, e gli altri più recenti osservatori.

Epitelio del colletto ghiandolare. — La sua forma fu, invece, oggetto di controversia, giacchè Rollet lo descrisse costituito soltanto da Belegzellen diventate assai numerose, e quindi disposte l'una contro l'altra, mentre Heidenhain vide disposte fra di esse anche delle cellule principali. L'osservazione di Heidenhain venne confermata dagli osservatori posteriori, come da Jukes, e specialmente da Stöhr. Mi sembra, però, che la descrizione che ne dà quest'ultimo sia meno esatta di quella che ne aveva dato Heidenhain 12 anni prima. Infatti Stöhr (Arch. f. m. Anat. vol. 20) asserisce che nel colletto le cellule principali non di rado assomigliano assai a quelle di rivestimento, e se ne distinguono soltanto pel « dunkleren Aussehen » di queste ultime (l. c. p. 226), mentre Heidenhain scrive che su buone sezioni trasversali le cellule principali appaiono « als sehr kleine kegelförmige Zellen, mit der breiten Basis der Wand aufsitzend, mit der Spitze das Drüsen-Lumen erreichend. Sie besitzen einen granulirten, mitunter leicht gefärbten Inhalt, und einen der Basis nahe gerückten, schwach tingirten Kern. »

Ecco come, secondo le mie osservazioni, starebbero le cose. L'epitelio del colletto contiene effettivamente, oltre alle cellule di rivestimento, anche delle cellule principali, le quali, compresse come sono dalle prime (che sono così numerose nel colletto) presentano forme assai svariate; sicchè hanno forma, ora, come le descrisse Heidenhain, di piramide colla base alla periferia, ora, invece, di piramide colle base all'interno, ora di cilindro e così via. Esse (fig. 8ª *b*), paragonate colle corrispondenti cellule principali del corpo della ghiandola (fig. 8ª *a*), presentano però delle differenze riguardanti: 1° la *grandezza*, poichè sono alquanto più piccole; 2° il *protoplasma*, infatti nelle cellule del corpo ghiandolare il protoplasma (sia nei preparati induriti in alcool, e colorati colla safranina, coll'azzurro di metilene (fig. 8) o coll'ematossilina, sia in quelli induriti in liquido di Hermann e poi colorati colla safranina) appare sotto la forma di una sostanza chiara, omogenea, attraversata da un reticolo a trabecole piuttosto grosse e intensamente colorate; mentre nelle corrispondenti cellule del colletto le trabecole diventano sempre più sottili e meno colorabili; 3° il *nucleo*, che nelle cellule delle ghiandole è piuttosto rotondeggiante e collocato il più delle volte ad un po' di distanza dalla base delle cellule, mentre in quelle del colletto è schiacciato contro la base cellulare, e vi acquista, quindi, la forma di una ciotola.

Queste modificazioni, verificantisi nelle cellule principali quando passano dal corpo della ghiandola nel rispettivo colletto (fig 8ª), hanno luogo gradatamente. Ciò si può accertare scegliendo per l'esame delle ghiandole il cui colletto sia povero in cellule di rivestimento; giacchè, nel caso contrario, queste ultime, col loro corpo grosso e granuloso, interrompono ad ogni tratto la serie delle cellule principali, le nascondono in parte alla vista, e rendono difficile lo studiarne i caratteri.

Riassumendo, l'epitelio del colletto si distingue da quello della ghiandola: 1° perchè le cellule di rivestimento vi sono più numerose; 2° perchè le cellule principali vi si fanno gradatamente più piccole, a protoplasma più chiaro, ed a nucleo fortemente schiacciato alla base dell'elemento.

Epitelio cilindrico. — A riguardo di questo è, innanzi tutto, da ricordare una particolarità primamente messa in luce da Heidenhain, e consistente in questo, che nella zona rivestita da epitelio cilindrico si trovano ancora tratto tratto delle cellule di rivestimento (fig. 6ª *c*, *d*, *e*), le quali arrivano così fino nell'epitelio della superficie libera della mucosa. Il loro numero varia notevolmente da un animale all'altro, e diminuisce gradatamente man mano si va dal profondo verso la superficie della mucosa.

Come già venne notato dagli osservatori che si occuparono di questo argomento, le cellule cilindriche non hanno tutte lo stesso aspetto; esse si modificano notevolmente procedendo dal profondo (cioè dove confinano coll'epitelio del colletto) verso le fossette gastriche. Nei colletti (fig. 7ª *a*), nei dotti collettori (figura 6ª *c*) cominciano come cellule piuttosto corte, a protoplasma granuloso. Andando verso la superficie della mucosa diventano più lunghe (fig. 6ª *d*) e la parte interna del corpo cellulare acquista aspetto più omogeneo. Queste differenze accennano ad una evoluzione degli elementi cellulari che è collegata colla loro funzione di secernere muco.

Ciò si mette in piena evidenza nei pezzi induriti in liquido di Hermann, nei quali il muco sia stato intensamente colorato colla ematossilina (fig. 6ª). In essi io ho potuto accertare che le cellule cilindriche tappezzanti i dotti collettori, ed eziandio quelle che stanno, più in basso, in immediata vicinanza delle cellule principali dei colletti, non hanno tutto il loro corpo di natura protoplasmatica, come vorrebbero alcuni, p. es. Trin-

kler (1); poichè in corrispondenza della loro estremità libera esse contengono già un piccolissimo blocco di muco (fig. 6 *c*).

Man mano che si avvicinano alle fossette, la quantità del muco va aumentando. Finchè nelle fossette (fig. 6ª *d*) il blocco mucoso occupa la metà, o più della metà, del corpo cellulare; ed a questo modo si continua in tutte le cellule della superficie libera della mucosa.

Quanto al loro nucleo, si può facilmente confermare l'asserzione di Moschner (*Inaug.-Diss.*, Breslau 1885, pag. 17) che esso ha forma ovale, ed è disposto nel senso dell'asse maggiore della cellula, e ad una certa distanza dalla base di questa

Ed ora veniamo alle mitosi.

Le *mitosi* nell'animale adulto sono estremamente rare nell'epitelio ghiandolare (2). Rarissime sono pure nell'epitelio del colletto; quella che ho disegnato nella fig. 6ª *b* era in quella parte del colletto che immediatamente confinava coll'epitelio cilindrico.

Fra le cellule cilindriche dei colletti e dei dotti collettori, invece, le mitosi sono frequentissime. Del pari frequentissime sono nell'epitelio della parte profonda delle fossette; non è raro vedere delle sezioni trasverse di fossette che, in questa regione, conteng no ciascuna 3-4 e più mitosi, ad onta che la sezione non abbia che 5-10 μ di spessore. Venendo più in su, le mitosi vanno rapidamente diminuendo; sono rare nel terzo medio delle fossette, mancano nel terzo superiore.

Quanto alla natura delle mitosi, quelle che stanno fra le cellule principali del colletto (fig. 6ª *b*) mi apparvero sempre di natura prettamente protoplasmatica. La sostanza corticale della cellula appare finamente granulosa; la parte centrale è chiara, omogenea, e soltanto attraversata da qualche filamento granuloso. Invece nell'epitelio cilindrico tappezzante la parte superiore dei colletti ed i dotti collettori, fra le mitosi protoplasmatiche se ne notano altre, e non poche, *che contengono un piccolo blocco di sostanza mucosa*. Ciò si dimostra con piena chiarezza nei preparati induriti nel liquido di Hermann e colorati con safranina ed ematossilina (fig. 6ª *c*); il blocchetto di muco, collocato sempre nella parte superficiale della cellula, appare di color violetto, a lato del nucleo in mitosi colorato intensamente in rosso.

(1) Trinkler. *Arch. f. mikr. Anat.* XXIV, p. 200, 1885.

(2) Bizzozero e Vassale. Virch. Arch., vol. 110, p. 165.

Nel fondo delle fossette, poi, le mitosi contenenti sostanza mucosa (fig. 6ª *d*) si possono dire predominanti per numero sulle protoplasmatiche; fra esse talora ne vidi alcune che contenevano due blocchetti di muco, l'uno al disopra, l'altro al disotto del nucleo (fig. 6ª *e*).

Non occorre aggiungere, che le mitosi sono rappresentate in tutti i loro diversi stadi, quantunque predominino quelle allo stadio di piastra equatoriale. Esse si possono seguire fino alla scissione della cellula, con produzione di due *cellule gemelle*, che ricordano quelle delle ghiandole rettali dello stesso animale.

In complesso, fra le mitosi mucose delle ghiandole rettali e quelle delle fossette del fondo gastrico del cane ho notato questa differenza, che le prime sono più ricche di sostanza mucosa delle seconde; nelle prime il muco occupa quasi tutta la cellula, mentre nelle seconde si limita ad uno, o, al più, a due blocchi ai poli opposti del nucleo scindentesi.

La conclusione che si può trarre dai fatti testè descritti non può essere che questa: che l'epitelio muciparo rivestente la superficie dello stomaco trae la sua origine da quello che si trova nella parte profonda delle fossette e da qui si approfonda fin nel colletto delle ghiandole gastriche. Infatti: 1° andando dal profondo verso la superficie noi troviamo una evoluzione progressiva degli elementi cilindrici secernenti muco; 2° è soltanto nel profondo che si trovano cellule in mitosi, e, inoltre, queste mitosi, contenendo già muco, si dimostrano effettivamente appartenenti alla classe degli elementi mucipari. Esse sono, poi, così numerose che bastano da sole a spiegare la rigenerazione così attiva del l'epitelio della mucosa gastrica. —

Le mitosi del colletto ghiandolare hanno forse qualche rapporto anche con una rigenerazione degli elementi specifici delle ghiandole gastriche? — Questo quesito venne già posto da altri osservatori, e recentemente Salvioli (1) si mostrò disposto a rispondere affermativamente.

Nel lavoro che ho fatto con Vassale noi abbiamo notato, che nell'epitelio specifico delle ghiandole del fondo gastrico di vari animali si trovano bensì delle mitosi, ma in numero straordinariamente scarso. Siccome, però, non si hanno cognizioni precise sul grado di stabilità (cioè sulla durata della vita) degli elementi dell'epi-

---

(1) Salvioli. *Journal de Krause.* 1890, Bd. VII, Heft 10.

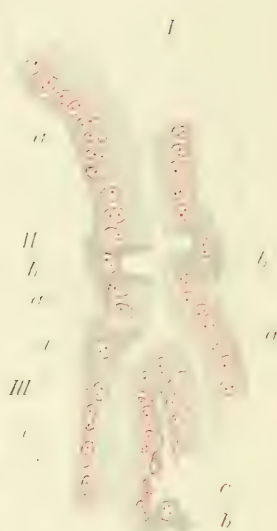
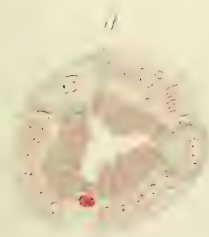



Fig. 1
Fig. 2
Fig. 7
Fig. 3
A
B
Fig. 5
III
Fig. 6
Fig. 8

telio specifico, così non si può dire se il numero degli elementi prodotti da queste mitosi basti a sostituire gli elementi che si suppone vadano man mano distruggendosi.

Io non ho fatto studi per risolvere questa questione. Debbo, però, notare un fatto che mi sembra favorevole all'ipotesi di Salvioli, o che, per lo meno, non le è contrario; il fatto è questo, *che nel colletto ghiandolare non c'è limite netto che separi l'epitelio del colletto da quello cilindrico muciparo.* Fra le cellule principali del primo (fig. 7ª *c*) e le cellule cilindriche del secondo (fig. 7ª *a*) ci sono delle forme intermedie; delle cellule, cioè, in cui i nuclei da schiacciati si fanno rotondeggianti, e poi ovali, mentre le rispettive cellule, non più comprese fra le cellule parietali (ormai diventate assai scarse), assumono una forma regolarmente cilindrica, e acquistano un protoplasma finamente granuloso. È a queste cellule che, venendo più in su, seguono degli elementi, che hanno lo stesso aspetto, ma che, pel piccolo blocco di muco che presentano alla loro estremità libera, si dimostrano già appartenenti all'epitelio muciparo.

A questo modo si arriverebbe al concetto, che le mitosi che si trovano agli sbocchi delle ghiandole del fondo gastrico abbiano doppio destino: alcune, procedendo verso la superficie della mucosa, servirebbero alla rigenerazione dell'epitelio muciparo; altre, andando invece verso il profondo, servirebbero a quella dell'epitelio specifico. Ma se la loro trasformazione in elementi mucipari è, dopo le mie osservazioni, da considerarsi come certa, altrettanto non si può dire della loro trasformazione in elementi ghiandolari specifici.

Per giungere a ciò, da una parte si dovrebbe dimostrare che questi ultimi normalmente si distruggono e si rigenerano, dall'altra si dovrebbe trovare qualche carattere specifico del protoplasma che fosse comune tanto alle mitosi quanto a quelli elementi specifici nei quali si suppone ch'esse siano per trasformarsi, in modo che non si potesse dubitare dei loro rapporti di parentela.

Le zone terziarie di Vernasca e Vigoleno nel Piacentino;

Studio geologico del Dott. FEDERICO SACCO

Nella vasta regione piacentina, tanto tipica e famosa per lo sviluppo del Pliocene e per la straordinaria ricchezza in fossili che presenta tale terreno, sonvi due zone, relativamente ristrette, le quali hanno una *facies* litologica e paleontologica alquanto diversa da quella della restante regione terziaria, per modo che i diversi geologi che se ne occuparono, specialmente Doderlein, Pantanelli, Taramelli, Trabucco, Toldo, ecc., ebbero ad emettere al riguardo opinioni assai svariate, spesso fra loro contraddítorie, nè si venne finora ad un accordo al riguardo. Tali zone trovansi nei dintorni dell'elevato paesello di Vernasca e del mirabile castello di Vigoleno.

In questi ultimi anni facendo il rilevamento geologico dell'Appennino settentrionale (1) ebbi pure ad esaminare le regioni sovraccennate, ed essendomi sembrata abbastanza chiara la loro interpretazione stratigrafica, parmi opportuno di presentare al riguardo una breve nota speciale, corroborata da una carta geologica in grande scala, esponendo sinteticamente il mio modo di vedere, senza però entrare in minute discussioni, che trarrebbero facilmente alla polemica, al che l'argomento in esame si presterebbe troppo bene.

Cretaceo.

In un lavoro speciale (2) ebbi già a sviluppare il concetto che la complessa formazione appenninica indicata col nome com-

(1) F. Sacco, *L'Appennino settentrionale*, (parte centrale) — Carta geologica alla scala di 1:100000, 1891. — Studio geologico. Boll. Soc. geol. ital., con 2 tavole vol. X, 1891

(2) F. Sacco, *L'âge des formations ophiolitiques récentes*. Mém. Soc. belg e Géol., Paléont. etc., tom. V, 1891.

preensivo di *Flysch*, *Liguriano*, *Etrurico*, *Modenese*, ecc., e considerata finora come eocenica, sia invece da scindersi in due serie distinte, una inferiore potentissima (costituita di Arenarie (*Macigno*), *Calcari Alberesi*, Argilloschisti, Argille scagliose, Galestri, Schisti diasprigni, ecc., con lenti ofialitiche) attribuibile al *Cretaceo*, ed una superiore, meno potente (rappresentata da calcari marnosi) a Fucoidi (schisti marnoso-argillosi, ecc.), riferibile all'Eocene, specialmente al *Parisiano*.

Tale ipotesi, basata su numerosi fatti litologici, stratigrafici e paleontologici, venne poi maggiormente svolta nel sovraccennato lavoro speciale sull'Appennino settentrionale.

Nella limitata regione di cui vogliamo ora occuparci presentasi sviluppatissima la formazione cretacea, rappresentata specialmente da argilloschisti e da argille scagliose brunastre o violacescenti, talora rossiccie, come sul fianco settentrionale del M. Sirgallina, tra i Baroni e C. Riotto in Valle Ongina, nella vallecola sotto i Magrini, in molti punti di Val Stirone, specialmente sul suo lato sinistro tra il Pianazzo, la Villa ed il Gruppo, nonchè tra Predera e gli Albarelli, ecc. Tra le argille scagliose abbondano pure gli straterelli arenacei ed arenaceo-calcarei, e non sono rare le lenti ofialitiche come a Pietra Nera, in Val Reccola, a monte ed a valle del Pianazzo, ecc., ecc.

La stratigrafia della formazione cretacea è alquanto conturbata, ma in complesso sembra costituire una antichinale coll'asse diretto ad un dipresso da Vernasca a C. Mezzone.

Parisiano.

A questo terreno, sviluppatissimo e potentissimo poco più a Sud, appartengono soltanto, nell'area in esame, alcuni lembi di calcari marnosi bianchicci e di marne grigiastre friabili a Sud di Vernasca, veri lembi staccati, residui della prossima estesa formazione *parisiana* di M. Burgazzi.

Messiniano.

Sopra all'estesa e potentissima formazione cretacea che si abbassa gradatamente a Nord, si sviluppano ampiamente nel

Piacentino i terreni pliocenici tipici litologicamente e paleontologicamente. Ma alla loro base compaiono qua e là speciali zone sabbioso-arenacee, talora ghiaioso-conglomeratiche, le quali sono senza dubbio attribuibili al *Messiniano*, terreno il quale con *facies* simile sviluppasi estesamente ad Ovest nel Pavese e ad Est nel Parmense; d'altronde esso deve pure esistere lungo le falde appenniniche del Piacentino, solo che fu generalmente ricoperto e mascherato dai terreni pliocenici e quaternari, apparendo soltanto in pochi punti sul margine della zona pliocenica.

Sotto Vernasca, verso Val d'Arda, compaiono sotto al terreno pliocenico alcuni banchi *messiniani* sabbioso-arenacei, grigio-giallastri, inglobanti irregolarmente lenti ciottolose od anche pseudo-brecciose, talora ad elementi abbastanza notevoli; il tutto si presenta quasi orizzontale o con leggiera pendenza a N. E. od a Nord circa. Tale zona è anche riconoscibile in parte orograficamente per costituire una specie di gradino nella sua parte terminale.

In Valle Ongina riaffiorra un altro piccolo lembo *messiniano*, arenaceo-ciottoloso, al termine della discesa della strada di Vernasca; ed una zona più estesa sviluppasi a S. S. E. della C. Riotto, colla solita *facies* di banchi sabbioso-ciottolosi, grigio-giallastri, leggermente inclinati a N. N. E.

Ma i più estesi ed interessanti lembi *messiniani* appaiono nelle colline di Vigoleno ad Est ed Ovest di questo paese. Infatti, ad un dipresso tra le borgate dei Becchi, dei Bandiera e dei Magrini, sviluppasi una zona di marne, sabbie ed arenarie grigiastre o giallognole, che comprendono strati assai ricchi in fossili marini, ed inglobano inoltre due tipiche lenti di gesso, utilizzate industrialmente; tettonicamente questa zona sembra costituire una leggiera conca, aperta forse verso N. E., poichè mentre i suoi strati pendono per lo più a N. E. presso i Magrini ed a N. O. presso i Bandiera, invece le marne sabbiose assai fossilifere dei Gorghera inclinano talora dolcemente verso Sud-Est.

I fossili sono marini, in parte però alquanto frantumati; nel complesso s'accordano specialmente colla forma *piacenziana*, ma sonvi pure alcune forme *tortoniane*.

Quanto ai Gessi in questione è noto come alcuni geologi li attribuiscano alla formazione delle argille scagliose; io invece non dubito che appartengano al vero e tipico *Messiniano*.

Ad Est di Vigoleno riappaiono le marne calcaree, le sabbie e le arenarie grigio-giallastre del *Messiniano*, tra la Predera ed i Pelorsi, inclinando quivi specialmente a N.N.O.

Piacenziano.

È a tutti noto lo sviluppo, la costituzione, la potenza e la straordinaria ricchezza in fossili che presenta il Pliocene inferiore nel subappennino piacentino, tanto che ne ricevette il nome.

La formazione *piacenziana* è costituita da una serie di strati marnosi grigio-bleuastri, talora più o meno sabbiosi, quasi orizzontali o inclinati solo di 2° a 6° circa verso il Nord con oscillazione a N.O. od a N.E.; il suo spessore visibile è talora di oltre 150 m., ma è probabile che verso valle esso sia molto più forte. Questo terreno nella sua parte superiore, di passaggio all'*Astiano*, diventa sempre più sabbioso, più grigio-giallastro, passando gradualmente alle sabbie gialle *astiane*, come vedesi per esempio sopra Lugagnano, al M. La Ciocca, ecc.; ma nelle sue propaggini più meridionali, più entroappenniniche direi, il *Piacenziano* superiore diventa in gran parte arenaceo, giallastro, talora anche localmente ghiaioso-ciottoloso, solo più con qualche letto grigio-bleuastro sabbioso-marnoso, cioè assume quasi completamente la *facies astiana*; ne risulta quindi una incertezza nella distinzione tra il Pliocene inferiore ed il superiore. Considerando però che trattasi di lembi quasi entroappenninici e che rappresentano quindi l'estremità meridionale di golfi pliocenici, per modo che anche durante il periodo *piacenziano* dovevano essere essi quivi poco profondi e sublittoranei, ne risulta che sembra più logico attribuire questi banchi sabbioso-arenacei giallastri al *Piacenziano*, piuttosto che non all'*Astiano*, a cui sarebbero certamente riferibili a primo tratto.

Tale zona intermedia appare già nel promontorio, direi, di Vernasca; ma sviluppasi poi complessivamente nelle colline di Vigoleno, dove inoltre si presenta straordinariamente ricca in fossili, specialmente nella valletta che separa il promontorio su cui sta il paese di Vigoleno dalla restante massa collinosa a Nord, nonchè ai Varani, verso i Bandiera, ecc. ecc.; i fossili sono particolarmente abbondanti nella metà inferiore della sovraccennata zona arenacea del *Piacenziano*, dove sono pure frequenti le sorgenti acquee.

È a notarsi come i fossili del *Piacenziano* di Vigoleno per quanto abbiano una *facies* complessivamente pliocenica, presentino tuttavia alcune forme che sono piuttosto comuni nel *Tortoniano*, tanto che alcuni autori vorrebbero parallelizzare questi terreni al *Tortoniano*, ciò che non credo accettabile.

Siccome però nelle colline di Vigoleno non soltanto il *Piacenziano* ma anche il *Messiniano* racchiude fossili marini, non è a stupirsi che in queste regioni si incontrino anche fossili che ricordano la fauna miocenica.

Nel profondo burrone che esiste tra i Vassalli ed i Fornasari, è messa stupendamente a nudo l'intiera serie pliocenica, la quale vi si presenta in gran parte sabbioso-arenacea, con interstrati marnosi: non sarebbe poi improbabile che la parte inferiore di questa serie dovesse già riferirsi al *Messiniano*, come l'indicherebbe la natura sabbiosa di questi terreni inferiori, ma non potei ancora trovare un fatto indiscutibile per sciogliere tale questione.

Quanto alla stratigrafia delle pliocene del colline di Vigoleno è notevole che quivi esso costituisce una specie di leggiera conca o di seno locale, giacchè mentre sul lato meridionale gli strati pendono regolarmente di pochi gradi a Nord circa, invece sul fianco occidentale essi inclinano piuttosto verso Est o S.E., e sul lato settentrionale i banchi presentano una pendenza bensì a N.E. in generale, ma mostransi anche suborizzontali o leggermente inclinati a Sud. D'altronde tale conca è già accennata dal fatto della zona cretacea che affiora ad un dipresso lungo la linea Magrini-Fornasari, staccando così la zona *messiniana* da quella pliocenica.

Astiano.

Il Pliocene superiore, o *Astiano*, presenta in tutto il piacentino la solita, caratteristica *facies* di sabbie ed arenarie giallastre, talora giallo-rossiccie, spesso riccamente fossilifere, specialmente nella sua parte basale, di passaggio al *Piacenziano* inferiore.

Nelle regioni in esame, specialmente nelle colline di Vigoleno, l'*Astiano* parrebbe assai sviluppato se ci fondiamo solo sulla *facies* complessiva; ma secondo le considerazioni sopraesposte, credo più logico limitare tale orizzonte ai più elevati banchi

arenacei, giallastri, compatti, i quali rappresentano i lembi staccati di un velo *astiano* assai più esteso in origine, dovendosi esso collegare alle formazioni *astiane* che sviluppansi ampiamente più a Nord; tali lembi residui debbono in parte la loro conservazione appunto alla loro speciale compattezza e resistenza all'erosione, nonchè, per la zona di Vigoleno, alla speciale configurazione a seno o conca che qui si verifica.

È notevole osservare che l'*Astiano* di Vigoleno si spinge sin quasi a 480 metri sul livello del mare, ciò che, tenuto conto di quanto dovette certamente essere esportato, ci conduce ad ammettere per la regione subappennina in esame, un sollevamento di oltre 500 metri, dalla fine dell'epoca pliocenica al giorno d'oggi.

Terrazziano.

Le formazioni diluviali del *Sahariano* sviluppansi poco a Nord dell'area in esame. Durante il periodo *terrazziano* le acque erosero ampiamente ed incisero profondissimamente tutti i terreni, specialmente i pliocenici, lasciando solo più come residuo un sottile deposito alluvionale che ricopre il fondo delle valli. Il quantitativo di erosione fatta dalle acque durante il solo periodo *terrazziano* si può valutare in alcune regioni ad oltre 200, 250 metri, come per esempio in Val d'Arda presso Lugagnano ed altrove.

Conclusione.

Dal sovraesposto possiamo concludere quanto segue:

1° Nelle zone terziarie di Vernasca e di Vigoleno non appare nè il *Langhiano*, nè l'*Elveziano*, nè il *Tortoniano*, come è ritenuto da alcuni autori, ma solo il *Messiniano* ed il Pliocene.

2° Le lenti gessifere di Vigoleno non fanno parte della formazione delle argille scagliose, come è ammesso da taluno, ma appartengono certamente al *Messiniano*.

3° Le zone terziarie in questione, rappresentando residui di golfi protesi entro la regione appenninica, presentano già nel *Piacenziano* superiore la *facies* sabbioso-arenacea, giallastra, littoranea, che è generalmente caratteristica invece dell'*Astiano*, al quale d'altronde forma graduale passaggio.

4° La regione esaminata presenta in complesso la seguente costituzione geologica:

Terrazziano — Alluvione del fondo delle valli.

Astiano — Strati e banchi sabbioso-arenacei, giallastri, talora fossiliferi.

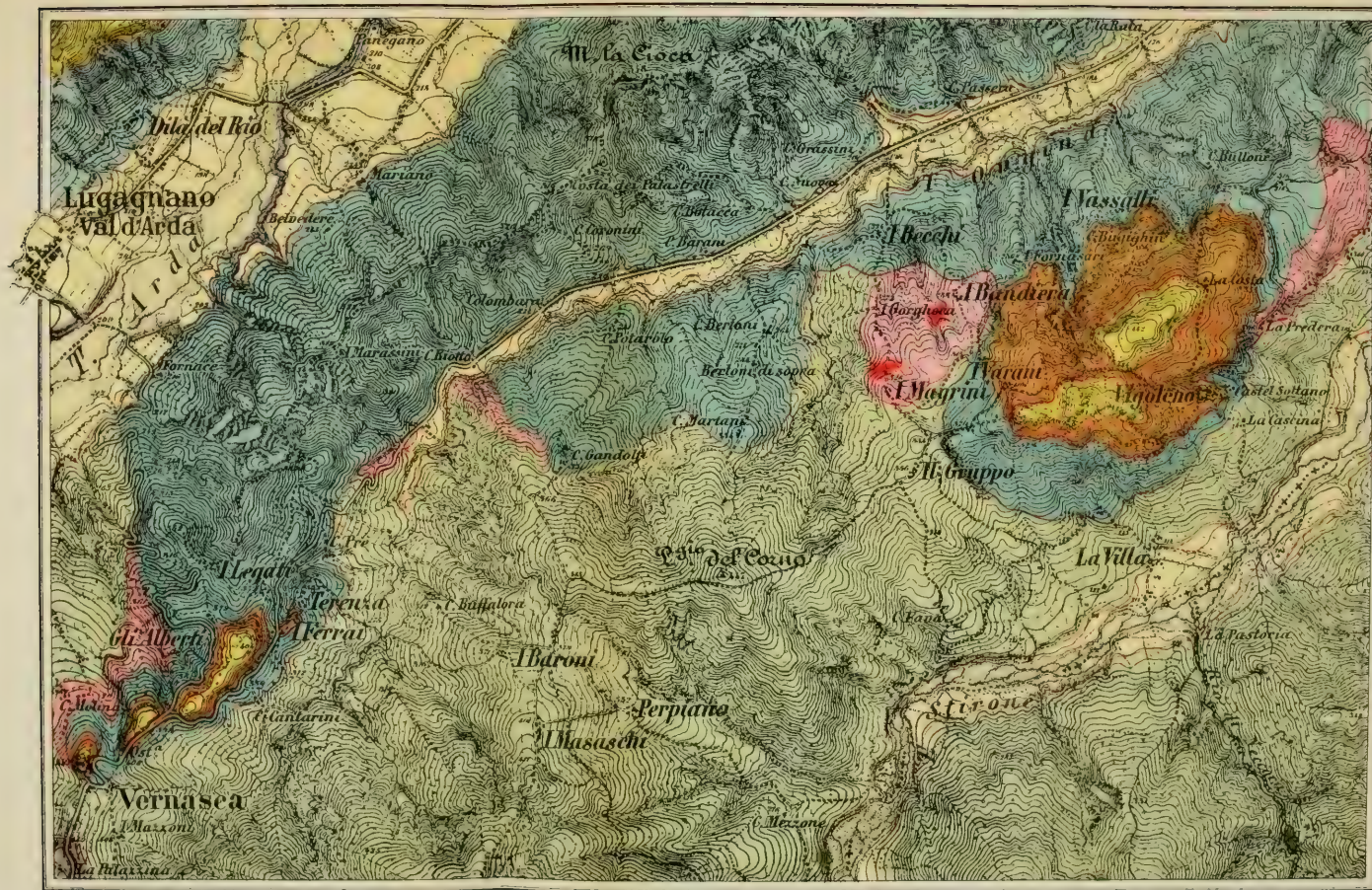
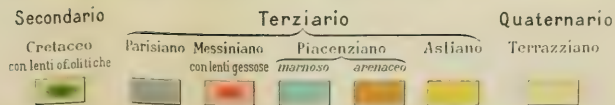
Piacenziano

- Superiore
  - Straterelli sabbioso-marnosi, grigi, spesso fossiliferi.
  - Strati e banchi sabbiosi, o arenacei, o marnosi alternati, giallastri, qua e là fossiliferi.
  - Alternanza più volte ripetuta di banchi sabbioso-arenacei giallastri, con sabbie marnose grigie, ricchissime in fossili.
  - Talora banchi arenaceo-calcari a *Lithothamnium*, *Pecten*, ecc.
- Inferiore - Potente zona di marne, talora sabbiose verso l'alto, azzurro-grigiastre, inglobanti numerosi fossili ben conservati.

Messiniano — Banchi sabbiosi ed arenacei, grigio-giallastri, con fossili marini. Sabbie, arenarie e marne grigio-giallastre con zone o lenti ghiaiose, ciottolose o brecciose, nonchè con qualche lente di gesso.

Parisiano — Calcari marnosi biancastri, marne grigiastre, ecc.

Cretaceo — Argillo-schisti, argille scagliose e galestri, a tinta bruna o violacescente o rossiccia, con interstrati arenacei e calcarei, e con lenti ofiolitiche sparse qua e là.

Lit. Salussolia - Torino

Lit. Salussolia - Torino

Scala di 1:25000 - Equidistanza fra le curve orizzontali metri 5

Un nuovo apparato per misurare basi topografiche;

Nota del Prof. NICODEMO JADANZA

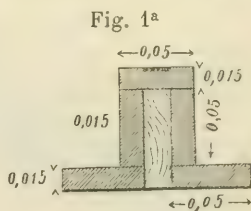
Per le basi topografiche, non essendo necessaria quella precisione che si richiede nelle basi geodetiche, sono stati immaginati apparati di misura molto semplici, consistenti per lo più in aste di abete che si succedono in linea retta lungo la traccia già segnata sul terreno. Gl'intervalli compresi fra due aste successive si sogliono misurare o mediante i così detti compassi di spessore, o mediante linguette graduate annesse alle medesime aste di misura.

Col nuovo apparato, che qui presentiamo, vogliamo introdurre in topografia il metodo adoperato primieramente dal Porro (*) consistente in un'asta graduata alle due estremità con cui si misura l'intervallo tra gli assi di microscopi già disposti nel piano verticale passante per la verticale di uno degli estremi della base e per l'altro. Esso consiste essenzialmente delle parti seguenti.

L'asta di misura.

L'asta di misura è di abete, della lunghezza di circa 4m,20 ed ha per sua sezione trasversale quella indicata dalla fig. 1a.

Essa, come vedesi, consta di cinque listelli eguali uniti insieme con colla e viti e collegate ancora da costole interne alla distanza di 1m. Gli appoggi I e II che sostengono l'asta consistono in due perni terminati a calotta sferica che entrano nell'interno del vano centrale e vanno contro la tavola superiore. L'accorciamento prodotto dalla flessione *per il peso proprio* è affatto trascurabile, non raggiungendo il *millesimo del*

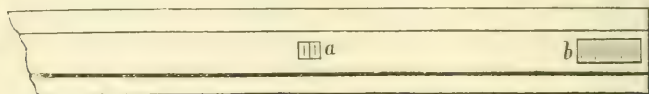
Fig. 1a

(*) Vedi nota in fine.

millimetro. Il peso dell'asta è di 8 chilogrammi. La distanza l dei due appoggi I e II è calcolata per mezzo della formola:

$$\frac{l}{L} = 0{,}55938 \quad (*)$$

in cui L è la lunghezza dell'asta.

La fig. 2ª mostra in proiezione orizzontale la faccia superiore dell'asta ora descritta.

Fig. 2ª

Essa porta ai due estremi due lastre metalliche b, c (fig. 3ª e 4ª), ciascuna della lunghezza di 10 centimetri. Esse sono divise in millimetri e numerate, dal loro punto medio ed in direzioni opposte ogni 10 millimetri.

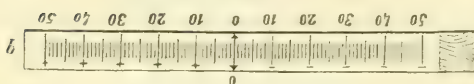



Fig. 3ª

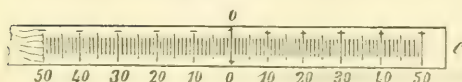
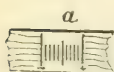
Fig. 4ª

Lo zero trovasi adunque nel mezzo di ciascuna lastra. Sulle lastre trovasi il segno + o il segno — dirimpetto a ciascun numero di diecine di millimetri; il segno + si trova su quella parte della graduazione che è verso l'estremo dell'asta, il segno — sulla parte opposta.

Fig. 5ª

Tre altre lastrine come quella rappresentata dalla fig. 5ª si trovano sulla faccia superiore alla distanza di un metro l'una dall'altra; la parte graduata di tali lastrine è della lunghezza di un centimetro ed è divisa in millimetri a destra ed a sinistra della linea centrale. Esse servono alla campionatura dell'asta.

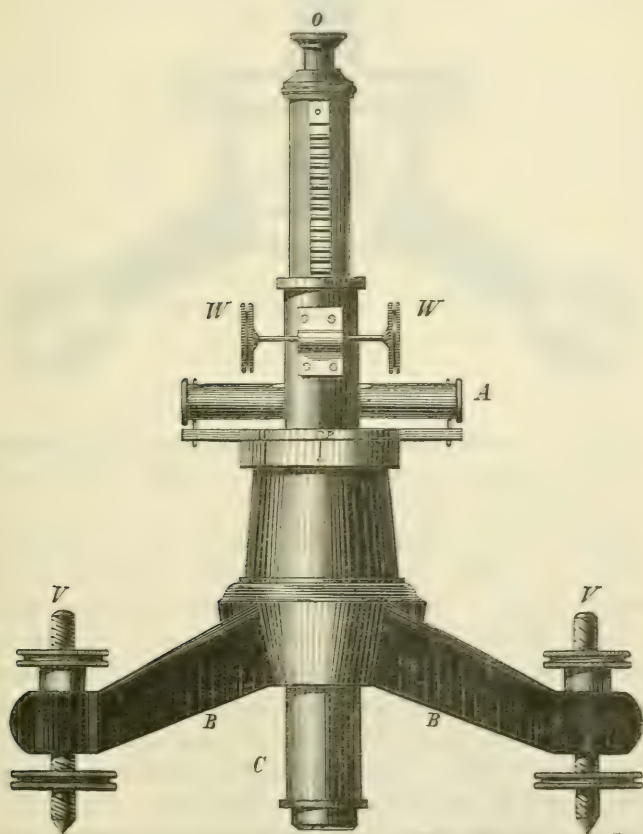
Per *lunghezza normale* dell'asta di misura s'intende la distanza compresa fra gli zeri delle due lastre b, c: codesta lunghezza sarà indicata con L.

(*) Cfr. *Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures*. Tom. VII, pag. 367.

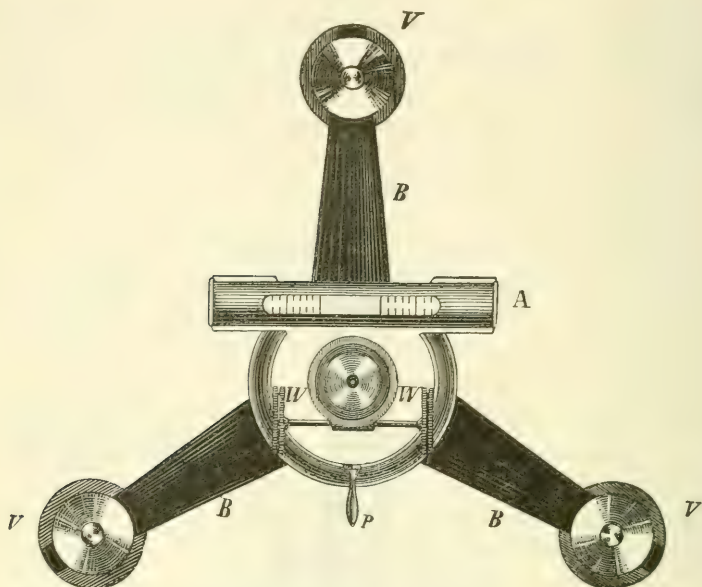
La sezione trasversale dell'asta di misura ci fu suggerita dall' egregio Prof. C. Guidi.

Il cannocchiale microscopio.

Per fare le letture delle divisioni che trovansi agli estremi dell'asta di misura, si adopera il *Plesiotelescopio* (*cannocchiale microscopio*) mediante il quale si possono osservare oggetti a distanza variabile da *zero* all'*infinito* dell'obbiettivo del medesimo. La parte esterna di esso, come vedesi nelle fig. 6ª e 7ª.

Fig. 6ª

consta di un basamento B con tre viti V, il quale porta nel suo centro il cannocchiale C e la livella A. Codesto cannocchiale

può girare intorno al suo asse verticale e per questo serve il piccolo manubrio p (fig. 7ª). La livella A serve per disporre

Fig. 7ª

verticalmente il cannocchiale CO; per facilitare tale disposizione sulla parte superiore del basamento B, vi sono degli intagli che distano di 90° l'uno dall'altro.

La parte ottica consiste essenzialmente in un cannocchiale astronomico, nel quale al secondo fuoco dell'obbiettivo si è posta una seconda lente N la cui distanza focale sia minore della distanza focale dell'obbiettivo M. Indicando con φ_1 la distanza focale dell'obbiettivo M e con φ_2 quella della lente N situata alla distanza $\Delta = \varphi_1$ dall'obbiettivo, la distanza focale φ dell'obbiettivo composto delle due lenti M ed N sarà uguale a φ_1.

Si comprende facilmente come codesto strumento possa servire alla visione di oggetti lontani e vicinissimi

Quando l'oggetto che si guarda trovasi a distanza grandissima (infinita), sull'obbiettivo M arrivano paralleli i raggi luminosi emanati dai punti dell'oggetto; la immagine di esso adunque si forma al secondo fuoco della lente M, cioè sulla lente N, la

quale, essendo di spessore trascurabile (infinitamente sottile), non porterà alcuna alterazione su detta immagine e quindi, mediante l' oculare O, si guarderà la medesima allo stesso modo come se la lente N non esistesse.

Se l'oggetto si avvicina accostandosi al fuoco anteriore della lente M, la immagine data da questa tende ad allontanarsi sempre più dal suo secondo fuoco. La lente N impedisce tale allontanamento e ne dà un'immagine reale situata tra N ed il 2° fuoco di questa. Quando l'oggetto si trova nel fuoco anteriore della lente M, questa emetterà paralleli i raggi luminosi emanati dai diversi punti dell'oggetto. Codesti raggi paralleli incontrando la lente N andranno a formare la immagine dell'oggetto nel secondo fuoco di essa.

Se l'oggetto si avvicina ancora e si trova al vertice dell'obbiettivo M, questa lente non avrà azione su di esso e quindi la sua immagine si troverà nel coniugato del vertice della lente M rispetto alla lente N. Si può fare in modo che questo punto coniugato del vertice della faccia anteriore della lente M, non cada troppo lontano dalla lente N, e questa condizione determina la distanza focale di essa lente.

Volendo che la immagine della faccia anteriore della lente M si trovi ad una distanza assegnata dalla lente N, per es.. ad una distanza uguale a $\frac{\varphi_1}{n}$, la distanza focale φ_2 della lente N si determinerà mediante la equazione:

$$\frac{1}{\varphi_1}+\frac{1}{\frac{\varphi_1}{n}}=\frac{1}{\varphi_2}$$

d'onde

$$\varphi_2=\frac{\varphi_1}{n+1}\,.$$

Nel nostro caso abbiamo dato ad n, φ_2, φ_1 i seguenti valori numerici:

$$\varphi_1=0^{m},20$$
$$n=1,8$$
$$\varphi_2=0^{m},071.$$

L'oculare poi è *ortoscopico* di distanza focale uguale a $0^{m},012$.

Il reticolo del cannocchiale è composto di due soli fili perpendicolari tra loro; nell'istante della lettura uno di essi si dispone parallelamente alle divisioni che si trovano sulle lastrine b e c e si *stimeranno ad occhio i decimi di millimetro.*

Per eliminare l'errore dovuto alla non verticalità dell'asse ottico, ciascuna lettura si farà due volte prima e dopo una rotazione di 180° del cannocchiale C intorno al proprio asse; la semisomma delle due letture, che chiameremo *coniugate*, sarà quella che corrisponde all'asse ottico verticale Nel campo del cannocchiale si vedono distintamente i segni + e — che trovansi sulle lastrine b, c; ciascuna lettura deve essere preceduta dal segno conveniente.

Rilevamento del punto a terra.

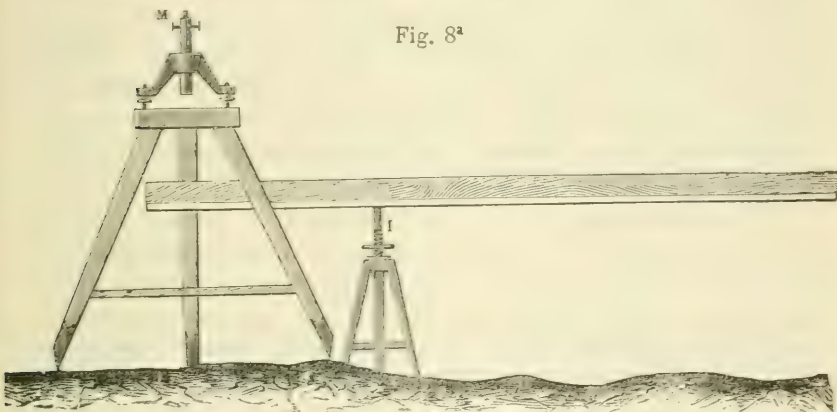
A principio ed alla fine della misura, diventa necessario trovare la distanza di uno degli estremi della base dall' asse del microscopio più vicino. Per questo vi è una lastrina metallica della lunghezza di dieci centimetri divisa anche essa in millimetri e numerata di 10 in 10 millimetri da 0^{mm} a 100^{mm}. La linea segnata 50 è più lunga delle altre e traversa in tutta la larghezza la lastrina; essa può mettersi in coincidenza del punto che segna uno degli estremi, ed uno dei lati più lunghi di essa può mettersi nella direzione della traccia della base, facendo che il 100 vada verso l'estremo più lontano. Indicando con t la media delle due letture fatte prima e dopo la rotazione di 180° del cannocchiale, la quantità $t-50$ indicherà la distanza del punto fisso a terra dall'asse del microscopio. Codesta distanza, secondo che sarà *positiva* o *negativa*, indicherà che l'asse del microscopio trovasi tra gli estremi della base ovvero fuori.

La stessa operazione dovrà farsi quando, per una ragione qualunque, convenga sospendere il lavoro. In tal caso, posto un picchetto a terra con sopra una lastra metallica nel mezzo della quale vi sieno due linee ortogonali, si determinerà, come si è detto poc'anzi, la distanza del punto d'intersezione delle due linee ora dette dall'asse del microscopio più vicino. Quando si vuol proseguire il lavoro si procederà come quando si è cominciato, ritenendo il punto a terra come uno degli estremi.

Livella.
Sostegni dell'asta di misura ed altri accessori.

È molto conveniente che l'asta di misura sia posta in posizione orizzontale prima di fare le letture ai suoi estremi. A tale scopo serve la livella che si mette nel mezzo dell'asta. I sostegni di questa sono fatti in modo da potere, per mezzo di un manubrio, avere due movimenti, uno in direzione normale alla base, l'altro in altezza.

I sostegni dei plesiotelescopi sono treppiedi comuni, uno di essi è rappresentato dalla fig. 8ª, la quale fa vedere anche come è situata l'asta di misura.

Fig. 8ª

Il corredo completo adunque dell'apparecchio consta di :

Un'asta di misura della lunghezza di 4^{m},20.
N° 3 plesiotelescopi coi relativi treppiedi.
N° 3 sostegni per l'asta.
Una livella.
Un picchetto per il punto a terra (*).

Metodo pratico per misurare una base topografica.

Dopo avere scelto gli estremi B e C della base da misurarsi, si fissino in modo stabile sul terreno, p. es. con due massi di pietra o con due grossi picchetti in legno, le cui faccie superiori siano spianate ed orizzontali. Sarà bene nel mezzo di co-

---

(*) In pratica è meglio aver 5 plesiotelescopi; riuscirà così più spedita la misura della base.

teste faccie (quando fosse necessario conservare gli estremi) incastrare due lastre metalliche su ciascuna delle quali sieno segnate due linee rette tra loro perpendicolari. La traccia del piano che passa per la verticale di un estremo e per l'altro, può essere segnata sul terreno per mezzo di un teodolite qualunque, o meglio per mezzo di un cordino teso fra i due estremi o fra punti giacenti sull'allineamento determinato dagli estremi.

Si metta il treppiede del plesiotelescopio su di un estremo, p. es., B in modo che l'asse dello strumento si proietti presso a poco sull'allineamento (ciò è sempre possibile, potendosi, come si è detto innanzi, con esso guardare oggetti a qualunque distanza) e si determini la distanza tra il punto a terra e l'asse del plesiotelescopio mediante due letture coniugate. Indi si disponga l'asta di misura sull' allineamento, e quindi il secondo plesiotelescopio all'altro estremo di essa e si disponga orizzontalmente per mezzo della livella. Dopo ciò due osservatori faranno le letture coniugate sulle lastrine b e c, quindi si scambieranno tra loro e rifaranno le letture sulle medesime lastrine. Si sarà così fatta *una portata*.

I plesiotelescopi, che sono in numero di 3, portano ciascuno su di un braccio del basamento inciso il numero corrispondente 1, 2, 3; codesto numero trovasi anche sulla piattaforma superiore del corrispondente treppiede. Essi si possono disporre in precedenza sull'allineamento, e quando si son fatte le letture ai primi due, si può togliere il primo che si metterà in seguito del 3°, intanto che l'asta di misura si farà andare sotto il 2° ed il 3° per fare la *seconda portata* e così di seguito.

Il modello per registrare la lettura potrebbe essere il seguente:

N° d'ordine	Letture sul punto a terra	Media	Letture all'estremo B		Media	Letture all'estremo C		Media	*Osservazioni*
			+	—		+	—		
1									
2									
3									

Indicando con t_b la media delle letture sul punto a terra fatte all'estremo B e con t_c la media di quelle fatte all'estremo C; con b_k e c_k le medie delle due letture fatte dal medesimo osservatore sulle lastrine b e c che trovansi agli estremi dell'asta e corrispondenti alla k^{esima} portata, si avrà per la lunghezza totale T della base la formola seguente:

$$T = nL + \sum_1^n b_k + \sum_1^n c_k + (t_b + t_c - 100)$$

essendo n il numero delle portate, ed L la *lunghezza normale* dell'asta di misura.

La campionatura dell'asta sarà bene farla prima e dopo la misura della base, si avranno così due valori di L di cui si prenderà la media.

Con questo apparecchio abbiamo fatto misurare da alcuni allievi ingegneri una base sul corso Cairoli in vicinanza del Po. Ritenuta la *lunghezza normale* L dell'asta di misura

$$L = 3^m,999702$$

come risultò dalla campionatura dell'asta stessa, fatta prima e dopo della misura della base, il risultamento ottenuto fu il seguente:

Andata (*da sud a nord*).

1° Osservatore.

$$n = 76 \qquad \sum_1^n b_k = -131^{mm},60\,; \sum_1^n c_k = +29,75$$

$$t_b + t_c - 100 = 5,05$$

$$T'_1 = 76 \times 3999^{mm},702 - 131,60 + 29,75 + 5,05 =$$

$$= 303880^{mm},552.$$

2° Osservatore.

$$n=76 \qquad \sum_1^n b_k = -130^{mm},55 \qquad \sum_1^n c_k = +29,70$$

$$t_b + t_c - 100 = 4,08$$

$$T_2' = 76 \times 3999^{mm},702 - 130,55 + 29,70 + 4.08 =$$

$$= 303881^{mm},302.$$

Lunghezza media della base nell'andata:

$$T^1 = \frac{T_1' + T_2'}{2} = 303^m,880927.$$

Ritorno (da nord a sud).

1° Osservatore.

$$n=76 \qquad \sum_1^n v^k = +615^{mm},35\ ; \qquad \sum_1^n c_k = -695^{mm},45$$

$$t_b + t_c - 100 = -7^{mm},20$$

$$T_1'' = 76 \times 3999^{mm},702 + 615,35 - 695,45 - 7,20 =$$

$$= 303890^{mm},052.$$

2° Osservatore.

$$n=76 \qquad \sum_1^n b_k = +613^{mm},05 \qquad \sum_1^n c_k = -695^{mm},40$$

$$t_b + t_c - 100 = -7,20$$

$$T_2'' = 76 \times 3999^{mm},702 + 613,35 - 695,40 - 7,20 =$$

$$= 303887^{mm},802.$$

Lunghezza media della base nel ritorno:

$$T'' = \frac{T_1'' + T_2''}{2} = 303^{m},888927$$

e quindi:

Lunghezza media della base.

$$T = \frac{T' = T''}{2} = 303^{m},884927\ .$$

Il tempo impiegato per la misura della base (andata e ritorno) è di circa 7 ore.

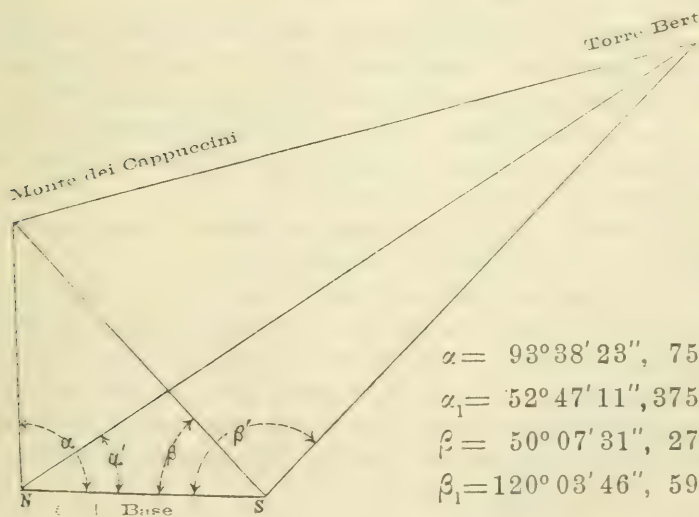
Questa base fu collegata mediante osservazioni angolari ai suoi estremi coi punti trigonometrici *Monte dei Cappuccini* e *Torre Bert*, come è indicato nella figura λ.

Fig. λ

$\alpha = 93°38'23'',75$

$\alpha_1 = 52°47'11'',375$

$\beta = 50°07'31'',27$

$\beta_1 = 120°03'46'',59$

Risolvendo il problema della distanza inaccessibile si trovò che la distanza fra Monte dei Cappuccini e Torre Bert era di $1832^{m},708$ mentre la stessa calcolata colle coordinate geografiche dell'Istituto Geografico Militare risultò di $1833^{m},583$; con una differenza di $0^{m},875$.

NOTA.

Il metodo di misurare una base geodetica fondata sulla misura della distanza tra gli assi di microscopi già disposti verticalmente lungo la direzione della base, è comunemente noto col nome di *metodo di Porro.* Ciò ha fondamento sulla relazione che trovasi a pag. 232 del volume XXXI (1850) dei *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, fatta dai Commissari BINET, FAYE, LARGETEAU (relatore), la quale conchiude così:

Les appareils de M. Porro, destinés à la mesure des bases, sont simples, ingénieusement conçus, d'un usage très-commode, d'un prix peu élevé et d'un transport facile en tout pays; ils offrent ce précieux avantage qu'on peut, sans une grande dépense et en peu de temps, mesurer la même base deux ou même trois fois.

Il Padre A. SECCHI nella misura di una base sulla via Appia (*) scelse tra gli altri il *metodo di misurare inventato dal Sig. Porro* (**), ecc.

Il primo che abbia adoperato microscopi isolati nella misura di basi geodetiche è stato senza dubbio il Sig. HASSLER nei lavori geodetici eseguiti negli Stati Uniti di America (***).

Il metodo di Hassler però è talmente differente da quello del PORRO, che è lecito supporre che questi non abbia avuto cognizione delle opere di HASSLER.

Il metodo del PORRO è stato perfezionato specialmente per opera di SECCHI, HOSSARD, SALMOIRAGHI.

I due apparati adoperati nella Spagna, cioè quello appartenente alla COMMISSION DEL MAPA e l'altro del Generale IBAÑEZ, si possono ritenere come derivati dal tipo HASSLER. Però essi, che oggi sono i più perfetti apparati per misurare basi geodetiche, debbono considerarsi come nuovi; tante sono le modificazioni introdotte dal fu generale IBAÑEZ, Marchese di Mulhacén.

Torino, Maggio 1892.

(*) Misura della base trigonometrica eseguita sulla *Via Appia* per ordine del Governo Pontificio nel 1854-55 dal P. A. SECCHI *D. C. D. G.* Roma 1858.

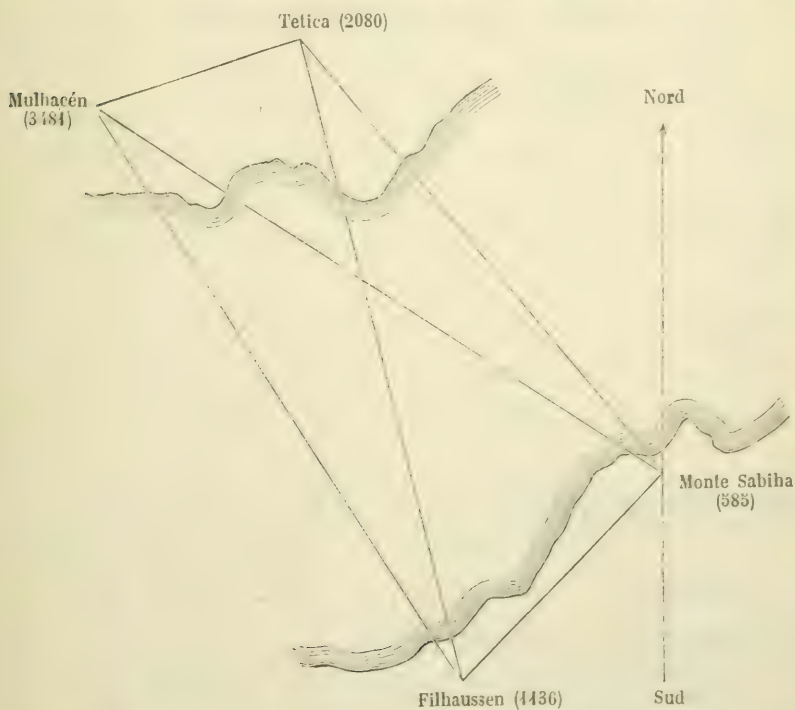
(**) L. c. pag. 53.

(***) Cfr. F. SCHIAVONI, *Principii di Geodesia*, parte 2ª, pag. 81.

Sopra alcune differenze trovate nel calcolo delle coordinate geografiche dei vertici del quadrilatero che congiunge l'Algeria colla Spagna;

Nota del Prof. NICODEMO JADANZA

I.

Tra le innumerevoli operazioni geodetiche fatte nel secolo presente è, senza dubbio, degna di particolare attenzione quella relativa al collegamento della rete geodetica dell'Algeria con la

rete geodetica di Spagna. Codesto collegamento consiste in un quadrilatero (vedi figura annessa) colle rispettive diagonali. Gli

angoli dei triangoli furono tutti osservati da provetti osservatori, a disposizione dei quali erano istrumenti della massima precisione. Il risultamento ottenuto è stato quanto di più esatto si poteva desiderare.

Tutte le operazioni, geodetiche ed astronomiche, fatte per tale collegamento nell'anno 1879, sono esposte nel *Mémorial du dépôt général de la guerre*, tom. XIII (1887). A pag. 94 di codesto volume sono registrate le coordinate geografiche (latitudine e longitudine) dei punti *Filhaussen*, *Mulhacén*, *Tetica*, calcolate mediante le coordinate geodetiche polari (*distanze* ed *azimut*) dei medesimi punti riferiti alla origine *M*[te] *Sabiha*, essendo note le coordinate geografiche di quest'ultimo punto, come pure l'azimut di Filhaussen sull'orizzonte di M[te] Sabiha.

I dati ed i calcoli relativi si possono riassumere nella tabella seguente:

Coordinate geografiche di M. Sabiha.

Latitudine $\varphi =$ 35° 39′ 37″,05

Longitudine $\theta = -$ 3° 11′ 10″,77 (da Parigi)

Azimut di Filhaussen $z =$ 226° 54′ 11″,76 (N-E-S-O).

Coordinate geodetiche polari (rispetto all'origine Sabiha):

	Distanza	Azimut
Filhaussen	$s = 105179^m,35$	$z = 226°\ 54'\ 11'',76$
Mulhacén	$s = 269847\ ,24$	$z = 305\ \ 42\ \ 57\ ,488$
Tetica	$s = 225712\ ,49$	$z = 322\ \ 02\ \ 49\ ,157$

Coordinate geografiche ottenute mediante il calcolo (*).

	Latitudine	Longitudine (da Parigi)
Filhaussen	35° 00′ 34″,64	—4° 01′ 39″,69
Mulhacén	37 03 17 ,59	—5 38 57 ,91
Tetica	37 15 14 ,71	—4 45 03 ,14

(*) Nel citato volume è scritto così: *Nous avons employé dans ce calcul les formules exactes données par M. Andrae dans la triangulation du Da-*

II.

Volendo porre a cimento alcune formole da noi date in un opuscolo che ha per titolo: *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche*, si presentava propizia l'occasione di applicare le medesime al calcolo delle coordinate geografiche degli stessi punti, *Filhaussen*, *Mulhacén*, *Tetica*.

Le formole adoperate sono le seguenti: (**)

$$\left.\begin{aligned}
3\varepsilon &= \frac{s^2 \operatorname{sen}(z-\varepsilon)\cos(z-2\varepsilon)}{2\rho_m N_m \operatorname{sen} 1''} \\
X &= s \operatorname{sen}(z-\varepsilon)\,; \qquad Y = s\cos(z-2\varepsilon)\,; \\
\log(\varphi_0-\varphi) &= \log\frac{Y}{\rho \operatorname{sen} 1''} - KY - LY^2 \\
\log(\varphi_0-\varphi') &= \log\frac{X^2}{2\rho_0 N_0 \operatorname{sen} 1''}\operatorname{tg}\varphi_0 - EX^2 \\
\log(\theta'-\theta) &= \log\frac{X}{N_0 \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi_0} - GX^2 \\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}m &= \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\varphi+\varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi)} \\
z' &= z + 180 + m + \frac{e^2}{24a^3 \operatorname{sen} 1''} s^3 \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen} z\,.
\end{aligned}\right\}\ldots(1)$$

ed il risultamento del calcolo è stato quello che trovasi nella tabella annessa.

---

nemark, formules basées sur la considération du triangle polaire. — Codeste parole non indicano chiaramente le formole adoperate per il calcolo numerico. Gli elementi dell'elissoide terrestre sono quelli di BESSEL.

(**) Cfr. N. JADANZA, *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche* (Torino. 1891, Loescher editore), pag. 36. — Le quantità E, G, K, L, sono date da apposite tavole.

	Latitudine	Longitudine
Filhaussen	35° 00′ 34″,41	−4° 01′ 40″,19
Mulhacén	37 03 18 ,08	−5 38 59 ,41
Tetica	37 15 15 ,28	−4 45 04 ,09

Tra il risultamento ottenuto da noi e quello che trovasi nel *Mémorial* citato innanzi, vi sono delle differenze che sorpassano *mezzo secondo* in latitudine ed *un secondo* in longitudine. Codeste differenze sono troppo forti per poterle addebitare alle formole da noi adoperate: abbiamo perciò pregato il prof. Paolo Pizzetti della R[a] Università di Genova a voler fare il medesimo calcolo colle formole più esatte di Bessel, cioè con le seguenti (*):

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tg} u &= \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\varphi \\
\operatorname{sen} m &= \cos u \operatorname{sen} z \\
\cos m \cos M &= \cos u \cos z \\
\cos m \operatorname{sen} M &= \operatorname{sen} u \\
\sigma = \frac{\alpha}{b}\,.\, s + \beta\cos(2M+\sigma)\operatorname{sen}\sigma &+ \gamma\cos(4M+2\sigma)\operatorname{sen}2\sigma\ldots \\
\operatorname{sen} u' &= \cos m \operatorname{sen}(M+\sigma) \\
\cos u' \cos z' &= -\cos m \cos(M+\sigma) \\
\cos u' \operatorname{sen} z' &= -\operatorname{sen} m \\
\operatorname{tg}\varphi' &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{tg} u' \\
\operatorname{sen}\omega &= \frac{\operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen} z}{\cos u'}
\end{aligned}\right\}\ldots(2)$$

$$\Delta\theta = \omega - [7{,}82514]\operatorname{sen} m\left[\alpha'\sigma + \beta'\cos(2M+\sigma)\operatorname{sen}\sigma + \ldots\right].$$

Ecco il risultato ottenuto dall'egregio collega:

	Latitudine	Longitudine
Filhaussen	35° 00′ 34″,42	−4° 01′ 40″,18
Mulhacén	37 03 18 ,06	−5 38 59 ,41
Tetica	37 15 15 ,27	−4 45 04 ,09

(*) Cfr. Albrecht Th., *Formeln und Hülfstafeln für Geographische ortsbestimmungen* (Leipzig, 1879), pag. 79 e 80.

Il risultamento precedente mostra chiaramente che il nostro calcolo era esatto.

Per maggiormente confermare l'esattezza di esso, il Dottor AIMONETTI, assistente alla scuola di Geodesia, ha calcolato di nuovo le coordinate geografiche di *Mulhacen*, che è il più distante da *M*^{te} *Sabiha*, adoperando le formole date da *Helmert* (*), cioè le seguenti, che non hanno bisogno di tavole numeriche.

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{tg} u = \sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\varphi \\
\cos u \operatorname{sen} z = \cos u_0 \qquad \cos u \cos\omega = \cos\lambda \cos u_0 \\
\cos u \cos z = \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen}\lambda \qquad \cos u \operatorname{sen}\omega = \operatorname{sen}\lambda \\
\operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u_0 \cos\lambda \\
\operatorname{tg} E = \dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} u_0 \qquad \log k_1 = 2 \log \operatorname{tg} \dfrac{1}{2} E \\
\underset{\text{in secondi}}{\Delta\sigma} = \dfrac{s}{b} R'' . \dfrac{1-k_1}{1+\dfrac{1}{4}k_1^2} \\
\log \dfrac{1-k_1}{1+\dfrac{1}{4}k_1^2} = 2 \log \cos \dfrac{E}{2} - \dfrac{5}{4} M k_1^2 + \ldots \\
\underset{\text{in sec.}}{2\sigma} = \underset{\text{in sec.}}{2\lambda} + R'' k_1 \operatorname{sen} 2\lambda - \dfrac{1}{8} R'' k_1^2 \operatorname{sen} 4\lambda \\
2\sigma_m = 2\sigma - \Delta\sigma \\
\underset{\text{in sec.}}{\Delta\lambda} = \underset{\text{in sec.}}{\Delta\sigma} - p \cos 2\sigma_m \operatorname{sen}\Delta\sigma + q \cos 4\sigma_m \operatorname{sen} 2\Delta\sigma \\
\qquad - r \cos 6\sigma_m \operatorname{sen} 3\Delta\sigma \\
\log p = \log R'' \left(k_1 - \dfrac{9}{16} k_1^3\right); \qquad \log q = \log \dfrac{5}{8} R'' k_1^2 ; \\
\log r = \log \dfrac{29}{48} R'' k_1^3 \\
\lambda' = \lambda - \Delta\lambda
\end{array}\right\} \ldots (3).$$

(*) Cfr. HELMERT, *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie* (Leipzig, 1880), vol. 1° pag. 223 e seguenti.

$$\left.\begin{array}{ll}
\operatorname{sen} u' = \operatorname{sen} u_0 \cos \lambda' & \cos u' \cos \omega' = \cos \lambda' \cos u_0 \\
\cos u' \cos z' = - \operatorname{sen} u_0 \operatorname{sen} \lambda' & \cos u' \operatorname{sen} \omega' = \operatorname{sen} \lambda' \\
\cos u' \operatorname{sen} z' = - \cos u_0 & \\
\multicolumn{2}{c}{\operatorname{tg} \varphi' = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tg} u'} \\
\multicolumn{2}{l}{\underset{\text{in sec.}}{\Delta \theta} = \underset{\text{in sec.}}{(\omega - \omega')} - \cos u_0 \Big[p' \Delta\lambda - q' \cos 2\lambda_m \operatorname{sen} \Delta\lambda} \\
\multicolumn{2}{r}{+ r' \cos 4\lambda_m \operatorname{sen} 2\Delta\lambda \Big]} \\
\multicolumn{2}{c}{\log p' = \log \alpha - \dfrac{M}{2}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) k_1 - \dfrac{3}{8} M k_1^2 \; (*)\,;} \\
\log q' = \log R'' \dfrac{e^2}{4} k_1 \;; & \log r' = \log R'' \dfrac{e^2}{16} k_1^2 \\
\multicolumn{2}{c}{2\lambda_m = 2\lambda - \Delta\lambda\,.}
\end{array}\right\} \quad \ldots (3)$$

Il risultamento del calcolo fu questo:

Latitudine di Mulhacén $= \;\; 37^\circ \; 03' \; 18'',08$
Longitudine » $= - 5^\circ \; 38' \; 59'',40$

cioè (a meno di un centesimo di secondo nella longitudine) identico al nostro.

III.

In vista dell'importanza che ha nella storia della Geodesia il collegamento della Spagna coll'Algeria, e data la grande precisione ottenuta nelle singole operazioni, abbiamo creduto nostro dovere il segnalare codeste differenze nella certezza che i benemeriti esecutori dell'opera colossale vorranno ricercarne la causa.

Torino, maggio 1892.

(*) α è lo schiacciamento.

RELAZIONE intorno alla Memoria del Prof. C. F. PARONA, intitolata: *Revisione della Fauna liasica di Gozzano in Piemonte.*

L'Autore, già noto per precedenti lavori intorno alla Fauna liasica, nella memoria presentata al nostro esame, fa uno studio completo della fauna liasica di Gozzano, servendosi del materiale da lui stesso raccolto, del materiale del Museo geologico dell'Università di Pavia e del Museo geologico dell'Università di Torino.

Numerose sono le forme nuove, sopratutto fra i Brachiopodi. Le specie più importanti vengono dall'Autore figurate nelle due tavole unite al lavoro.

L'A. paragona inoltre il giacimento di Gozzano con altri consimili e conchiude non esservi dubbio che il calcare di Gozzano possa spettare al Lias inferiore anzichè al Medio.

Il lavoro del prof. Parona è un buon contributo per la conoscenza della fauna liasica e perciò i vostri commissari credono di doverlo proporre per la lettura, e, qualora la Classe lo approvi, per la stampa nei volumi accademici.

G. SPEZIA
L. CAMERANO, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
GIUSEPPE BASSO.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Torino — Tip. Reale-Paravia.

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XXVII, Disp. 15ª, 1891-92

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Giugno 1892.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. PROF. MICHELE LESSONA
PRESIDENTE

Sono presenti i Soci: D'OVIDIO, Direttore della Classe, SALVADORI, COSSA, BRUNO, BIZZOZERO, FERRARIS, NACCARI, MOSSO, SPEZIA, GIBELLI, CAMERANO, SEGRE e BASSO Segretario.

Viene letto l'atto verbale dell'adunanza precedente che è approvato.

Vengono offerti in dono all'Accademia, in nome dei rispettivi autori:

1° Dal Socio D'OVIDIO « *Nicola Fergola e la Scuola dei matematici che lo ebbe a duce* », del Prof. Gino LORIA dell'Università di Genova;

2° Dallo stesso Socio D'OVIDIO « *I fondamenti matematici per la critica dei risultati sperimentali* », del Prof. Paolo PIZZETTI, pure dell'Università di Genova;

3° Dal Socio Segretario BASSO « *Cenni monografici sui singoli servizi dipendenti dal Ministero dei Lavori Pubblici per gli anni* 1884-90, *compilati in occasione della Esposizione Nazionale di Palermo degli anni* 1891-92 », ecc.

Vengono poscia letti ed accolti per la pubblicazione negli *Atti* i sei lavori seguenti:

a) *Sopra una nuova serie di combinazioni basiche del platino;* Nota del Socio Prof. Alfonso COSSA, presentata dal medesimo;

b) *Sulle ghiandole tubulari del tubo gastroenterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa.* Nota V[a] del Socio BIZZOZERO, presentata dallo stesso autore;

c) *Sulle anomalie di sviluppo dell' embrione umano;* Comunicazione V^a del Socio Giacomini, presentata per incarico dell'autore dal Socio Segretario;

d) *Sulle cianacetilamine e nuovi acidi ossamici;* Nota IIª del Prof. Icilio Guareschi, presentata dal Socio Cossa;

e) *Sulla trifenilpiperazina;* Ricerche del Dottor Luigi Garzino, Assistente al Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Torino; lavoro presentato dallo stesso Socio Cossa;

f) *Su una congruenza di rette di secondo ordine e di quarta classe;* Nota del Prof. D. Montesano, della R. Università di Bologna, presentata dal Socio Segre.

Il Socio Camerano, anche a nome del condeputato Socio Salvadori, legge una sua Relazione sul lavoro del Dott. E. Giglio-Tos, intitolato: *Ditteri del Messico - Stratiomydae* e *Syrphidae* (parte Iª).

Sulle conclusioni favorevoli di questa Relazione, la quale sarà pubblicata negli *Atti*, la Classe ammette prima alla lettura il lavoro del Dott. Giglio-Tos, e poscia ne approva l'inserzione nei volumi delle *Memorie*.

Il Socio Naccari, anche a nome del condeputato Socio Ferraris, legge una sua Relazione sullo studio del Prof. Angelo Battelli, dell'Università di Padova, intitolato: *Sulle proprietà termiche dei vapori;* parte IVª. — *Studio del vapor d'acqua rispetto alle leggi di Boyle e di Gay-Lussac.*

Lo stesso Socio Naccari, pure a nome del Socio Ferraris, legge un'altra Relazione sul lavoro: *Il Clima di Torino*, del Dott. G. B. Rizzo, Assistente all'Osservatorio della R. Università di Torino.

Entrambe le dette Relazioni concludono in senso favorevole alla ammissione dei rispettivi lavori alla lettura: udita questa, la Classe ne approva la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*.

Le due Relazioni elaborate e lette dal Socio Naccari saranno inserte negli *Atti*.

Infine il Socio Spezia presenta uno Studio del Prof. Alessandro Portis della Università di Roma, col titolo: *Contribuzione della storia fisica del bacino di Roma.* Questo lavoro è diviso in due parti, di cui la prima tratta d'*Una nuova sezione geologica del colle Capitolino*, e la seconda versa sullo *Esame delle sezioni aperte nei dintorni immediati della città.*

Essendo lo Studio del Prof. PORTIS destinato, quando la Classe lo approvi, ai volumi delle *Memorie*, il Presidente incarica una Commissione di esaminarlo e riferirne alla sua volta alla Classe.

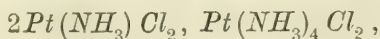
LETTURE

Sopra una nuova serie di combinazioni basiche del platino;

Ricerche del Socio Prof. ALFONSO COSSA

In una estesa memoria pubblicata nel 1890 sopra un nuovo isomero del sale verde del Magnus (1), ho dimostrato che si possono ottenere delle combinazioni derivanti da una nuova base ammoniacale del platino (platososemiammina) contenente una sola molecola di ammoniaca. Più tardi (2) comunicai all' Accademia dei Lincei in Roma un cenno preventivo di ricerche dirette ad ottenere combinazioni di basi platiniche di piridina e di etilammina, omologhe al nuovo isomero del sale verde del Magnus, e contenenti pertanto i cloruri di platososemipiridina e di platososemietilammina. — Ora con questa mia nota mi propongo di fare sommariamente conoscere i principali risultati delle ricerche preaccennate.

Limitandoci a considerare quella tra le combinazioni della platososemiammina, che è isomera del sale verde del Magnus, e che in base alle sue proprietà può essere rappresentata colla formola:

$$2Pt(NH_3)\,Cl_2,\ Pt(NH_3)_4\,Cl_2\,,$$

(1) *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, serie II, t. XLI. — *Berichte d. deuts. chem. Gesell.*, vol. XXIII, pag. 2503. — *Bull. de la Soc. chim. de Paris*, vol. IV (serie 3ª), p. 827. — *Gazzetta chim. ital.*, vol. XX, pag. 725.

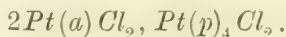
(2) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. VII, (serie 4ª), 1891.

si vede che sostituendo e permutando in questa combinazione i gruppi: (NH_3) e $(NH_3)_4$ con dei gruppi corrispondenti di piridina e di etilammina, si può teoricamente ammettere l'esistenza delle nove combinazioni omologhe indicate nel prospetto seguente, nel quale, per brevità di scritturazione, i simboli a, p, e rappresentano rispettivamente una molecola di ammoniaca, di piridina e di etilammina.

I.	$2Pt(a)\,Cl_2,\ Pt(a)_4\,Cl_2$
II.	$2Pt(a)\,Cl_2,\ Pt(p)_4\,Cl_2$
III.	$2Pt(a)\,Cl_2,\ Pt(e)_4\,Cl_2$
IV.	$2Pt(p)\,Cl_2,\ Pt(a)_4\,Cl_2$
V.	$2Pt(p)\,Cl_2,\ Pt(p)_4\,Cl_2$
VI.	$2Pt(p)\,Cl_2,\ Pt(e)_4\,Cl_2$
VII.	$2Pt(e)\,Cl_2,\ Pt(a)_4\,Cl_2$
VIII.	$2Pt(e)\,Cl_2,\ Pt(p)_4\,Cl_2$
IX.	$2Pt(e)\,Cl_2,\ Pt(e)_4\,Cl_2$

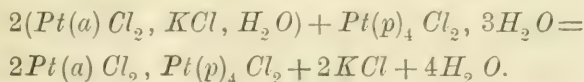
Le esperienze, che mi accingo a descrivere dimostrano che realmente possono esistere queste nove combinazioni. Ommetto però la descrizione della prima, perchè essa trovasi già esposta diffusamente nella memoria citata in principio di questo mio lavoro, e quella dell'ultima, perchè finora non mi fu dato di ottenerla cristallizzata. Nè intendo di occuparmi più oltre in tentativi per prepararla in uno stato di purezza tale da poter essere analizzata, giacchè mi sembra che il concetto teorico che informa questo mio studio sia sufficientemente dimostrato dalle proprietà riscontrate nelle altre otto combinazioni.

Combinazione II[a].

$$2Pt(a)\,Cl_2,\ Pt(p)_4\,Cl_2.$$

Cloruro di platososemiammina e di platosodipiridina.

Il modo più semplice di preparare questa combinazione consiste nel mescolare due soluzioni acquose di cloruro doppio di

platososemiammina e di potassio e di cloruro di platosodipiridina, nei rapporti quantitativi indicati dall'equazione:

$$2(Pt(a)\,Cl_2,\,KCl,\,H_2O) + Pt(p)_4\,Cl_2,\,3H_2O =$$
$$2Pt(a)\,Cl_2,\,Pt(p)_4\,Cl_2 + 2KCl + 4H_2\,O.$$

Si separa immediatamente la nuova combinazione sotto forma di una polvere gialla cristallina. Impiegando tre grammi di cloruro doppio di platososemiammina e di potassio, e grammi 2,33 di clororo di platosodipiridina, la quantità della nuova combinazione ottenuta fu di grammi 4, perciò quasi la quantità teorica che sarebbe di circa grammi 4,5.

Il precipitato giallo cristallino quasi insolubile a freddo, si scioglie facilmente nell'acqua bollente, dalla quale si depone in cristalli distinti, la cui forma fu determinata dal D[r] Alfonso Sella, che mi comunicò le indicazioni seguenti:

« Sistema cristallino: triclino,

Forme osservate: $\{100\}$, $\{010\}$, $\{001\}$

Angoli misurati:

$$(010):(001) = 51^\circ, 20'$$
$$(001):(100) = 111, 18$$
$$(100):(010) = 88, 18.$$

In un unico cristallo vennero osservate le altre due forme: $\{0\bar{1}1\}$, $\{\bar{1}\bar{1}1\}$, ma la loro misura non riuscì sufficientemente esatta per potere essere utilizzata nel calcolo dei rapporti assiali. Si osservarono pure gli angoli seguenti:

$$(0\bar{1}0):(0\bar{1}1) = 63^\circ, 28'$$
$$(0\bar{1}1):(\bar{1}\bar{1}1) = 25^\circ \text{ circa}$$

I cristalli sono tabulari secondo $\{100\}$ ed hanno un abito prismatico parallelamente all'asse verticale. Sopra $\{100\}$ le direzioni di massima estinzione bisecano con grande approssimazione l'angolo yz. Sopra $\{100\}$ si osserva un notevole pleocroismo; avendosi un colore giallo verdastro pallido, quando la sezione principale biseca l'angolo acuto yz, ed un colore giallo arauciato normalmente a questa direzione. »

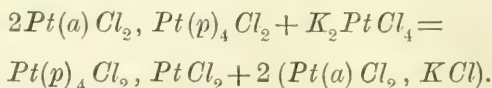
La determinazione del platino e del cloro contenuti in questi cristalli diede i seguenti risultati, che concordano sufficientemente

con quelli calcolati in base alla formola chimica loro attribuita. Infatti per cento parti in peso si ottennero:

		Teoria.
Platino	50,68	50,92
Cloro	18,52	18,54

Indipendentemente dal criterio sintetico fornito dal modo di preparazione, le proprietà chimiche di questo composto mettono fuori d'ogni dubbio che esso deve essere considerato come una combinazione di due molecole di cloruro di platososemiammina con una molecola di cloruro di platosodipiridina. Infatti la soluzione acquosa di questo corpo si presta alle reazioni seguenti:

a) Trattata con una soluzione contenente una quantità equimolecolare di cloroplatinito potassico (1), produce un precipitato di colore bianco roseo, il quale ha la composizione e presenta tutti i caratteri del cloroplatinito di platosodipiridina. Il liquido separato dal precipitato, dopo essere stato convenientemente concentrato, depone dei prismi di colore giallo aranciato, trimetrici coi parametri proprii del cloruro doppio di platososemiammina e di potassio cristallizzato con una molecola d'acqua (2). La reazione è semplice; avviene cioè senza formazione di prodotti secondarii, e la quantità di cloroplatinito di platosodipiridina che si produce, entro i limiti di esattezza che si può raggiungere in queste determinazioni, corrisponde a quella indicata dall'equazione:

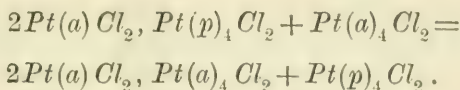
$$2Pt(a)Cl_2, Pt(p)_4Cl_2 + K_2PtCl_4 =$$
$$Pt(p)_4Cl_2, PtCl_2 + 2\,(Pt(a)Cl_2, KCl).$$

b) Trattata con una quantità equimolecolare di cloruro di platosodiammina (cloruro della prima base del Reiset), dà origine ad un precipitato giallo cristallino, che ridisciolto nell'acqua bollente cristallizza in prismi dimetrici, identici per forma e composizione col nuovo isomero del sale verde del Magnus, da me preceden-

---

(1) I pesi molecolari delle combinazioni: $2\,Pt(a)Cl_2$, $Pt(p)_4Cl_2$ e K_2PtCl_4 sono rispettivamente: 1144,52 e 413,98.

(2) Il Dott. Alfonso Sella che misurò questi cristalli trovò che i rapporti assiali sono: $a:b:c = 1,300:1:0,8475$.

temente studiato. Nella soluzione rimane inalterato il cloruro di platosodipiridina. Anche questa reazione è quantitativa e avviene secondo lo schema:

$$2Pt(a)Cl_2, Pt(p)_4Cl_2 + Pt(a)_4Cl_2 =$$
$$2Pt(a)Cl_2, Pt(a)_4Cl_2 + Pt(p)_4Cl_2 .$$

c) Quando si tratta a caldo la soluzione del cloruro doppio di platososemiammina e di platosodipiridina con ammoniaca, e si espelle successivamente per continuato riscaldamento l'eccesso di alcali libero, si osserva che la soluzione diviene perfettamente incolora. Allora aggiungendovi una soluzione di cloroplatinito di potassio, si forma un abbondante deposito di colore verde chiaro che, esaminato al microscopio, risulta costituito da una mescolanza cristallina dei due cloroplatiniti di platosodiammina e di platosodipiridina. Ora la formazione del primo di questi due cloroplatiniti non può essere spiegata se non ammettendo nella combinazione II^a la preesistenza del cloruro di platososemiammina, che per l'assorbimento di tre molecole di ammoniaca si è trasformato in cloruro della prima base del Reiset.

A motivo della loro insolubilità è impossibile il separare i due cloroplatiniti per determinarne le quantità rispettive.

d) Trattando una soluzione della combinazione II^a con un eccesso di acido cloroplatinico, o meglio di cloroplatinato sodico, si ottiene un precipitato voluminoso, amorfo, di colore bianco gialliccio, il quale a poco a poco alla temperatura ordinaria, e immediatamente per il riscaldamento, diminuisce di volume, diventa cristallino ed acquista un colore rosso mattone. Questo precipitato cristallino è costituito da cloroplatinito di platinodipiridina:

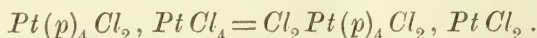
$$(Cl_2Pt(p)_4Cl_2, PtCl_2);$$

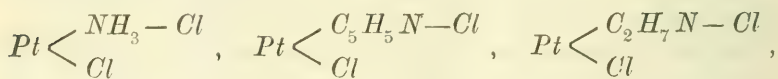
ed è identico per proprietà e composizione a quello che si può ottenere direttamente facendo agire un eccesso di cloroplatinato sodico sopra una soluzione di cloruro di platosodipiridina. — La reazione poi per la quale questo sale si produce, è quella stessa da me studiata sperimentalmente fin dall'anno 1887, per

---

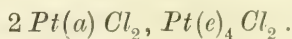
(1) *Sopra le proprietà di alcuni composti ammoniacali del platino. Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XXII (1887).

spiegare come in circostanze analoghe si forma il cloroplatinito di platinodiammina (1). Cioè: quando si fa agire sopra il cloruro di platosodipiridina, o sopra un corpo che contiene questo sale, un eccesso di cloroplatinato sodico, si forma da principio il cloroplatinato di platosodipiridina (precipitato bianco gialliccio, amorfo), il quale per una reazione intermolecolare si trasforma nel suo isomero: cloroplatinito di platinodipiridina (precipitato rosso cristallino):

$$Pt(p)_4 Cl_2, Pt Cl_4 = Cl_2 Pt(p)_4 Cl_2, Pt Cl_2 .$$

Termino la descrizione delle proprietà constatate nel cloruro doppio di platososemiammina e di platosodipiridina coll'accennare che, allorquando si tratta questo corpo *a freddo* con un eccesso di nitrato argentico, si precipitano appena i due terzi del cloro in esso contenuto. Tale fatto, che si verifica in tutte le combinazioni della serie considerata in questo lavoro, fa supporre come probabile per i cloruri di platososemi-ammina-piridina-etilammina le formole di struttura:

$$Pt \begin{matrix} \diagup NH_3 - Cl \\ \diagdown Cl \end{matrix} , \quad Pt \begin{matrix} \diagup C_5 H_5 N - Cl \\ \diagdown Cl \end{matrix} , \quad Pt \begin{matrix} \diagup C_2 H_7 N - Cl \\ \diagdown Cl \end{matrix} ,$$

Per le stesse cause additate nella mia memoria: « Sul nuovo isomero del sale verde del Magnus » a proposito del cloruro di platososemiammina, finora riuscirono vani i lunghi e laboriosi tentativi da me fatti per isolare in uno stato di sufficiente purezza i cloruri di platososemipiridina e platososemietilammina.

Combinazione III^a.

$$2\, Pt(a)\, Cl_2 ,\, Pt(e)_4\, Cl_2 .$$

Cloruro di platososemiammina e di platosodietilammina.

Ho preparato questa combinazione mescolando soluzioni calde e *concentrate* di cloruro doppio di platososemiammina e di potassio e di cloruro di platosodietilammina nel rapporto di due molecole del primo sale e di una del secondo. Il sale che si

depone, purificato con ripetute cristallizzazioni nell'acqua nella quale si scioglie facilmente, si presenta in prismi trimetrici, anidri, inalterabili all'aria; essi sono dotati di un forte pleocroismo, cioè appariscono colorati in giallo quando lo spigolo più pronunciato del prisma è parallelo alla sezione principale del Nicol, e in rosso aranciato in una posizione normale alla precedente.

La determinazione del platino e del cloro diede i risultati seguenti che soddisfanno alla formola:

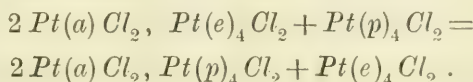
$$2\,Pt(a)\,Cl_2, Pt(e)_4\,Cl_2.$$

		Teoria
Platino . . .	57,49	57,77
Cloro	20,90	21,03

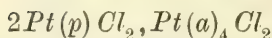
Questa combinazione presenta le proprietà seguenti:

a) Col cloroplatinito potassico e col cloruro di platosodiammina, si comporta in un modo analogo a quello della combinazione precedente; dando, cioè, rispettivamente origine a cloroplatinito di platosodietilammina, ed al nuovo isomero del sale verde del Magnus.

b) Con il cloruro di platosodipiridina, dà origine per doppia decomposizione alla combinazione II[a], essendo questa quasi insolubile nell'acqua alla temperatura ordinaria:

$$2\,Pt(a)\,Cl_2,\ Pt(e)_4 Cl_2 + Pt(p)_4 Cl_2 =$$
$$2\,Pt(a)\,Cl_2, Pt(p)_4 Cl_2 + Pt(e)_4 Cl_2\,.$$

c) Con acido cloroplatinico o con cloroplatinato sodico, si ottiene il cloroplatinito di platinodietilammina. Questo cloroplatinito $(Cl_2\,Pt\,(e)_4, Cl_2\,Pt\,Cl_2)$, che si produce in seguito a reazioni analoghe a quelle per le quali si formano i cloroplatiniti di platinodiammina e di platinodipiridina, è identico al sale che preparai direttamente facendo agire un eccesso di cloroplatinato sodico sul cloruro di platosodietilammina. Esso cristallizza in lamine esagonali di colore giallo carico, e si discioglie non difficilmente nell'acqua.

Combinazione IV^a.

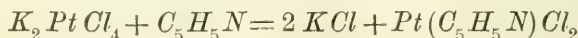
$$2Pt(p)Cl_2, Pt(a)_4Cl_2$$

Cloruro di platososemipiridina e di platosodiammina.

È noto che, analogamente a quanto succede per le basi ammoniacali del platino, il cloruro platinoso assorbendo quantità variabili di piridina e di etilammina, può dare origine a composti contenenti due o quattro molecole delle basi citate (1). Ora si può ragionevolmente ammettere che limitando l'azione dei due alcali sul cloruro platinoso, si debbano ottenere dei composti contenenti una sola molecola di base, e perciò omologhi al cloruro di platososemiammina ($Pt(a)Cl_2$), la di cui esistenza fu già da me dimostrata nel nuovo isomero del sale verde del Magnus.

L'esperienza ha verificato questa previsione, ed io mi sono appunto valso dell'azione limitata della piridina e della etilammina per preparare quei termini della serie che formano argomento di questo lavoro, e che contengono i cloruri: $Pt(p)Cl_2$, $Pt(e)Cl_2$.

Preparazione del composto: $2Pt(p)Cl_2, Pt(a)_4Cl_2$.

Ad una soluzione acquosa di cloroplatinito potassico aggiunsi una quantità equimolecolare di piridina (per gr. 10 di cloroplatino, grammi 1,9 di piridina pura). Non avviene una reazione netta e semplice corrispondente all'equazione:

$$K_2PtCl_4 + C_5H_5N = 2KCl + Pt(C_5H_5N)Cl_2$$

ma insieme al cloruro di platososemipiridina si forma e in quantità predominante del cloruro di platososemidipiridina ($Pt(p)_2Cl_2$), il quale si depone a motivo della sua insolubilità. Quando ogni traccia di piridina libera è scomparsa, (per il che alla temperatura ordinaria si richiedono almeno 48 ore), separo colla filtrazione il cloruro di platososemidipiridina, ed al liquido filtrato, che contiene: cloruro di semipiridina, cloruro di potassio, cloroplatinito di potassio inalterato, e probabilmente anche i cloruri di platosomonodipiridina e di platosodipiridina, aggiungo un *eccesso*

(1) Veggasi la bella memoria di Jörgensen: *Zur Constitution der Platinbasen. Journ. f. prakt. Chemie*, vol. 33 (nuova serie), pag. 489.

di cloruro della prima base del Reiset. Si forma del sale verde del Magnus insolubile, e dalla soluzione filtrata e concentrata a blando calore si depone cristallizzata la combinazione: $2Pt(p)Cl_2$, $Pt(a)_4Cl_2$, in quantità che variano a seconda del grado di concentrazione della soluzione di cloroplatinito potassico impiegato, e della temperatura alla quale su di questa soluzione si fece agire la piridina.

Nelle esperienze fatte colle quantità di piridina e di cloroplatinito potassico sopra indicate e sciolte in 300 cent. cub. di acqua, alla temperatura ordinaria, la quantità della combinazione IV[a] ottenuta fu in media di grammi 1,7, mentre se ne ottennero gr. 2,6 quando la piridina agiva ad una temperatura di circa 90° gradi. — Si spiega assai facilmente questa differenza, considerando che a temperatura ordinaria la velocità della reazione essendo molto lenta, la piridina ancora libera può agire sul cloruro di platososemipiridina ($Pt(p)Cl_2$) trasformandolo in cloruro di platososemidipiridina, ($Pt(p)_2Cl_2$) in una proporzione più grande di quando si opera a temperatura più elevata, giacchè in questo caso l'azione della piridina sul cloroplatinito potassico essendo molto più celere, deve essere necessariamente maggiore la quantità di cloruro di platososemipiridina che sfugge ad un ulteriore assorbimento di piridina.

Il cloruro di platososemipiridina e di platosodiammina cristallizza in esili lamine romboedriche, poco solubili nell'acqua alla temperatura ordinaria; molto più facilmente nell'acqua bollente.

La determinazione della quantità percentuale di platino e di cloro diede questi risultati:

		Teoria
Platino	57,19	57,11
Cloro	20,71	20,79.

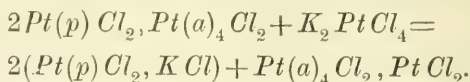
Cloruro doppio di platososemipiridina e di potassio.

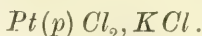
Si può dimostrare che la combinazione IV[a] è costituita da due molecole di cloruro di platososemipiridina unite con una molecola di cloruro di platosodiammina, ottenendo da essa il sale: $Pt(p)Cl_2, KCl$ e studiandone le proprietà.

Ad una soluzione acquosa calda di 7 grammi del composto: $2Pt(p)Cl_2$, $Pt(a)_4Cl_2$ aggiunsi grammi 2,8 (1) di cloroplati-

(1) I pesi molecolari dei corpi: $2Pt(p)Cl_2$, $Pt(a)_4Cl_2$ e K_2PtCl_4 sono rispettivamente: 1020,82 e 413,98.

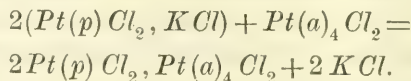
nito potassico. Si formò del sale verde del Magnus che pesava grammi 3,8; quantità assai vicina a quella calcolata in base all'equazione seguente, e che sarebbe di grammi 4,1.

$$2Pt(p)Cl_2, Pt(a)_4Cl_2 + K_2PtCl_4 =$$
$$2(Pt(p)Cl_2, KCl) + Pt(a)_4Cl_2, PtCl_2.$$

La soluzione, separata dal sale verde del Magnus, evaporata nel vuoto sull'acido solforico depone dei prismi ortotomi di colore giallo aranciato, e che dall'analisi fattane risultano avere una composizione corrispondente alla formola:

$$Pt(p)Cl_2, KCl.$$

	Esperienza		Teoria
Platino	46,18	— 46,34	46,45
Cloro	25,32	25,47	25,60
Potassio	9,25	—	9,32

La soluzione acquosa del cloruro doppio di platososemipiridina e di potassio si presta alle reazioni seguenti:

a) Trattata con cloruro di platosodiammina, si ripristina la combinazione IV^a che precipita, e rimane in soluzione del cloruro potassico:

$$2(Pt(p)Cl_2, KCl) + Pt(a)_4Cl_2 =$$
$$2Pt(p)Cl_2, Pt(a)_4Cl_2 + 2KCl.$$

In una esperienza avendo impiegato grammi 1,714 di cloruro doppio di platososemipiridina e di potassio, e grammi 0,719 di cloruro della prima base del Reiset, ottenni grammi 1,8 della combinazione IV^a; ora la quantità corrispondente all'equazione sopra indicata sarebbe di grammi 2,09 (1).

b) Trattata con un eccesso di piridina, si ottiene del cloruro di platosodipiridina che, determinato sotto forma di cloroplatinito insolubile per l'aggiunta di cloroplatinito potassico, risulta in quantità corrispondente al cloruro di platososemipiridina contenuto nella soluzione.

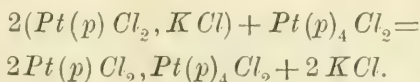
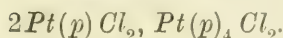
---

(1) I pesi molecolari dei corpi: $Pt(p)Cl_2$, KCl e $Pt(a)_4Cl_2$, H_2O sono rispettivamente: 418,26 e 351,04.

c) Finalmente per l'azione di una quantità equivalente di platosodipiridina, produce un precipitato costituito dalla combinazione Va, la quale è affatto insolubile nell'acqua alla temperatura ordinaria.

$$2(Pt(p)Cl_2, KCl) + Pt(p)_4 Cl_2 =$$
$$2Pt(p)Cl_2, Pt(p)_4 Cl_2 + 2KCl.$$

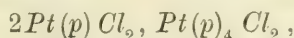
Combinazione Va.

$$2Pt(p)Cl_2, Pt(p)_4 Cl_2.$$

Cloruro di platososemipiridina e di platosodipiridina.

Per preparare questa combinazione, che è isomera coi cloruri di platosopiridina e platososemidipiridina e col cloroplatinito di platosodipiridina, si possono seguire due metodi differenti:

a) Aggiungendo ad una soluzione di cloruro di platososemipiridina e di potassio, o ad una soluzione della combinazione IVa del cloruro di platosodipiridina.

b) Sottraendo al cloruro di platososemidipiridina metà della piridina che contiene. Si arriva a questo risultato riscaldando per otto ore a bagnomaria, in un recipiente munito di refrigerante a riflusso, il cloruro di platososemidipiridina ($Pt(p)_2 Cl_2$) in presenza di acido cloridrico diluito con sei volte il proprio peso di acqua. — Dalla soluzione acida trattata con cloruro di platosodipiridina si precipita la combinazione:

$$2Pt(p)Cl_2, Pt(p)_4 Cl_2,$$

la quale viene poi ripetutamente lavata con acqua e con alcool. Con questo secondo metodo si ha un rendimento assai scarso, mentre col primo si raggiunge quasi la quantità teorica.

Ottenuta tanto nell'una quanto nell'altra maniera, questa combinazione si presenta sotto forma di minutissimi cristalli aciculari, anisotropi, di colore giallo pallido, e dei quali, a motivo della loro piccolezza, non mi fu possibile di riconoscere, nemmeno approssimativamente, la forma cristallina.

La determinazione percentuale del platino e del cloro diede

i risultati seguenti:

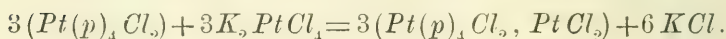
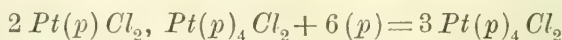
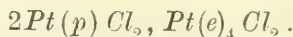
	a	b	Teoria
Platino	45,64	45,78	45,93
Cloro	17,05	16,84	16,73

Una molecola di questa combinazione V^a, se è realmente costituita nel modo indicato dalla formola che le ho attribuito, per l'azione di un eccesso di piridina, dovrebbe risolversi in tre molecole di cloruro di platosodipiridina, le quali, poi, per l'azione del cloroplatinito potassico, dovrebbero dare origine ad un numero eguale di molecole di cloroplatinito di platosodipiridina; composto che si può facilmente raccogliere e pesare. L'esperienza ha verificato la previsione; infatti con un gramma della combinazione V^a, trattata nel modo preindicato, ottenni grammi 1,8 di cloroplatinito di platosodipiridina, quantità assai vicina a 2 grammi, che è appunto quella calcolata in base alle due reazioni seguenti:

$$2\,Pt(p)\,Cl_2,\ Pt(p)_4\,Cl_2 + 6\,(p) = 3\,Pt(p)_4\,Cl_2$$

$$3\,(Pt(p)_4\,Cl_2) + 3K_2\,PtCl_4 = 3\,(Pt(p)_4\,Cl_2,\ Pt\,Cl_2) + 6\,KCl.$$

Combinazione VI^a.

$$2Pt\,(p)\,Cl_2,\ Pt(e)_4\,Cl_2.$$

Cloruro di platososemipiridina e di platosodietilammina.

Preparai questa combinazione aggiungendo ad una soluzione bollente di 10 grammi di cloroplatinito potassico in 120 centimetri cubi d'acqua grammi 1,9 di piridina pura. Abbandonato il liquido al raffreddamento spontaneo, dopo due ore circa, cioè quando la piridina era stata completamente assorbita, separai colla filtrazione il cloruro di platososemidipiridina che si era formato. Nel liquido filtrato versai in eccesso una soluzione concentrata di platosodietilammina; dopo che fu separato, mediante filtrazione, il cloroplatinito di platosodietilammina, la soluzione depose cristallizzato il cloruro di platososemipiridina e di platosodietilammina nella quantità di grammi 2,7.

Questo sale cristallizza in piccoli prismi raggruppati in mam-

melloni di colore giallo carico; poco solubile nell'acqua alla temperatura ordinaria, vi si discioglie abbondantemente a caldo.

La determinazione percentuale del platino e del cloro diede questi risultati:

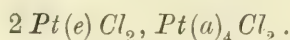
		Teoria
Platino	51,43	51,46
Cloro	18,66	18,72

La soluzione acquosa di questo sale:

a) Con cloruro di platosodipiridina precipita la combinazione V[a], rimanendo in soluzione il cloruro di platosodietilammina.

b) Con cloroplatinito potassico dà origine a cloroplatinito di platosodietilammina che precipita, ed a cloruro doppio di platososemipiridina e di potassio che rimane in soluzione.

Combinazione VII[a].

$$2\,Pt(e)\,Cl_2,\,Pt(a)_4\,Cl_2\,.$$

Cloruro di platososemietilammina e di platosodiammina

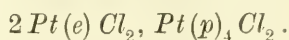
Preparazione. — Ad una soluzione di 10 grammi di cloroplatinito potassico in 150 centimetri cubici di acqua riscaldata a circa 90°, si aggiungono 9 centimetri cubici di una soluzione acquosa di etilammina al 33 per cento. Si forma immediatamente del cloruro di platososemidietilammina, mescolato con una sostanza nera amorfa che accompagna sempre gli altri prodotti quando si fa agire l'etilammina sopra il cloruro platinoso o i cloroplatiniti alcalini. Alla soluzione filtrata e leggermente inacidita con acido cloridrico, si aggiunge un eccesso di cloruro della prima base del Reiset. Il liquido, separato dal precipitato verde di cloroplatinito di platosodiammina che eventualmente può formarsi, concentrato nel vuoto sull'acido solforico depone il cloruro di platososemietilammina e di platosodiammina, che è necessario di purificare con successive soluzioni nell'acqua e concentrazioni nel vuoto. Impiegando le dosi di cloroplatinito potassico e di etilammina sopraindicate, ottenni (media di tre preparazioni) circa grammi 2,5 di questa combinazione.

Questo sale cristallizza in esili prismi clinoedrici, solubili nell'acqua ed insolubili nell'alcool. La determinazione percentuale del platino e del cloro ha dato questi risultati:

		Teoria
Platino	60,88	61,15
Cloro	21,92	22,26

La soluzione di questa combinazione trattata con cloroplatinito potassico dà origine a sale verde del Magnus, ed a cloruro di platososemietilammina e di potassio. Con un eccesso di etilammina si trasforma in una miscela dei due cloruri di platosodietilammina e di platosodiammina.

Combinazione VIII[a].

$$2\,Pt(e)\,Cl_2,\ Pt(p)_4\,Cl_2\,.$$

Cloruro di platososemietilammina e di platosodipiridina.

Si ottiene facilmente questa combinazione, approfittando della sua poca solubilità nell'acqua fredda, aggiungendo del cloruro di platosodipiridina ad una soluzione concentrata della combinazione VII[a].

Il Dottor Alfonso Sella mi comunicò le notizie seguenti sulla forma cistallina di questo composto.

« Sistema trimetrico:

$$a : b : c = 1,478 : 1 : 4,542.$$

Angoli	Osservati	Calcolati
(001) : (111)	79°,40′	
(101) : (111)	54°,34′	
(001) · (101)	71°,31′	71°,59′
(001) : (113)	61°,22′	61°,19′
(113) : $(1\bar{1}3)$	93°,28′	93°,12′

Cristalli gialli, opachi, estremamente fragili; tabulari secondo la base. In generale uno stesso cristallo risulta composto da più individui sovrapposti per la base e tra loro sono soddisfacentemente paralleli. »

La determinazione percentuale del platino e del cloro diede questi risultati:

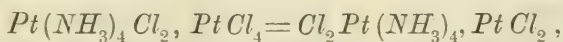
		Teoria
Platino	48,27	48,55
Cloro	17,75	17,67.

Analogamente alle combinazioni precedentemente descritte, questo corpo trattato con un eccesso di etilammina, si cangia in un miscuglio di molecole eguali di cloruri di platosodietilammina e platosodipiridina: e per l'azione del cloroplatinito di potassio produce una quantità di cloroplatinito di platosodipiridina, corrispondente alla quantità di cloruro di questa base in esso contenuto. Non mi fu finora possibile di poter isolare in cristalli puri il cloruro doppio di platososemietilammina e di potassio, giacchè la soluzione di questo sale si altera molto facilmente anche alla temperatura ordinaria.

Spero che questo mio lavoro possa essere giudicato meritevole di richiamare l'attenzione dei chimici, non già perchè vi sono descritte delle nuove combinazioni, ma bensì perchè da esso emergono queste due conseguenze, che mi sembrano importanti.

1. Le ricerche fatte colla piridina e l'etilammina confermano in un modo indiretto, ma sicuro, che il platino è suscettibile di unirsi anche ad una sola molecola di una base per dare origine a combinazioni omologhe ai composti monoammoniacali del platino da me precedentemente studiati.

2. La proprietà che ho riscontrato per la prima volta nel cloroplatinato di platosodiammina di trasformarsi per una reazione intermolecolare nel cloroplatinito della base platinica corrispondente:

$$Pt(NH_3)_4 Cl_2, Pt Cl_4 = Cl_2 Pt(NH_3)_4, Pt Cl_2,$$

è comune ai cloroplatinati delle basi platosopiridiniche ed etilamminiche corrispondenti, e perciò acquista il carattere di una reazione generale.

Torino, Laboratorio chimico
della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri.

Sulle ghiandole tubulari del tubo gastro-enterico e sui rapporti del loro epitelio coll'epitelio di rivestimento della mucosa;

Nota quinta del Socio Prof. G. BIZZOZERO

Intestino della larva del Petromyzon Planeri.

Questo intestino ci presenta la rigenerazione dell'epitelio nella sua forma più semplice, poichè vi mancano tanto le ghiandole tubulari, quanto i germogli sotto-epiteliari e le giovani cellule di ricambio profonde. La formazione di nuove cellule si compie dalle cellule già specificamente differenziate, che in unico strato lo rivestono (1).

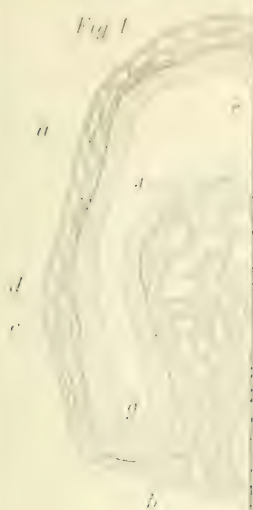
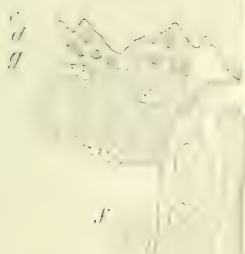
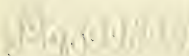
L'intestino è rettilineo, e si isola facilmente dopo di avere spaccato l'animale lungo la linea mediana ventrale. Siccome per ottenere le cariocinesi nel loro numero normale bisogna servirsi di animali ben nutriti. e il loro nutrimento consiste specialmente di diatomee, che col loro guscio siliceo rovinerebbero la lama del microtomo, così io, prima d'indurire l'intestino, lo liberava del suo contenuto facendo passar nel suo lume, per mezzo di una siringa, dell'alcool allungato; soltanto dopo fatto ciò, lo passava nell'alcool di crescente concentrazione, fino all'alcool assoluto.

La figura 1ª mostra a piccolissimo ingrandimento la ben nota figura della sezione trasversa dell'intestino di petromyzon. Si vede che il contorno dell'intestino ha figura irregolarmente ovale, ma che a questa non corrisponde la forma del suo lume. Infatti, a cagione della cosidetta *valvola spirale*, che è dovuta

(1) Pel mio studio usai di larve della lunghezza di circa 10-12 cm. — Per la fissazione e l'indurimento trovai ottimo l'alcool; per la colorazione mi servii specialmente dell'ematossilina e dell'eosina.

BIZZOZERO - Ghiandole Tubolari

G Bizzozero dis

Lit Salussolia, Torino

ad un notevole rialzo longitudinale delle pareti dell'intestino, il lume di questo viene notevolmente ristretto e ridotto alla forma di un ferro da cavallo.

L'epitelio che lo riveste si può quindi considerare come costituito di due foglietti: uno esterno (*e*), concavo, che si applica sull'intestino propriamente detto; l'altro interno (*f*), convesso, che è applicato sulla valvola spirale. I due foglietti si saldano fra loro in corrispondenza della base della valvola spirale; in questo punto, adunque, l'epitelio forma una curva, cui daremo il nome di *fornice* (*g*).

L'*intestino* ha tonache sottili. Io non mi sono soffermato gran fatto a studiare la loro interessante struttura; esse risulterebbero però di parecchi strati, che, andando dal lume dell'intestino verso l'esterno, sarebbero i seguenti (fig. 2ª): 1° epitelio cilindrico; 2° una sottile membrana connettiva (fig. 2ª *a*), finamente fibrillare, continua, che chiamerei *membrana limitante;* essa è facilmente isolabile colla macerazione nell'alcool allungato; 3° due sottili strati di fibre muscolari liscie, di cui le interne (*b*) hanno direzione longitudinale, le esterne (*c*) trasversale; 4° un grosso strato di tessuto cavernoso sanguigno (*d*). Le lacune esterne sono più ampie delle interne; queste ultime, poi, sono in diretta comunicazione con numerose piccole lacune sanguigne (*d''*), le quali, essendo scavate nello strato muscolare liscio anzidetto, rimangono per ciò superficialissime, e non sono separate dall'epitelio cilindrico che per mezzo della membrana limitante; 5° uno strato connettivo sottile (*f*), formato da sottili fascetti connettivi fortemente ondulosi, intrecciantisi fittamente fra loro; 6° epitelio esterno dell'intestino (*g*), costituito da un unico strato di cellule giustapposte l'una all'altra e presentanti un'elegante forma fusata, simile a quella delle fibro-cellule muscolari liscie.

Quanto alla cosidetta *valvola spirale* (fig. 1ª *b*), essa si può considerare come una duplicatura delle pareti intestinali, ingrossata da un aumento del tessuto cavernoso. Infatti, noi vediamo che dall'avventizia dell'arteria (fig. 1ª *c*) che, come è noto, scorre lungo l'asse della valvola, partono delle trabecole connettive, le quali, anastomizzandosi fra loro, circoscrivono numerose lacune sanguigne (*d*). È questo tessuto cavernoso che costituisce il corpo della valvola. Le sue lacune sono in generale assai ampie; se ne eccettuano, però, quelle che costituiscono lo strato superficiale del corpo della valvola, le quali sono, relativamente, assai

piccole, ed arrivano fin sotto l'epitelio cilindrico, dal quale, come nell intestino, non sono separate che dalla membrana limitante (fig. 4 *s*).

Queste trabecole contengono, nel connettivo che ne forma lo stroma, degli elementi istologici di diversa natura, che ne modificano il significato. Quelle, infatti, che giacciono sotto l'epitelio cilindrico contengono in buon numero delle fibre muscolari liscie (fig. 4 *m*), disposte in diversa direzione; esse possono, per ciò, considerarsi come corrispondenti allo strato muscolare già notato nelle tonache dell'intestino.

Tutte quelle altre trabecole, invece, che si diramano nel resto della valvola, e specialmente quelle che stanno nella metà basale di questa, sono infiltrate di leucociti. Fra questi ultimi se *ne trovano costantemente alcuni presentanti le varie forme della mitosi.* Il che ci permette di concludere, *che questo tessuto interlacunare della valvola spirale è un focolajo di produzione di leucociti.*

Non sarà superfluo notare, che nello spessore delle trabecole si trovano talora anche delle grosse cellulule nervose. —

Gli elementi dell'*epitelio* si possono studiare facilmente isolandoli colla macerazione per un paio di giorni nell'alcool allungato. Essi ci si presentano come cellule protoplasmatiche a forma di prisma molto allungato, con contorni laterali netti, e terminate all'imbasso da un'estremità tronca posante sulla membrana limitante. L'estremità libera porta l'orlo striato, il quale modifica alquanto il suo aspetto nelle diverse cellule. In alcune ha una figura identica a quella degli altri animali studiati finora, con questo di più che vi è assai evidente la struttura bacillare, trovandovisi i bastoncini assai distinti l'uno dall'altro; in altre, invece, fra lo strato di bastoncini e la piastra che li sopporta è intercalato un altro strato o un'altra piastra, che è limitata verso il lume dell'intestino da una superficie leggermente convessa. Non interessando al mio scopo, non mi sono occupato più oltre di questa particolarità di struttura, così come non mi sono occupato di determinare se talora, come viene ammesso da molti, i bastoncini siano contrattili ed acquistino il significato di ciglia vibratili.

Il nucleo sta nella metà profonda delle cellule, però ad una certa distanza dalla loro base; è ovale, parallelo all'asse più lungo della cellula, e presenta 2-3 grossi nucleoli. In pre-

parati molto colorati e visti a forte ingrandimento, il suo corpo si presenta attraversato da un fitto e sottile reticolo, i cui punti nodali hanno l'apparenza di finissimi granuli.

Il protoplasma cellulare ha un aspetto finamente reticolato (con reticolo più lasso ed interrotto nella metà superficiale della cellula), e contiene spesso delle goccioline di grasso. In esso, eziandio, si trovano spesso (fig. 3 *v r*) delle inclusioni (enclaves) simili a quelle già vedute negli altri animali, rappresentate da globi di diversa grossezza, d'aspetto ora piuttosto granuloso, ora omogeneo, contenenti spesso dei granuli di una sostanza che fortemente s'imbibisce coi coloranti nucleari.

Se, ora, dopo aver esaminato gli elementi isolati, li studiamo nel loro insieme, per es. su sezioni trasverse di un intestino previamente indurito nell'alcool, troviamo che vi sono differenze notevoli fra le cellule epiteliari a seconda del posto che esse occupano nell'intestino. Le differenze più spiccate noi le troviamo paragonando le cellule dei fornici (fig. 4ª) con quelle che stanno più lontane da questi ultimi, cioè che stanno sia sulla cresta della valvola spirale (fig. 3), sia lungo la linea mediana dorsale dell'intestino (per brevità designeremo queste due regioni col nome di *antibasali*, in opposizione ai fornici, che si trovano alla base della valvola spirale).

Le differenze (fig. 3ª e 4ª) consistono: 1° nella forma; infatti le cellule dei fornici sono lunghe e assai sottili, mentre quelle delle regioni antibasali sono più corte e più larghe: 2° nella forma dei nuclei, che nei fornici sono parimenti più lunghi e sottili; 3° nella disposizione dei nuclei. Infatti i nuclei nei fornici, per quanto siano sottili, tuttavia ingrossano alquanto le cellule nel punto in cui essi risiedono; perchè, adunque, le cellule possano, come in ogni epitelio, star applicate l'una contro l'altra, occorre che i nuclei di cellule vicine stiano disposti a diversa altezza nel corpo cellulare; ne consegue, che nei fornici i nuclei sono disposti in diversi piani e stretti lateralmente l'uno contro l'altro. Nelle zone antibasali, invece, i nuclei tendono a mettersi tutti allo stesso livello e stanno ad una certa distanza l'uno dall'altro; 4° nel numero delle inclusioni presentate dal protoplasma cellulare, le quali sogliono, nei fornici, essere assai meno numerose che nelle regioni antibasali; 5° nel numero dei leucociti migranti nello strato epiteliare. In tutto l'epitelio che riveste l'intestino si trovano dispersi dei leucociti, i quali stanno quasi

esclusivamente in corrispondenza della metà profonda delle cellule, cioè fra la base di esse ed il nucleo; assai di raro si vedono nella metà superficiale. — Orbene, questi leucociti sono piuttosto scarsi nell'epitelio dei fornici (fig. 4 *l*), mentre nelle zone antibasali non è raro veder dei tratti in cui quasi ogni cellula epiteliare è provvista di un leucocito (fig. 3).

Come si spiegano queste differenze? Io credo che esse si trovino in rapporto colla diversa età delle cellule epiteliari. Infatti, egli *è solo nell'epitelio dei fornici che noi troviamo degli elementi che si moltiplicano per mitosi;* e questi elementi vi si trovano costantemente e vi si scorgono con facilità.

Descrivo qui in breve le figure cariocinetiche che si trovano più frequenti e spiccate nell'epitelio del petromyzon, ricordando che i miei preparati vennero fissati ed induriti nell'alcool e colorati specialmente con ematossilina, o, successivamente, con safranina ed ematossilina.

In un primo periodo il nucleo della cellula epiteliare si porta verso la estremità libera dell'elemento (fig. 4 *c*), in modo da trovarsi colla sua estremità inferiore al disopra del livello della estremità superiore dei nuclei in riposo. Esso aumenta alquanto in tutti i suoi diametri; per qualche tempo persistono ancora i nucleoli, poi scompaiono. La cromatina nucleare non si vede mai in forma filamentosa; essa si presenta in forma di bastoncini così corti, da sembrare quasi granuli, notevolmente più grossi dei granuli dei nuclei in riposo e assai più intensamente colorati.

In un periodo successivo la membrana scompare, ed i cromosomi si riuniscono a costituire la piastra equatoriale (fig. 5 *a*), la quale il più delle volte è parallela all'asse longitudinale della cellula, talora, invece, perpendicolare. A questo punto ha avuto luogo una notevole modificazione della forma della cellula; essa si è accorciata ed ingrossata, ed è diventata ovale o claviforme; la sua estremità inferiore, quindi, si è allontanata notevolmente dal limite inferiore dello strato epiteliare, mentre la superiore rimane ancora al suo posto, provvista dell'orlo cigliato. A questo punto essa è lunga 28-32 μ, mentre le cellule in riposo che la circondano son lunghe 70-80 μ.

In un periodo ancora più avanzato i cromosomi si sdoppiano nei due nuclei figli (fig. 5ª *b*), e all'estremità inferiore della cellula comincia ad apparire un'insenatura nel protoplasma (figura 5ª *c*) che accenna alla sua scissione. — Continuando il

processo, si hanno alla fine due piccole cellule appaiate, le quali, poi, gradatamente allungandosi, finiscono a diventare simili per forma e dimensioni alle cellule adulte che le circondano.

Le cellule in mitosi stanno, adunque, di regola nella parte superficiale dello strato epiteliare. Nei molti miei preparati una volta sola io ho veduto *una* mitosi giacente nella parte profonda dello strato, quasi a contatto della membrana limitante; ma non sono sicuro che appartenga all'epitelio: anzi, per la minor grossezza del corpo cellulare e per la maggior grossezza dei cromosomi inclinerei a ritenerla una mitosi di leucociti.

Le mitosi epiteliari dei fornici sono abbastanza numerose. In una sezione dello spessore di 5 μ ogni fornice ne presenta 4-6 ed anche più. Esse stanno nella curva del fornice, e si estendono nell'epitelio del 3° inferiore della valvola spirale e nella porzione corrispondente dell'epitelio dell'intestino.

Questa attiva produzione cellulare parmi basti a spiegare le non piccole differenze che corrono fra le cellule dei fornici e quelle delle altre parti dell'intestino.

Nei fornici infatti le cellule, aumentando continuamente di numero, si comprimono reciprocamente in senso trasversale e diventano, al pari dei loro nuclei, lunghe e sottili; inoltre, la giovinezza sempre rinnovellantesi degli elementi dà ragione della scarsità delle inclusioni che si trovano nel loro protoplasma, e del minor numero di leucociti che si trovano fra essi.

Invecchiando, le cellule epiteliari si spostano gradatamente, sicchè gli elementi più vecchi, se non si desquamano mentre si trovano in cammino, finiscono col trovarsi all'apice della valvola spirale o alla linea mediana dorsale dell'intestino.

Anche nella larva del petromyzon adunque gli elementi non vivono e muoiono là dove primitivamente vennero prodotti. Anche in essa, poi, abbiamo uno speciale focolaio di rigenerazione cellulare che risiede nei fornici; sicchè gli elementi di questi, attivi specialmente per la rigenerazione, non si possono considerare del tutto equivalenti a quelli del resto dell'intestino, che sono attivi specialmente per la funzione.

Intestino medio di alcuni insetti.

Hydrophilus piceus.

Riferiti i risultati ottenuti nei vertebrati, desidero ora di esporre alcune osservazioni frammentarie che ho fatto in alcuni insetti, poichè il modo con cui in questi si compie la rigenerazione dell'epitelio presenta, nelle diverse specie esaminate, delle differenze che hanno molta somiglianza con quelle osservate nei vertebrati. — Incomincierò dall'Hydrophilus, giacchè in nessuno degli animali da me studiati meglio che nell'idrofilo si può dimostrare la derivazione dell'epitelio dell'intestino da quello delle sue ghiandole tubulari (1).

Nell'idrofilo le pareti dell'intestino medio sono costituite (figura 6ª): 1° dall'epitelio di rivestimento; 2° dalla membrana chitinosa; 3° dallo strato connettivo, 4° dagli strati muscolari; 5° dalle numerosissime ghiandole (2).

1° *Epitelio* (fig. 6ª). — È costituito da una sola specie di elementi, cioè da cellule prismatiche lunghe, a contorno laterale spiccato. Il nucleo giace verso il mezzo del corpo cellulare, è irregolarmente ovale, ed a contorno marcato; contiene talora un paio di nucleoli, più spesso un nucleolo solo, grosso, a contorno irregolare, da cui parte un reticolo che, essendo a trabecole fine e a maglie larghe, dà al nucleo un aspetto chiaro. Il protoplasma è pur chiaro, a cagione di una quantità di vacuoli, che gli danno un'apparenza reticolata; il reticolo è, poi, relativamente più fitto ed a trabecole più grosse nella metà superficiale della cellula che nella profonda. Le cellule, al solito, portano alla loro estremità libera l'orlo striato, che è di un discreto spessore, ed a strie assai fine.

2° *Membrana chitinosa.* — È distesa sotto le cellule epiteliari ed è su di essa che posa direttamente la loro estremità

---

(1) Un brevissimo rapporto di queste osservazioni venne già da me pubblicato nella seduta 26 maggio 1889 della R. Accad. delle Scienze di Torino.

(2) Per lo studio usai a preferenza l'indurimento col liquido di Kleinenberg e la colorazione con safranina, e specialmente con ematossilina; e quando non è detto altrimenti, mi riferisco a questi preparati. Paragonai, però, coll'indurimento coll'acido osmico, col liquido di Flemming, o col sublimato.

profonda. — Su sezioni verticali della parete intestinale essa si presenta sotto la forma di una linea assai marcata (fig. 6 *b*), resa irregolarissima da una quantità di curve e di angoli, derivanti da ciò che essa, anzichè essere piana, è, di solito, finamente pieghettata. Essa si può studiare facilmente sia isolandone dei lembi colla dilacerazione delle pareti dell'intestino, sia trattando addirittura quest'ultimo con una soluzione tenue di potassa caustica, la quale fa scomparire ogni altro elemento, all'infuori della membrana chitinosa. Si vede che questa è sottile, jalina, omogenea, e si nota che, oltre alle anzidette pieghettature, essa presenta numerosi fori, presso a poco tutti della stessa grandezza, e distribuiti con notevole regolarità (fig. 9ª *a*). È facile il persuadersi che ogni foro corrisponde allo sbocco di una ghiandola. In corrispondenza di ogni foro la membrana forma una specie di capezzolo o di imbuto (fig. 10ª), al cui apice si trova appunto il foro; nelle pareti dell'imbuto la membrana è finamente pieghettata, in modo da ricordare le pieghettature di un collaretto spagnuolo (fig. 9 *b*).

3° *Stroma connettivo* (fig. 6 *c*), — È rappresentato da uno straterello di sostanza omogenea, che sta sotto la membrana chitinosa, dalla quale con tutta facilità si stacca, e da cui si distingue, oltre che pel minor potere di rifrazione, per la facilità con cui scompare colla potassa caustica. La superficie superiore di questo strato appare, nei pezzi induriti, provvista di una quantità di sporgenze irregolari, che corrispondono alle pieghettature già accennate della membrana chitinosa. Inferiormente, poi, esso manda dei prolungamenti, che costituiscono la membrana propria delle ghiandole, ed altri prolungamenti che si insinuano fra le sottogiacenti fibre muscolari.

4° *Muscoli.* — Nelle pareti intestinali abbiamo fibre muscolari striate che, a seconda della direzione che hanno, si distinguono in *longitudinali interne*, *trasversali* e *longitudinali esterne.*

Le *fibre longitudinali interne* si distinguono, oltre che per la direzione, per la forma e sottigliezza. Sono delle cellule allungate, sottili (4-6 μ), contenenti un grosso nucleo ovale, e fornite di parecchi prolungamenti che, come il corpo della cellula, sono diretti in direzione prevalentemente longitudinale per rapporto all'intestino, e si assottigliano sempre più coll'allontanarsi dalle cellule cui appartengono. I prolungamenti di cellule vicine s'in-

trecciano fra loro. Tanto le cellule quanto i loro prolungamenti sono trasversalmente striati Esse giacciono nella parte profonda dello straterello connettivo anzidescritto, sicchè, su sezioni trasverse dell'intestino colorate col carmino, esse appaiono come piccole figure circolari di vario diametro, che sono immerse nella sostanza connettiva e facilmente possono scambiarsi per nuclei (fig. 6, *d*).

Le fibre *trasversali* o *circolari* (fig. 6 *e*), a seconda del loro diametro si distinguono in sottili e grosse. Le prime (del diametro di 5-8 μ) sono più interne, e quindi si trovano in rapporto di contiguità colle anzidescritte fibre longitudinali; le seconde (del diametro di 10-12 μ) stanno immediatamente all'esterno delle sottili, con cui costituiscono, quindi, un unico strato. Tanto questo strato, quanto quello formato dalle fibre longitudinali interne, sono, naturalmente, attraversati dalle ghiandole, e più precisamente dagli sbocchi di queste; le loro fibre muscolari devono, quindi, avere per buona parte un decorso onduloso, dovendo deviare tratto tratto quando incontrano un collo ghiandolare.

Le *fibre longitudinali esterne* (fig. 6 *f*) non formano un vero strato. Esse costituiscono dei fascetti di 2-3 fibre, che nel loro decorso corrispondono ora verso il fondo cieco, ora verso il mezzo, ora un po' più verso lo sbocco delle ghiandole, alla cui membrana propria aderiscono. Stanno, quindi, ad una notevole distanza dalle fibre circolari. I fascetti s'intrecciano tratto tratto fra loro, costituendo così una rete a lunghissime maglie longitudinali; in ognuna di queste sta una parimenti lunga fila di ghiandole. Le singole fibre muscolari sono spesso alquanto appiattite, grosse 12-20 μ, talora biforcate, e in sezioni trasversali mostrano con molta chiarezza un asse protoplasmatico contenente i nuclei, ed una corteccia di sostanza contrattile.

5° *Ghiandole.* — Sono numerosissime (fig. 8ª *e*), tanto da quasi toccarsi l'una l'altra, e disposte con una notevole regolarità. Sono, infatti, disposte in lunghe file longitudinali, equidistanti fra loro. Se, poi, per una ghiandola qualunque di una fila si immagina condotta una retta perpendicolare alla direzione delle file, questa taglia le due file adiacenti a metà dell'intervallo fra due ghiandole di quelle (fig. 9ª *a*).

Le ghiandole (fig. 6ª) sono piriformi allungate, con ingrossata la estremità corrispondente al fondo cieco. Esse si connettono alle pareti dell'intestino colla loro estremità superiore, che corrisponde allo sbocco; la porzione inferiore è libera, sicchè la su-

perficie esterna dell'intestino, guardata colla lente, appare finamente e regolarmente granulata. Sono limitate da una membrana propria sottile, jalina, trasparentissima, prolungamento, come dissi, dello strato connettivo. Su di questa si vedono applicate alcune cellule pallide, fortemente appiattite, ed allungate nel senso dell'asse maggiore della ghiandola, le quali forse corrispondono alle cellule di Henle delle ghiandole tubolari gastroenteriche dei mammiferi.

Il contenuto della ghiandola è per buona parte rappresentato da cellule epiteliari, sicchè il lume ne risulta relativamente assai piccolo, e non si estende che ai due terzi superiori della ghiandola. — Le cellule epiteliari, poi, variano assai a seconda del posto che occupano. Ne possiamo distinguere tre zone:

Nel *fondo cieco* (1ª zona) le cellule (fig. 6, x) sono piccole, poliedriche; hanno un protoplasma a reticolo fitto, e contengono dei nuclei piccoli, rotondeggianti od ovali, forniti alla loro volta di un nucleolo piuttosto grosso, da cui parte un fino reticolo di cromatina. — *Fra queste cellule si vedono frequenti delle mitosi* (2-4 per ogni sezione di ghiandola dello spessore di 5 μ) in tutti gli stadi. La cromatina delle mitosi è sotto forma di granuli o corti bastoncini minutissimi, fortemente colorabili; sempre molto visibile (quantunque si tratti di cellule assai piccole) è il fuso acromatico.

Nella 2ª zona (fig. 6 y), le cellule si appiattiscono, si allungano e si dispongono radiatamente in modo, che coll'estremità esterna toccano la membrana propria della ghiandola, e colla interna arrivano al centro di questa, ove s'incontrano colle cellule del lato opposto. I loro nuclei vanno ingrossando, sono ovali, e disposti a poca distanza dalla membrana propria.

La 3ª zona incomincia dove comincia il lume ghiandolare, ed arriva fino allo sbocco. Le cellule vi stanno (fig. 6 z) in un unico strato disteso fra il lume e la membrana propria della ghiandola. Esse si sono ingrossate ed accorciate, così come si sono ingrossati il nucleo ed il nucleolo. Il reticolo protoplasmatico presenta maglie più larghe, sicchè le cellule appaiono più chiare di quelle che stanno nelle due zone anzidescritte. Inoltre, alla *loro superficie libera le cellule presentano un orlo striato*, simile a quello dell'epitelio intestinale, ma un po' più sottile.

In vicinanza dello sbocco della ghiandola le cellule devono cambiar forma, perchè il lume ghiandolare si allarga e la ghian-

dola, al contrario, si assottiglia. Esse, quindi, si appiattiscono fortemente, si curvano, e, convergendo, vanno ad applicarsi intorno alla punta dell'imbuto chitinoso. — La membrana propria della ghiandola non le segue in questa curva; essa procede diritta, attraversa lo strato muscolare, e, giunta alla superficie dello strato connettivo, si fonde con esso. Ne consegue che tutt'attorno all'imbuto chitinoso rimane uno spazio circolare (fig. 6 *g*), a sezione triangolare, limitato internamente dall'imbuto stesso, esternamente dalla membrana propria ghiandolare, inferiormente dalle cellule lamellari dell'epitelio ghiandolare, spazio che pare riempito di liquido chiaro con pochi granuli (1).

Quanto al secreto che riempie il lume della ghiandola, esso, nei pezzi induriti nel liquido Kleinenberg, appare omogeneo, fortemente rinfrangente, di aspetto mucoso o colloideo.

Da questa descrizione che ho dato dell'intestino dell'idrofilo si può, senz'altro, determinare il modo di rigenerazione dell'epitelio intestinale? No certamente; *poichè l'epitelio intestinale non presenta mai alcuna delle sue cellule in mitosi.* È vero che ci sono numerose mitosi nelle ghiandole; ma *l'epitelio ghiandolare è nettamente separato dall'intestinale per mezzo dell'imbuto chitinoso.* All'apice dell'imbuto chitinoso esiste bensì, come dissi, un foro, ma questo ha diametri assai più piccoli di quelli delle cellule ghiandolari circondanti lo sbocco; inoltre questi fori della chitinosa (nella membrana isolata dopo macerazione in alcool allungato, ed esaminata in una goccia d'acqua leggermente colorata con eosina) mi apparvero generalmente chiusi mediante uno straterello di sostanza finamente granulosa.

C'è poi un'altra particolarità che richiama la nostra attenzione. Il lume delle ghiandole mette capo al foro dell'imbuto chitinoso; ma al di là di questo manca un dotto escretore che attraversi l'epitelio di rivestimento. Le cellule di queste passano come strato continuo al di sopra degli imbuti; è facile il persuadersene tanto su sezioni verticali dell'intestino (fig. 6), quanto esaminando dei lembi di epitelio intestinale isolati colla macerazione. A che serve il secreto se non può svuotarsi liberamente nell'intestino? O vi si svuota, forse, procurandosi un passaggio

(1) Questi rapporti fra gli elementi costituenti lo sbocco ghiandolare si vedono bene nei pezzi induriti con soluzione d'acido osmico 1 %.

temporaneo coll'allontanare l'una dall'altra le cellule sovragiacenti dell'epitelio di rivestimento?

Queste incognite si spiegano tenendo conto di un fatto assai curioso che ho notato negli idrofili, e di cui ho già dato conto, come più sopra dissi, nella mia nota del 1889. — Questi animali tratto tratto eliminano dall'apertura anale dei cordoncini bianchicci, semitrasparenti, piuttosto elastici, lunghi parecchi centimetri. Siffatti cordoncini sono costituiti, andando dall'esterno all'interno: 1° da uno strato gelatinoso, resistente all'acido acetico, d'aspetto mucoso (fig. 10 y); 2° dalla membrana chitinosa dell'intestino medio, tosto riconoscibile pe' suoi caratteri, e specialmente pei suoi imbuti e fori (fig. 10 x). Essa rappresenta ancora un tubo come quando era nell'intestino, sicchè limita un lume in cui trovasi, 3° un contenuto, costituito da una massa gelatinosa, sparsa di ammassi granulari di diverso aspetto, spesso nerastri, che sono palesemente materie fecali. Nessuna traccia di epitelio intestinale.

Talora l'animale elimina due o tre cordoncini, ciascuno di alcuni cm. di lunghezza, tal altra ne elimina un solo, della lunghezza di 10-12 cm. e più; cioè di una lunghezza che corrisponde a quella dell'intestino medio dell'idrofilo.

Si tratta, adunque, dell'eliminazione di tutta la membrana chitinosa dell'intestino medio, rivestita da uno strato di secreto, e contenente materie fecali.

Io ho voluto anche studiare con quanta frequenza e con quanta regolarità questa eliminazione abbia luogo. A questo scopo in maggio e giugno 1889 ho mantenuto isolati (ciascuno in un proprio vaso pieno d'acqua) alcuni idrofili, li ho nutriti abbondantemente con carne, ed ho continuato a tenere nota dei giorni in cui la chitinosa veniva espulsa fino al giorno in cui li uccideva per esaminarne l'intestino. Ecco i risultati. Designo i diversi animali colle lettere dell'alfabeto; i numeri che seguono a queste indicano i giorni, dal principio all'esperimento, in cui ebbe luogo l'evacuazione:

A = 5, 12, 17, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 32, 34, 36, 39, 40
B = 12, 16, 17, 20, 22, 24, 27, 29, 36, 37, 42
C = 12, 17, 20, 21, 24, 26, 29
D = 13, 19, 21, 23, 24, 28, 31, 35, 38
E = 10, 13, 18, 19, 20, 21
F = 5, 6, 10, 12, 17, 20, 24, 28, 30, 33, 35.

Come si vede da questa tabella, quantunque in media si abbia una eliminazione ogni tre giorni, tuttavia nei singoli casi si osservano differenze notevoli, giacchè in uno stesso animale si possono avere delle eliminazioni distanti l'una dall'altra 6 o 7 giorni, e successivamente delle eliminazioni distanti l'una dall'altra soltanto 24 ore. Probabilmente questa irregolarità si tiene in rapporto colla quantità di alimenti che l'animale assume. A ciò inclino a credere considerando che gli animali, come appare dalla tabella, cominciarono ad eliminare la chitinosa da 5 a 13 giorni dopo che erano stati isolati e s'era cominciato a fornirli di cibo; mentre, dopo che l'esperienza fu in corso e la assunzione di alimenti fu lasciata in balìa dell'animale, le eliminazioni ebbero luogo, in media, ad intervalli assai più corti.

Non ho fatto altre esperienze atte a risolvere questa questione, perchè a me bastava avere accertato, che questa eliminazione della chitinosa è un fatto frequente e *normale* nell'idrofilo. L'ho osservato in animali conservati per molti mesi in laboratorio, e presentanti sempre le apparenze della migliore salute.

Il distacco della chitinosa deve necessariamente essere accompagnato dal distacco dell'epitelio intestinale che giace su di essa. Non si saprebbe comprendere come il fatto potesse aver luogo altrimenti. Tuttavia in nessuno dei cordoncini eliminati si può trovar traccia di epitelio. — La spiegazione che mi parve più naturale di questo fatto si fu, che l'epitelio venga distrutto, digerito rapidamente mentre la chitinosa si trova ancora nell'intestino. A determinare il valore della mia supposizione io esaminai l'intestino dei suaccennati idrofili, che uccidevo a diverso intervallo dall'ultima evacuazione Se la mia supposizione era fondata, e se la distruzione dell'epitelio non ha luogo in modo istantaneo, avrei dovuto trovare qualche animale in cui l'intestino contenesse la chitinosa in via di eliminazione, ma ancora provvista del suo epitelio. — Ed è appunto ciò che avvenne. Il lume intestinale degli idrofili *B* e *G* non conteneva che masse d'aspetto mucoso, con materie fecali; quello degli idrofili *C*, *D*, *F* conteneva la chitinosa accartocciata, in via di eliminazione, senza traccia di epitelio; finalmente quello dell'idrofilo *E*, ucciso 4 giorni dopo l'ultima evacuazione, *presentava la chitinosa in via di eliminazione, ancora provvista del suo epitelio.*

Darò una breve descrizione di questo intestino dell'idrofilo *E*, perchè da un paragone fra esso e quello degli animali anzi

citati si può arguire come abbiano luogo la eliminazione e la riproduzione della chitinosa e del suo epitelio.

L'intestino dell'idrofilo *E* è contratto (fig. 8); la chitinosa caduta (*a*) in parte tocca l'epitelio nuovo, che le è sottoposto, in parte se ne trova distaccata formando delle pieghe irregolari, sicchè fra essa e l'epitelio suddetto rimangono degli spazi, i quali sono riempiuti d'una sostanza d'aspetto colloideo (*c*), simile a quella che costituisce il secreto delle ghiandole e presentante qua e là degli scarsi piccoli nuclei rotondeggianti (fig. 11 *c*). Nella chitinosa sono evidentissimi gli imbuti (fig. 11). La superficie superiore della chitinosa è ancora regolarmente rivestita del suo vecchio epitelio. Gli elementi di questo sono perfettamente riconoscibili e colorabili (fig. 11 *b*) In preparati induriti in alcool e colorati col picrocarmino, le cellule presentano di solito al disopra (di raro al disotto) del nucleo un grosso vacuolo, hanno un orlo striato grosso ed a strie poco evidenti, e, per contro, presentano assai spiccata una striatura longitudinale di quella zona di protoplasma che sta sotto all'orlo striato.

Quanto alle tonache intestinali, si osserva quanto segue: 1° l'epitelio è onduloso (fig. 8 *b* e fig. 7 *a*): gli infossamenti corrispondono agli sbocchi ghiandolari, i rialzi agli spazi interghiandolari. Le sue cellule hanno protoplasma piuttosto chiaro, e posseggono già un orlo striato piuttosto grosso; 2° sotto l'epitelio manca ogni traccia di membrana chitinosa; 3° lo strato connettivo (fig. 7 *c*) non presenta, di degno di nota, che più lunghe e sottili le sporgenze della sua superficie; 4° nulla di notevole presentano i muscoli; 5° di notevole importanza, invece, sono le modificazioni che offrono le ghiandole e che appaiono a prima vista paragonando fra loro le figure 6 e 7. Le ghiandole dell'idrofilo *E* sono piccole, corte, applicate strettamente l'una contro l'altra (fig. 8 *e*). Il loro impicciolimento si spiega studiando il contenuto (fig. 7). Infatti, in esse sono rappresentate soltanto due delle tre zone epiteliari che abbiamo veduto nella fig. 6ª: la zona del fondo cieco (la quale fra le sue cellule piccole, poliedriche presenta sempre parecchie mitosi) e la zona sovrastante a questa, cioè quella a cellule lunghe, strette e radiate. In questa seconda è da osservare sol questo, che in talune ghiandole manca ogni traccia di lume, mentre in altre le cellule più vicine allo sbocco non si toccano colla loro estremità

centrale, ma lasciano uno spazio chiaro, che sembra contenere un po' di liquido sieroso (fig. 7 *h*). Manca, invece, la terza zona, quella a grosse cellule chiare e a orlo striato, e manca ogni traccia di secreto mucoso. Al posto di tutto ciò si osservano due grosse cellule (fig. 7 *g*), a grosso nucleo, e a protoplasma che è assai chiaro perchè costituito da un fino reticolo a larghissime maglie. Talora fra queste due cellule se ne osserva una terza, compressa e schiacciata da esse (figura citata). — Queste cellule segnano il confine della ghiandola, *perchè è direttamente su di esse che poggia l'epitelio di rivestimento dell'intestino;* ed è in questo solo periodo che l'epitelio ghiandolare mi apparve in continuazione diretta (senza interposizione di membrana chitinosa) coll'epitelio di rivestimento.

Infatti, nell'idrofilo *D*, che si trovava in un periodo di ben poco più avanzato dell'idrofilo antecedente (la chitinosa caduta era ancora nell'intestino, ma il suo epitelio era già stato digerito) fra le due cellule ghiandolori chiare e l'epitelio intestinale si trovava già interposto l'imbuto chitinoso, provvisto de' suoi caratteri morfologici. Sembra che l'imbuto sia la prima parte che si forma della chitinosa, perchè in quest'animale, neppure coi più forti ingrandimenti, potei accertare l'esistenza della chitinosa fra l'epitelio intestinale e lo strato connettivo.

Invece, negli idrofili *C* ed *F*, ad onta che la chitinosa caduta fosse ancora nell'intestino, la chitinosa nuova si poteva dimostrare riprodotta tanto in corrispondenza degli sbocchi ghiandolari, quanto fra epitelio intestinale e strato connettivo. Essa qui era dunque già completa. - Le ghiandole erano ancora piccole; sotto l'imbuto chitinoso vedevansi ancora le due cellule grosse e chiare, ma al disotto di queste cominciava ad accumularsi del secreto mucoso.

Per ultimo, negli idrofili *B* e *G* la chitinosa caduta era già stata eliminata dall'intestino. In essi le ghiandole erano grosse e piene di secreto, la chititosa nuova già ben spiccata.

Dall'esame dell'intestino di questi animali uccisi nel maggio e giugno 1889, così come di quello di altri animali uccisi nell'aprile dello stesso anno, ecco il concetto che mi sono fatto intorno al processo pel quale ha luogo la muta dell'intestino medio:

Nel momento che precede il distacco della chitinosa le ghiandole sono fortemente distese dalle numerose cellule epiteliari che

vi si sono moltiplicate per cariocinesi, e dal copioso secreto mucoso ch'esse hanno fabbricato (fig. 6), e che non potè svuotarsi attraverso al sottile foro della chitinosa.

È a questo punto che succede la eliminazione parziale del contenuto ghiandolare, ed essa ha luogo sia per la pressione secretoria endoghiandolare, sia (e questa deve agire in modo brusco) per la contrazione dei muscoli. La contrazione dei muscoli avvicina l'una all'altra le ghiandole, in modo ch'esse si comprimono reciprocamente. Riguardo ai muscoli longitudinali esterni è da notare che, inserendosi essi generalmente verso il mezzo delle ghiandole, la loro compressione si esercita specialmente sul contenuto della metà superficiale delle ghiandole, cioè su quella parte che deve essere spinta fuori. — Sotto questa pressione il secreto mucoso si spinge fra la chitinosa e lo strato connettivo sottoposto, staccando quella da questo. Ecco, adunque, che il budello chitinoso, tappezzato internamente dall'epitelio, si trova libero nel lume intestinale, ed è rivestito alla sua superficie esterna da quello strato mucoso che ha servito al suo distacco e che noi abbiamo trovato costante tanto sulla chitinosa ancora giacente nel lume intestinale (fig. 8 *c*), quanto su quella già eliminata dall'animale (fig. 10 *y*) (1).

La stessa contrazione, che ha espresso dalle ghiandole il secreto mucoso, spinge fuori anche le cellule ghiandolari, che circondavano quest'ultimo. Esse si dispongono sullo strato connettivo limitante il lume intestinale, e vi costituiscono il nuovo strato di epitelio di rivestimento. — A questo punto, adunque, le ghiandole (fig. 8 *e*) sono piccole, compresse l'una contro l'altra, prive di secreto, e il loro epitelio è in diretta continuità coll'epitelio di rivestimento dell'intestino (fig. 7) che da esse ha avuto origine. Ma ben presto fra quell'epitelio e questo si forma l'imbuto chitinoso che di nuovo li separa, e che poi si estende fra l'epitelio intestinale e lo strato connettivo che lo sostiene; nelle ghiandole (fig. 6¹) le cellule più vicine allo sbocco entrano in

---

(1) Questo modo di distacco mi ricorda quello descritto da Todaro (*Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia*. Roma, Salviucci. 1878) nella muta dell'epidermide dei rettili, nella quale pure si forma uno strato di sostanza mucosa che separa l'epidermide vecchia dalla nuova; colla differenza, però, che nei rettili la sostanza mucosa non è un secreto ghiandolare, ma un prodotto di degenerazione di uno speciale strato epiteliare.

attività secretoria, e producono nuova sostanza mucosa, mentre quelle giacenti nel fondo cieco si moltiplicano per mitosi; e così in breve tempo l'intestino si trova pronto per una nuova eliminazione della chitinosa e del suo epitelio.

L'idrofilo, adunque, si distingue dagli animali fin qui studiati per ciò, che mentre in questi nell'intestino si desquamano successivamente singole cellule, nell'idrofilo si desquama e si riproduce in blocco tutto lo strato epiteliare (1).

---

(1) Una breve descrizione ed un disegno dell'intestino d'idrofilo si trovano nel noto lavoro di FRENZEL sull'intestino medio degli insetti (*Arch. f. mikr. Anatomie*, vol. 26, pag. 229, tav. IX, 1885). FRENZEL, però, non ha distinto lo strato muscolare longitudinale interno; inoltre, non avendo notato l'esistenza della membrana chitinosa, e non conoscendo il fatto del periodico rigenerarsi di questa e del suo epitelio, non ha potuto conoscere i curiosi rapporti genetici che esistono fra l'epitelio delle ghiandole e quello dell'intestino. Secondo lui quest'ultimo si rigenera per scissione *diretta* delle sue stesse cellule.

Sulle anomalie di sviluppo dell'embrione umano;

Comunicazione V, del Socio Prof. C. GIACOMINI

Chi ha avuto l'opportunità di esaminare una serie numerosa di prodotti abortivi dei primi due mesi, si sarà certamente incontrato in casi, nei quali mancava all'interno delle membrane l'embrione. Questa possibilità è d'uopo che sia bene stabilita, onde evitare false interpretazioni e per poter convenientemente apprezzare il materiale antico e recente descritto nella letteratura.

Ora ciò può succedere in due modi: o perchè l'embrione si arrestò nelle primissime fasi del suo sviluppo, entrò in un periodo di regresso, fu assorbito in loco e scomparve senza lasciar residui.

Oppure perchè l'embrione emigrò dalla sede sua naturale, attraversò tutte o parte delle membrane che lo involgevano e fu espulso in epoca più o meno lontana dal momento in cui avvenne l'aborto propriamente detto e furono emesse le sue membrane. Questo secondo modo ammette ancora una distinzione, secondochè nella sua emigrazione l'embrione è seguito dal sacco amniotico; ovvero esso si presenta nudo, e tutte le membrane rimangono al loro posto e continuano a vivere ed anche a crescere.

È mio desiderio di discorrere brevemente di queste diverse occorrenze, arrecando osservazioni le quali valgano a dimostrare la loro possibilità. Se queste, a primo aspetto, possono sembrare questioni secondarie riguardo alla ontogenesi della specie nostra; esse meritano però d'essere attentamente studiate, potendo la loro soluzione appianare la via per ricerche più importanti. D'altra parte esse interessano la patologia dell'embrione e delle sue membrane, così poco avanti nel suo studio, e per ciò solo esse devono richiamare la nostra attenzione.

Prima però di venire direttamente all'argomento credo opportuno di riferire una nuova osservazione un po' difficile ad essere interpretata, ma che pur nondimeno io penso abbia grande importanza per stabilire un legame fra i prodotti abortivi i quali presentano ancora un rudimento d'embrione, e quegli altri nei quali ogni traccia d'embrione manca completamente.

Oss. VII.

Il 18 aprile 1889 riceveva dal dott. Carbonelli un aborto il quale era avvenuto il giorno prima, ed era rimasto per 24 ore in acqua. Circostanza questa non troppo favorevole per uno studio diligente e minuto delle singole parti, e che deve perciò evitarsi il più possibile. L'aborto comprendeva tutte le membrane d'origine fetale e materna, che furono indurite e quindi conservate in alcool (N. XXI della Raccolta).

La caduca ovulare era già stata incisa ed il Chorion era in gran parte allo scoperto. Liberato dalle decidue l' ovolo aveva forma leggermente ovale. Il massimo diametro misurava appena 10 millim,, il trasverso 9 mm. Tutta la superficie del Chorion era rivestita da villosità regolarmente ed uniformemente disposte. In un punto, corrispondente ad una estremità del massimo dia-

metro, il Chorion si allungava in un breve peduncolo, il quale si trovava impegnato in una apertura della caduca.

La fig. 1 dimostra l'ovolo a grandezza naturale.

Un ovo con queste dimensioni è certo uno dei più piccoli che sia stato descritto; avrebbe corrisposto alla 2ª settimana e mi aspettava di trovare un embrione appena costituito. His per i suoi embrioni più piccoli di 2 a 4 mm. dà come diametro del Chorion 1,5 c.m. e recentemente Spee ha descritto un embrione umano dei primi periodi con canale neuenterico e canale midollare aperto, il quale era contenuto in un sacco coriale di 8,5, — 10 e 6,5 mm.

Prima di aprire il Chorion mi assicurai con un attento esame della perfetta integrità della sua parete; e l'esame fu tanto più accurato sospettando che l'embrione fosse già uscito, non presentandosi il sacco coriale troppo disteso; ma ciò era forse da mettersi in rapporto al suo lungo soggiorno in un liquido improprio per la conservazione delle parti

Dopo esser rimasto per qualche tempo in alcool fu aperto il Chorion, e la piccola cavità si trovò percorsa da una sostanza aracnoidea, la *magma reticularis*, la quale dava un aspetto nebuloso a tutto il contenuto. Non fu possibile scorgere il sacco amniotico ed il prodotto embrionario.

Sulla parete opposta all'apertura del Chorion si notava un piccolissimo corpicciuolo rossastro, puntiforme, che si intravedeva appena attraverso la magma, e del quale non fu possibile di ben stabilire la forma, i rapporti e la natura.

Anche visto ad un certo ingrandimento non potevano essere distinti altri particolari; però il corpicciuolo si dimostrava ben organizzato, ben circoscritto, e di una certa consistenza, e si distingueva perciò dagli ordinari precipitati che si formano nella cavità dell'ovo sotto l'azione dei reagenti. Non era possibile quindi dire se questo corpo rappresentasse una parte o la totalità dell'embrione, oppure se avesse altro significato.

In tutte le forme anomale che abbiamo studiato fino ad ora, per quanto l'atrofia dell'embrione fosse giunta all'estremo grado (vedi Oss. precedente VI), riesciva sempre abbastanza facile il caratterizzare non solo l'embrione, ma ancora le sue principali regioni; ma ciò veniva fatto in specie per i rapporti che il prodotto conservava colle membrane. Nel caso presente il rudimento embrionario, se possiamo così chiamarlo, non aveva connessioni col

Chorion, di più l'Amnios non si lasciava scorgere. Eravamo adunque in presenza di una disposizione forse non ancora descritta. Per risolvere ogni questione conveniva procedere ad un esame più minuto.

Fu distaccato tutto il tratto di Chorion che sosteneva nel suo centro il corpicciuolo, e che misurava pressochè il terzo di tutta la superficie coriale. Convenientemente colorita con borace carmino, questa parte fu divisa in oltre 400 sezioni.

L'esame microscopico delle sezioni ci diede maggiori rischiarimenti, ma non dissipò completamente i dubbi.

Ecco ciò che venne osservato.

Nelle prime sezioni si notava solamente il Chorion con le sue dipendenze. La sua parte mesodermale era robusta, ben costituita e ricca di cellule. L'epitelio era distaccato per lunghi tratti, e si presentava sotto forma di un sottile nastro; i limiti cellulari non erano ben distinti e lo stesso fatto si osservava nelle villosità. Ciò in gran parte era l'effetto della cattiva conservazione. Non si rinvenne traccia di vasi sanguigni.

Lo spessore del Chorion è relativamente pronunciato e si mantiene costante in tutta l'estensione della sezione. Anche le villosità sorgono voluminose e sono poco ramificate. Alla sua faccia interna appare il tessuto della magma con scarsissime cellule. Non si notano altre particolarità.

Giunto alla 78ma sezione in un punto della superficie interna del Chorion incomincia ad accennarsi una leggera sporgenza, che va aumentando nelle sezioni successive; quindi al centro di essa si forma una cavità, ed entro questa compare un sottilissimo nastro contorto circoscrivente uno spazio più ristretto, come si scorge nella fig. 3^{a}. Questo nastro è formato da cellule di natura epiteliare in condizioni non troppo perfette di conservazione. Queste cellule primitivamente dovevano essere applicate alla superficie interna della cavità che è circoscritta dalla sporgenza mesodermica del Chorion e formare così il rivestimento epiteliare di essa. L'epitelio si è distaccato dalla parete della vescicola forse per le medesime circostanze che hanno prodotto il distacco del rivestimento epiteliare dal Chorion e dalle sue villosità.

Si ha così una vescicola perfettamente chiusa, la cui parete è formata da due strati, uno epiteliare e l'altro connettivale; questo ha l'identica costituzione dello stroma del Chorion, col quale si confonde nelle prime sezioni, più tardi essa si rende in-

dipendente (fig. 4ª). Ma allora il nastro epiteliare è già scomparso. Lo strato epiteliare non ha legami colle parti circostanti, e non si può dire quale sia la sua provenienza. Ciò rende molto difficile di interpretare il significato di tutta questa formazione, se debba vale a dire considerarsi come una produzione del Chorion, oppure di altre dipendenze degli annessi fetali.

Quando incomincia a comparire la cavità di questa vescicola, al lato sinistro di essa dalla superficie interna del Chorion parte una stria di tessuto mesodermico, sotto forma di sottilissima membranella, la quale può essere seguita ad una certa distanza e poi scompare confondendosi con la magma reticulare (fig. 5ª *A*).

Nello spazio compreso fra questi due prolungamenti del tessuto mesodermico del Chorion, compare un cumulo cellulare ben circoscritto che va un po' ingrossando e poi tosto finisce. Esso fu compreso in 30 sezioni. Questo cumulo ci rappresenta il corpicciuolo che abbiamo notato macroscopicamente quando fu aperto il Chorion.

Gli elementi che lo costituiscono ricordano quelli dell'embrione, però non sembrano normali nè nella costituzione, nè nella distribuzione. Sono delicati, mal circoscritti poco coloriti dal carmino e d'aspetto epiteliare. In un tratto della superficie questo accumulo è limitato da un unico strato di cellule appiattite, che non può essere seguito per tutta l'estensione della formazione, ma che in alcuni punti appare ben distinto con nuclei fortemente coloriti e sporgenti sulla superficie.

Gli elementi situati internamente hanno forma rotondeggiante, contenuto granuloso, e nucleo pochissimo evidente. Nelle prime sezioni queste cellule sembrano sparse uniformemente senza dar origine a formazioni speciali; però nel centro del tubercolo si notano delle parti circoscritte, che possono essere seguite per poche sezioni, che accennano quasi ad organi embrionali; ma dalla loro forma, dalla loro costituzione e dai loro rapporti non possiamo dedurre nulla riguardo alla loro significazione. La fig. 5ª disegnata ad un maggiore ingrandimento dimostra la costituzione del tubercoletto nella sua parte centrale; in *a* e *b*: si vedono dei tratti abbastanza ben circoscritti che simulano organi primitivi dell'embrione.

Il corpicciuolo che stiamo descrivendo non si presenta completamente isolato dalle parti circostanti; ma nelle prime sezioni si vede che esso contrae una connessione stretta con la parete della vescicola per mezzo di breve e sottile peduncolo, formato

da poche cellule circondate da sostanza amorfa, che si continua con il tessuto mesodermale della vescicola, senza spingersi profondamente. Ciò è dimostrato dalla fig. 4ª in *F*

Considerate queste due formazioni a piccolo ingrandimento, senza discendere a particolari di struttura, sembra d'aver sott'occhio un embrione colla sua vescicola ombellicale, grandemente modificati nella loro conformazione.

Continuando l'esame delle sezioni si scorge che la vescicola è la prima a scomparire, poi cessano le cellule che formano il tubercoletto, e finalmente il prolungamento membraniforme che si origina dallo stroma del Chorion anche esso non diventa qui distinguibile. Le restanti sezioni sono tutte uniformemente disposte e non dimostrano alcuna particolarità la quale meriti una descrizione, e porti rischiaramento alle cose sopradette,

Come si scorge dalla fatta descrizione, noi ci troviamo in presenza di un caso un po' difficile ad essere ben interpretato. È certo però che si tratta qui di un'anomalia di sviluppo di una forma nuova che non ha riscontro nelle osservazioni precedentemente studiate.

Due supposizioni noi possiamo fare su questo proposito. Una è quella di ammettere che l'embrione sia uscito dalla sua sede naturale attraversando il Chorion e sia stato accompagnato nella sua emigrazione dall'Amnios. La seconda si è di considerare il nostro ovolo colpito da un arresto di sviluppo avvenuto nelle primissime fasi quando il Chorion si era appena differenziato. L'arresto avrebbe interessato non solo l'embrione, ma tutte le formazioni comprese nella cavità coriale vale a dire l'Amnios, la vescicola ombellicale ed anche il peduncolo addominale.

L'idea che l'embrione fosse uscito è la prima che era venuta alla nostra mente quando fu esaminato il contenuto dell'ovo e fu trovato mancante di parti formative; ma dopo l'esame microscopico delle sezioni è difficile di poter accogliere questa ipotesi, essendo che rimarrebbe sempre a dare una interpretazione alle particolarità descritte entro il Chorion.

Ed anche supponendo che l'emigrazione dell'embrione non sia stata completa, ma una piccola parte fosse rimasta a posto, contrasta ancora la perfetta integrità del Chorion, constatata prima della sua apertura, ed il modo di presentarsi delle parti entro contenute.

Per cui torna più conveniente di credere che si tratti real-

mente di un disturbo di sviluppo avuto nell'ovo nel momento in cui il Chorion stava per completarsi e per rendersi indipendente dalle altre parti embrionali. Ed in allora il cumulo cellulare dovrebbe essere considerato come il residuo embrionale e la vescicola applicata alla superficie interna dal sacco dell'ovo come vescicola ombellicale. Rimane sempre a dar ragione della mancanza dell'Amnios e del peduncolo addominale; forse queste parti furono più profondamente colpite.

Però trattandosi di anomalie di sviluppo che non sappiamo ancora ben valutare nei loro effetti, e di annessi fetali la formazione dei quali non è ancora perfettamente conosciuta nella specie nostra, possiamo rimandare una discussione per la quale ci mancano gli elementi essenziali. Del resto residui di Amnios potrebbero rinvenirsi in quel prolungamento membraniforme del tessuto mesodermico del Chorion, che abbiamo veduto esistere solo in corrispondenza del rudimento embrionale.

Ora fermiamoci un momento sul rudimento embrionale. Ammesso che il cumulo cellulare rappresenti l'embrione in via di scomporsi e di scomparire, noi scorgiamo tosto come esso si distingua grandemente dai prodotti che abbiamo avuto l'occasione di studiare nelle precedenti comunicazioni (Osservazioni II, III, V, VI). Si distingue innanzi tutto per il suo volume e per la sua costituzione.

Malgrado il suo studio sia stato accurato e ripetuto, non abbiamo potuto rinvenire traccia alcuna di organi primitivi embrionari. Quindi anzi che una *forma atrofica* esso ci rappresenterebbe una *forma nodulare*, l'unica che, fino ad ora, sia stata descritta col soccorso del microscopio.

His, che è stato il primo, come si sa, a stabilire una distinzione dei prodotti abortivi, nel suo ultimo lavoro, chiama *noduli* quei corpi più o meno rotondeggianti, che si trovano aderenti al Chorion, come unici residui dell'embrione. Essi avrebbero un diametro che oscilla fra 1 ed 1 $^1/_2$ mm. Si riscontrerebbero con una certa rarità avendoli egli osservato solo cinque volte su quarantacinque embrioni anomali.

Ma His non ha sezionato le sue forme nodulari per un esame microscopico, e non può essere eliminato il dubbio, che nei suoi noduli esistessero traccie più o meno manifeste di organi primitivi, ed in allora, secondo il concetto da noi espresso, dovrebbero appartenere alle *forme atrofiche*.

E questa non deve essere considerata come una distinzione puramente scolastica ed arbitraria. Essa ha la sua importanza ed il suo fondamento in riguardo all'epoca in cui si iniziò il processo di arresto. In tutte le forme nodulari il disturbo nello sviluppo si opera molto presto e più propriamente nel momento in cui nell'area embrionaria stanno per comparire le prime traccie del nuovo individuo, corda dorsale, solco midollare, masse protovertebrali. Tutti questi organi non si differenziano ed allora al posto dell'embrione noi troviamo un ammasso di cellule, non solo senza distinzione di parti, ma così confuse che non possiamo nemmeno stabilire da quale foglietto blastodermico esse provengano direttamente.

Per questo fatto le forme nodulari devono essere, siccome l'ha riconosciuto già His, molto rare, e più rare di quanto egli ha calcolato stando alla sua esperienza personale. Se il disturbo colpisce la vescicola blastodermica in un periodo più precoce, nessuno degli annessi fetali si formerebbe ed in questo caso più difficile riescirà di rinvenire i residui modificati dell'ovo. Vedremo meglio la verità di quest'asserto, descrivendo a momenti alcune nostre esperienze sul coniglio.

Non avendo il nostro nodulo alcun rapporto diretto con le membrane e non presentando nella sua conformazione esterna alcuna particolarità che ricordasse una formazione embrionaria, le sezioni microscopiche furono fatte un po' arbitriamente senza una prestabilita direzione. Ciò certo deve portare un po' di confusione nella interpretazione delle diverse parti, ma non nello stabilire il significato del tutto. Se qui avessimo un prodotto normale, in qualunque senso fossero state dirette le sezioni, sarebbe sempre facile di ben caratterizzare una formazione embrionaria normale, a qualunque periodo fosse giunta nel suo sviluppo. Invece nella nostra osservazione l'unica cosa che possiamo asserire si è che gli elementi non si trovano in condizioni fisiologiche, e che essi provengono da parti embrionali e non dagli annessi fetali.

Un altro fatto non concorda con le osservazioni precedenti. Negli arresti di sviluppo che abbiamo studiato, ed in tutti quelli riferiti dagli autori, le membrane prendono uno sviluppo molto superiore al volume dell'embrione. Questa sproporzione è così costante e così evidente, che essa subito ci mette sull'avviso sulle condizioni di sviluppo dell'embrione. Nel presente caso nulla di tutto ciò. Il volume del Chorion è fra i più piccoli che siano

stati osservati. Questa circostanza è forse in connesso con l'arresto dell'Amnios; ad ogni modo se si ripetesse sarebbe un buon dato per caratterizzare le forme nodulari.

Infine un'ultima e più essenziale differenza noi troviamo nel nostro rudimento embrionario, e questa sta nel modo di presentarsi degli elementi. Sorprende infatti di non trovare le cellule dell'embrione alterate in quella guisa che abbiamo ripetutamente descritto negli altri arresti di sviluppo tanto dell'uomo come degli animali. Le cellule si disorganizzavano ed andavano distruggendosi senza passare per quei stadi o per quelle forme che abbiamo osservato negli altri prodotti abortivi. In nessun punto si notavano quegli elementi piccoli, rotondeggianti, fortemente coloriti che tanto caratterizzano le parti interne delle forme atrofiche. Il processo deve quindi essere diverso.

E che realmente la distruzione delle parti embrionali molto giovani e non ancora differenziate, avvenga un po' diversamente da quanto si osserva in periodi più avanti nello sviluppo, è dimostrato da alcune mie esperienze sulla coniglia gravida, che credo opportuno di quivi brevemente riferire. Esse danno anche un appoggio valido a molti particolari che siamo andati discutendo.

Quando nella coniglia gravida si opera prima che avvenga l'aderenza della vescicola blastodermica alle pareti dell'utero per mezzo dell'ectoplacenta, in allora, siccome abbiamo già avuto occasione di dire nella precedente comunicazione, difficilmente lo sviluppo continua, si ha una distruzione delle pareti della vescicola e di queste è raro di poter raccogliere dei lembi per un più minuto esame. Ma uccidendo l'animale pochi giorni dopo l'operazione si riesce ancora a trovare qualche parte della blastoderma ed a studiare il modo di comportarsi degli elementi costitutivi.

Così in una coniglia gravida al 7° giorno e 5 $^1/_2$ ore, da alcune vescicole blastodermiche (esperienza V) vien estratto con una piccola siringa di Pravaz ad ago finissimo una goccia di liquido, esse tosto avvizziscono. — Altre vescicole dello stesso utero non vengono operate per servire come termine di confronto. L'animale è ucciso 3 giorni ed 1 ora dopo l'operazione, e quindi 10 giorni e 6 $^1/_2$ ore dopo il coito.

L'esame dimostrò che lo sviluppo ha continuato nelle vescicole blastodermiche rimaste illese, ed esse contenevano un embrione normale e corrispondente all'età. Le vescicole operate si

presentavano invece molto più piccole e lo sviluppo si era completamente arrestato. Aperto l'utero in alcune di esse si potè ancora raccogliere larghi lembi di blastoderma, in quella parte che sta applicata al mesometrio e quindi dovevano corrispondere all'area embrionale della vescicola. Questi lembi preparati con gli ordinari metodi furono sezionati in tutta la loro estensione.

Convien ricordare che nel momento in cui fu praticata l'operazione nell'area embrionaria della blastoderma si trova già accennato il solco midollare e dietro esiste la linea primitiva nel pieno suo sviluppo. Ai lati di essa incomincia comparire il mesoderma fra i due foglietti primari, però nella massima sua estensione la vescicola blastodermica è ancora didermica. Essa non presenta aderenze con le pareti uterine e può essere facilmente isolata senza lesioni.

Come nella nostra forma nodulare, le sezioni di questi lembi furono eseguite senza alcuna orientazione, per cui dal loro esame riesce più difficile di poter stabilire la posizione dell'area embrionaria e delle parti assili dell'embrione.

Nelle sezioni i lembi blastodermici si presentano continui senza interruzione. Sulla faccia esterna si trovano traccie manifeste dello strato albuminoide che circonda primitivamente l'ovolo e quindi tutta la vescicola blastodermica: esso è generalmente frantumato, ma in alcuni tratti mantiene ancora stretti rapporti colla blastoderma, ed assume la forma di un sottilissimo nastro omogeneo e fortemente tinto dal carmino. Alla faccia interna si trovano detriti granulari prodotti dal disfacimento delle cellule blastodermiche.

Sono ben distinguibili i due foglietti primari: il foglietto interno costituito da un unico strato si mantiene costante in tutta l'estensione dei preparati: il foglietto ectodermico è formato da elementi più chiari, meno regolarmente disposti e sovrapposti in diversi strati a seconda dei diversi punti in cui si esamina la sezione. (La fig. 6ª rappresenta una sezione di blastoderma fatta in queste condizioni (Hartnack oculare 1, obbiettivo 5). Nei preparati fatti non si è potuto notare elementi mesodermici.

Ciò però che ci interessa direttamente si è la costituzione degli elementi. Essi non hanno caratteri normali.

I contorni delle cellule sono quasi interamente scomparsi nelle ectodermiche, molto irregolari nelle entodermiche. Queste

sono più colorite delle prime, più piccole, più granulose con nucleo meglio evidente. Nelle cellule ectodermiche si riscontrano frequentemente dei vacuoli. Riesce facile dimostrare le profonde modificazioni che sono avvenute in questi elementi paragonandoli con quelli di una blastoderma normale della stessa età.

In queste membrane avveniva una lenta distruzione delle parti senza che esse subissero altre trasformazioni. E che la distruzione sia lenta lo dimostra il fatto, che malgrado siano trascorsi più di tre giorni dalla praticata operazione, si vede che le vescicole conservano ancora la loro continuità e la loro stratificazione. Non troviamo nessuno di quei fenomeni che abbiamo veduto esistere nelle forme abortive. Circostanza questa la quale viene in appoggio della distinzione che abbiamo fatto, tra i fenomeni che avvengono nelle parti colpite puramente dalla morte e quegli altri che si osservano negli organi primitivi, quando essi già costituiti e resi indipendenti, sono disturbati nel loro sviluppo.

Non dovrà però essere dimenticato che il mesoderma in questo periodo si sta iniziando, e non ha ancora acquistato quella importanza che assume subito più tardi. E ciò potrebbe avere influenza sul diverso modo di comportarsi delle parti nella loro distruzione, sostenendo alcuni che gli elementi piccoli, rotondeggianti, d'aspetto linfoide che invadono tutto l'embrione, siano di provenienza mesodermica.

Nello sviluppo normale del coniglio noi osserviamo delle atrofie che avvengono in alcuni punti della vescicola blastodermica, e che possono essere paragonate a quanto abbiamo notato nelle nostre esperienze. Così il Duval (1) ha molto ben descritto l'atrofia che subisce tutta la porzione periferica o distale della vescicola ombellicale nel coniglio. Essa infatti primitivamente si trova costituita dall'ectoderma e dall'entoderma; ma appena si inizia l'invaginazione dell'emisfero superiore della vescicola ombellicale nell'inferiore, questo incomincia a degenerare; le cellule dei due foglietti divengono meno distinte, la sostanza protoplasmatica si colora meno intensamente coi reattivi, i due strati cellulari non sono più riconoscibili, presto si fragmentano perdendo la loro continuità, finchè al posto dell'ectoderma e dell'entoderma non rimane che un detrito, il quale anche esso non tarda a scomparire per assorbimento.

(*) Mathias Duval, *La placenta des rongeurs.*

Ora io credo che il processo per mezzo del quale avviene la distruzione e la scomparsa di tutta la vescicola blastodermica, quando essa, per mezzo dei nostri esperimenti, è disturbata nella sua evoluzione e resta impedita la sua aderenza alle pareti uterine, dalle quali deve trarre i materiali per il suo accrescimento, sia presso che identico al sopradescritto, se non che nelle condizioni normali il processo si limita ad un solo emisfero della vescicola, mentre nel nostro caso esso si opera su tutta la sua estensione.

Per analogia noi possiamo dire che anche nella specie nostra devono avvenire fenomeni consimili a quelli che abbiamo osservato nella coniglia; anche in noi se la vescicola blastodermica nel mentre sta per arrivare od è già giunta nell'utero incontra ostacoli al suo sviluppo deve subire la medesima sorte, deve degenerare e scomparire. Ma egli è evidente che nella specie nostra forse non si giungerà mai ad osservare questi fatti, o supposto anche che essi, in qualche rara circostanza, cadessero sotto la nostra osservazione, difficilmente noi lo potremo riferire a disturbi avvenuti nelle primissime fasi di sviluppo dell'ovolo.

Finchè adunque non saranno meglio chiarite con nuove osservazioni, le condizioni in cui avvengono i disturbi di sviluppo nell'ovo umano quando sta per giungere nell'utero, e le loro conseguenze tanto sull'area embrionaria, quanto nella porzione extra embrionaria della vescicola blastodermica, noi possiamo provvisoriamente conchiudere che nel caso sopradescritto si tratti di un arresto di sviluppo avvenuto nell'ovolo nel mentre stavano per comparire le prime traccie del nuovo individuo.

Con maggiore certezza possiamo asserire che quando l'arresto di sviluppo avviene in questa fase esso fa sentire la sua azione non solo sull'embrione, ma ancora sugli annessi d'origine fetale, e finalmente possiamo affermare che le *forme nodulari* devono avere un significato diverso dalle *forme atrofiche*, indicandoci precisamente l'epoca precoce in cui si inizia il processo, e costituendo come l'estremo limite a cui noi potremo giungere con la nostra osservazione nell'esame dei processi abortivi.

Sarebbe cosa non troppo difficile, percorrendo la letteratura antica ed anche recente, di trovare casi i quali corrispondano in modo perfetto alle forme che abbiamo fino ad ora descritto nelle nostre comunicazioni. Ma è questo un lavoro che meglio e più opportunamente sarà fatto quando il materiale sarà divenuto più

abbondante. In allora si vedrà che molte osservazioni che vengono ancora oggidì dai diversi autori considerate e citate come disposizioni normali, non ci rappresentano invece che forme anomale. E sarà questo un grande vantaggio che sarà portato al nostro studio, venendo eliminato un materiale il quale, anzichè rischiarare, disturba grandemente il concetto che noi possiamo farci delle prime fasi di sviluppo della specie nostra.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE
della tav. VI.

Fig. 1. Ovulo [n° XXI] a grandezza naturale. Tutta la superficie del Chorion è coperta da villosità. — *P* breve peduncolo che si trovava impegnato in una apertura della decidua.

» 2. Lo stesso ovulo dopo l'apertura del Chorion,

» 3. (Sezione 108) *C.* Chorion. — *O* vescicola circoscritta dal tessuto mesodermico. *E* nastro epiteliare che si trova entro la cavità della vescicola. *A* prolungamento membraniforme del tessuto mesodermico del Chorion.

» 4. (Sezione 116). In esso si scorge in *R* un cumulo di cellule le quali rappresenterebbero il rudimento embrionario; in *F* si trova una congiunzione tra il cumulo cellulare e la vescicola *O*, della quale è già scomparso il nastro epiteliare.

» 5. Il rudimento embrionario disegnato ad un maggiore ingrandimento (Hartnack oculare n° 3, obbiettivo 7) in *a* ed in *b* si vedono delle parti circoscritte, che ricordano disposizioni del canale midollare o della regione cardiaca.

» 6. Sezione di un lembo di vescicola blastodermica di coniglio tre giorni dopo la puntura e l'aspirazione di una goccia di liquido entro contenuta. Alla superficie interna si trovano detriti cellulari *D.* Si distinguono ancora bene i due foglietti primari ectoderma (*e*) ed eutoderma (*i*) che verso le estremità della sezione si vanno disorganizzando.

Fig. 3

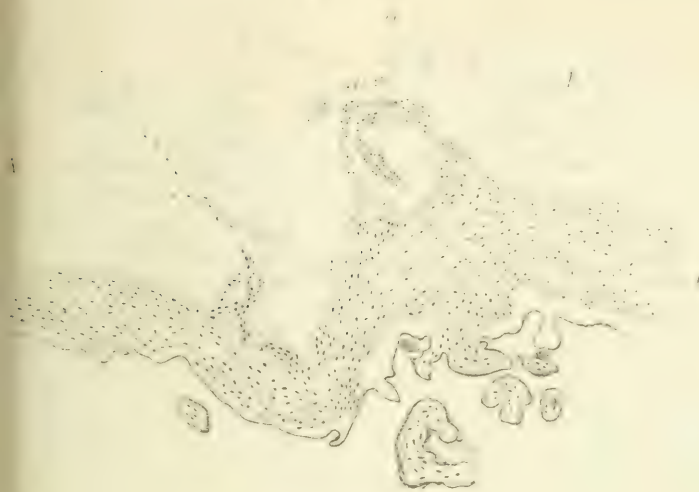
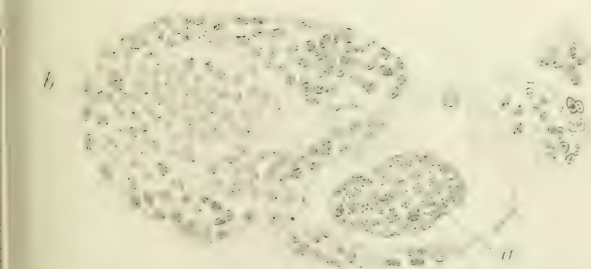



Fig. 1

Fig. 2

Fig. 4

Fig. 6

Fig. 5

Sulle cianacetilamine e nuovi acidi ossamici;

Nota seconda del Prof. ICILIO GUARESCHI

Nella mia prima Nota: *Azione dell'etere cianacetico sulle basi organiche*, ho fatto osservare che debbono essere interessanti i prodotti di ossidazione delle cianacetilamine. Tutte le cianacetilamine che ho ossidato col permanganato potassico danno, spesso già a temperatura ordinaria, dell'acido cianidrico ed un *acido ossamico* sostituito. Reazione che si può esprimere nel seguente modo:

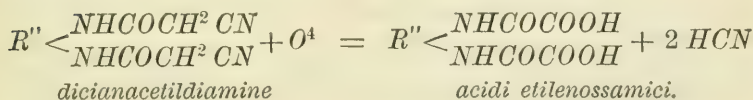
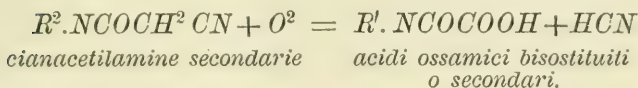
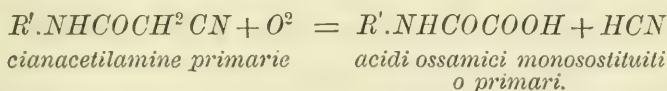
$$R'.NHCOCH^2CN + O^2 = R'.NHCOCOOH + HCN$$

cianacetilamine primarie — *acidi ossamici monosostituiti o primari.*

$$R^2.NCOCH^2CN + O^2 = R'.NCOCOOH + HCN$$

cianacetilamine secondarie — *acidi ossamici bisostituiti o secondari.*

$$R''<\begin{matrix}NHCOCH^2CN\\NHCOCH^2CN\end{matrix} + O^4 = R''<\begin{matrix}NHCOCOOH\\NHCOCOOH\end{matrix} + 2\,HCN$$

dicianacetildiamine — *acidi etilenossamici.*

È questo un metodo generale per ottenere gli acidi ossamici, utile specialmente quando questi acidi non si possano preparare con altri metodi.

Il gruppo $-CH^2CN$ dei cianuri primari è dunque trasformato in $-COOH + HCN$.

In alcuni casi insieme all'acido ossamico sostituito ho ottenuto dell'ossamide o delle amidi sostituite. In altri casi, come ad esempio dalla cianacetilpiperidina, in una seconda fase dell'ossidazione si ottengono acidi provenienti dalla rottura d'una catena chiusa.

L'etere cianacetico si ossida prontamente a temperatura ordinaria col permanganato potassico, dando acido cianidrico ed acido ossalico.

Mi propongo di applicare l'azione del permanganato potassico allo studio di altri composti cianici, contenenti sia il gruppo primario $-CH^2.CN$, sia il gruppo secondario $=CH.CN$.

Acido etilenossamico dalla dicianacetiletilendiamina.

7 gr. di dicianacetiletilendiamina sospesi in 50 cm³ di acqua, furono agitati con 460 a 470 cm³ di soluzione satura di permanganato potassico, aggiunti in due o tre volte. Il liquido si scolora immediatamente, vi ha sviluppo di calore e di molto acido cianidrico; il filtrato è giallognolo, alcalino, dà intensa la reazione dell'acido cianidrico, e, lasciato a sè 18 ore, deposita piccola quantità d'una polvere pesante cristallina che ha tutti i caratteri dell'*ossamide*. Il liquido filtrato dall'ossamide non contiene acido ossalico o solamente delle traccie; acidulato con lieve eccesso di acido cloridrico, sviluppa anidride carbonica, acido cianidrico e dà un bel precipitato cristallino pesante, quasi incoloro, che fu ricristallizzato dall'acqua bollente. Le acque di lavaggio concentrate precipitano anch'esse coll'acido cloridrico. Il composto così ottenuto, e disseccato a 100°, diede all'analisi i risultati seguenti:

I. Gr. 0.2141 di sostanza secca a 100° fornirono 0,2800 di CO^2 e 0.0804 di H^2O.

II. Gr. 0.1664 di sostanza secca fornirono 20.8 cm³ di N a 16° e 746.5 mm.

III. Gr. 0.1786 di sostanza disseccata a 100°, fornirono 0.2318 di CO^2 e 0.0705 di H^2O.

Da cui:

	I.	II.	III.
C =	35.63	—	35.38
H =	4.14	—	4.30
N =	—	13,35	—

Per l'acido etilenossamico $\begin{array}{l} CH^2.NH.CO.COOH \\ | \\ CH^2.NH.CO.COOH \end{array}$

si calcola:

$$C = 35.30$$
$$H = 3.92$$
$$N = 13.72$$

Cristallizzato dall'acqua contiene $2\,H^2O$ di cristallizzazione che perde a 100°:

I. Gr. 1.1180 di acido asciutto all'aria, scaldati a 100° perdettero 0.1626 di acqua;

II. Gr. 1.9725 di acido seccato all'aria, scaldati a 100° perdettero 0.3050.

Da cui:

	trovato		calcolato per $(CH^2.NHCOCOOH)^2+2\,H^2O$
	I	II	
H^2O %	14.55	15.40	15.00

L'acido etilenossamico cristallizza dall'acqua in bei prismi, duri, incolori, brillanti; è poco solubile nell'alcool anche a caldo, da cui però cristallizza bene, pochissimo solubile nell'etere. La sua soluzione acquosa ha reazione acidissima. Fonde a 202° - 202°.5 dando liquido incoloro, ma quasi subito si scompone e fa schiuma.

Sale d'argento. — Aggiungendo una soluzione concentrata di nitrato d'argento ad una soluzione acquosa calda dell'acido, si deposita, agitando, un sale d'argento in minuti cristalli pesanti, bianchissimi, che sono anidri ed anche a 100° non si alterano. Neutralizzando il liquido acido filtrato si ha lo stesso sale. Il medesimo sale, in polvere cristallina, si ottiene direttamente dall'acido con ammoniaca e nitrato d'argento. A 100° non perde di peso nè si altera.

I. Gr. 0.2539 di sale argentico precipitato dalla soluzione acida, diedero 0.1304 di Ag.

II. Gr. 0.3930 di sale d'argento precipitato dalla soluzione neutra del sale ammonico, fornirono 0.2032 di Ag.

Da cui:

	trovato		calcolato per $CH^2.NHCOCOO\,Ag.$ ∣ $CH^2.NHCOCOO\,Ag.$
	I	II	
Ag. %	51,35	51.70	51.73

Anche in soluzione acida non si forma dunque l'etilenossamato monoargentico, ma solamente il sale diargentico.

L'*acido etilenossamico* da me ottenuto corrisponde all'*etere etilenossamico* di Hofmann (*Berichte*, V, p. 247).

Acido benzilossamico dalla cianacetilbenzilamina.

Gr. 6. 3 di cianacetilbenzilamina, polverizzati e sospesi in acqua, furono agitati con 300 cm^3 di soluzione satura di permanganato potassico: già a temperatura ordinaria il liquido si scolora sviluppando acido cianidrico; meglio, se si riscalda per alcuni istanti a b. m. Il filtrato è giallo alcalino e dà intensa reazione di acido cianidrico. Per raffreddamento non deposita ossamide. Esaurito con etere il liquido alcalino concentrato, per togliere un poco di cianacetilamina inalterata, si acidula con acido solforico e si estrae di nuovo con etere. Distillato l'etere si ha un residuo cristallino acido che si purifica ricristallizzandolo dall'acqua bollente o dall'etere. Questo nuovo acido anidro fu analizzato:

I, Gr. 0.1357 di sostanza secca a 70-80°, fornirono 0.3030 di CO^2 e 0.0665 di H^2O.

II. Gr. 0.1941 di sostanza cristallizzata dall' etere, fornirono 13.6 di N a 24° e 741.5 mm.

Da cui:

		trovato	
		I	II
C	=	60.83	—
H	=	5.40	—
N	=	—	7.61

Per l'acido benzilossamico $C^6H^5.CH^2.NH.CO.COOH$ si calcola:

$$C = 60.33$$
$$H = 5.02$$
$$N = 7.81$$

L'acido benzilossamico cristallizza in bellissime lamelle sottili, rettangolari, lunghe, incolore; cristallizzato dall'acqua pare che contenga dell'acqua di cristallizzazione; anidro, fonde a 128° - 129°.

Il *sale d'argento*, che si ottiene dalla soluzione acquosa dell'acido, o del suo sale ammonico, con nitrato d'argento, è un precipitato bianco costituito da sottili lamine sovrapposte o riunite a rosetta, solubili nell'acido nitrico e nell'ammoniaca. Dall'acqua bollente cristallizza in stupende lamine brillanti.

Questo sale è anidro. A 100° non perde di peso, nè si altera.

I. Gr. 0.4471 di sale d'argento precipitato dalla soluzione acquosa acida, e seccato a 100°, diedero 0.1685 di Ag.

II. Gr. 0.3083 di sale d'argento precipitato dalla soluzione ammoniacale neutra, fornirono 0.1161 di Ag.

Da cui:

	trovato		calcolato per $C^6H^5CH^2NHCOCOO$ Ag.
	I	II	
Ag. %	37.69	37.65	37.76

L'acido benzilossamico è isomero coll'ossamato benzilico di Wallach e Liebmann (1) $C^6H^5CH^2.O.COCONH^2$, fusibile a 134° - 135°.

(1) *Berichte* 1880, pag. 507.

Ossidazione della cianacetilpiperidina.

Le ricerche di Schotten (1) hanno dimostrato che le tre basi iminiche: piperidina, conina e tetraidrochinolina, quando hanno sostituito il loro idrogeno iminico con un radicale acido stabile si ossidano e la catena essacarboazolica si rompe nel punto di collegamento tra l'atomo di azoto e l'atomo di carbonio.

La piperidina in forma di *piperidiluretano* dà coll'acido nitrico l'*acido δ amidobutirrico*, in forma di *benzoilpiperidina* dà col permanganato potassico l'acido benzoil δ amidovalerianico, sotto forma di *picrilpiperidina* non è attaccata dal permanganato, e coll'acido nitrico fornisce un prodotto non analizzabile (2); infine la *benzolsolfonpiperidina* (3) ossidata col permanganato potassico produce l'*acido benzolsolfon δ amidovalerianico.* In modo simile Bunzel (4) ossidando la benzoilpipecolina ottenne l'acido benzoil δ amidocapronico.

Non era quindi senza interesse studiare come si comporta la cianacetilpiperidina rispetto gli agenti ossidanti e vedere se la rottura della catena ha luogo anche in questo caso e se ciò avviene subito, oppure, come era da prevedersi, è ossidato prima il radicale cianacetilico. Io ho osservato che a temperatura ordinaria col permanganato potassico, non in eccesso, la cianacetilpiperidina dà l'acido piperidilossamico e questo, per successiva ossidazione a caldo fornisce l'*acido ossalil δ amidovalerianico.*

La cianacetilpiperidina (18 gr.) polverizzata e sospesa in acqua (250 cm^3) fu trattata con poco più del doppio del suo peso di permanganato potassico in soluzione satura (650 cm^3). Già a temperatura ordinaria il permanganato si riduce, vi ha sviluppo di calore e produzione di acido cianidrico. Il liquido filtrato, giallognolo ed alcalino, deposita per raffreddamento un prodotto polverulento, bianco, cristallino (A); filtrato di nuovo e concentrato fu trattato con etere che estrae una sostanza cri-

(1) SCHOTTEN, *Berichte di deut. Chem. Gesell.* XV, pag. 1947 e XVII, pag. 2544; SCOTTEN e BAUM, *Berichte*, ivi pag. 2548; BAUM, ivi XIX, pag. 500; SCHOTTEN, ivi XXI, pag. 2235 e XXIV, pag. 3687.

(2) SCHOTTEN e SCHLÖMANN, *Berichte*, XXIV, pag. 3688.

(3) *Berichte*, XXIV, pag. 3690.

(4) *Berichte*, XXII, pag. 1056.

stallina (B), poi fu acidulato con pochissimo acido solforico diluito e di nuovo estratto con etere dal quale si ha, dopo distillazione, un piccolo residuo giallo cristallino che, lavato con poco etere, si fa di nuovo cristallizzare dall'etere e si ha in aghi incolori fusibili a 130°-131° (C). Il liquido acquoso fu trattato con eccesso di acido solforico diluito e di nuovo esaurito con etere; questo estrae una quantità notevole del prodotto cristallino (C), quasi affatto bianco e che si ottiene puro dopo nuova cristallizzazione dall'etere.

Il prodotto (A) non fonde a 250°, ma sublima per rapido riscaldamento, decomponendosi solo in parte e dando odore cianico; è pochissimo solubile nell'alcool, nell'etere e nell'acqua fredda, solubile nell'acqua bollente dalla quale si deposita in piccoli cristalli che al microscopio mostrano l'aspetto caratteristico della ossamide. Che fosse veramente ossamide lo dimostrarono le proprietà chimiche e un dosamento d'azoto:

Gr. 0.1203 di sostanza secca a 100° fornirono 34.2 cm^3 di N a 16° e 725 mm.

Da cui:

	trovato	calcolato per $CONH^2$ | $CONH^2$
N %	31.65	31.81

L'*ossamide* formata, è nella proporzione di circa 3 a 4 per 100 della cianacetilpiperidina adoperata.

Il prodotto B estratto dal liquido alcalino e lavato con poco etere freddo fondeva a 86°-88°, poi ricristallizzato dall'acqua l'ebbi in prismi incolori che fondevano a 87°-89°. Questo composto è solubile nel cloroformio come la cianacetilpiperidina e come l'*ossalilpiperidina* (che potrebbe essersi formata) la quale anch'essa fonde a 88°-89°. La facilità colla quale cristallizza dall'acqua distingue già la *ossalilpiperidina* dalla *cianacetilpiperidina*: un dosamento di azoto tolse ogni dubbio:

Gr. 0,1594 fornirono 24.8 cm^3 di N a 16° e 749 mm.

Da cui:

	trovato	calcolato per: $C^5H^{10}NCOCH^2CN$	$(CONC^5H^{10}))^2$
N %	17.85	18.42	12.50

Il prodotto B è dunque un poco di cianacetilpiperidina inalterata.

Il prodotto C è un acido che si ha subito puro, cristallizzandolo dall'etere. All'analisi diede i risultati seguenti:

I. Gr. 0.1730 di sostanza seccata all'aria e sul cloruro di calcio, diedero 0.3385 di CO^2 e 0.1113 di H^2O.

II. Gr. 0.1688 di sostanza fornirono 13 cm³ di N a 15° e 727 mm.

Da cui la composizione seguente:

		I.	II.
C	=	53.36	—
H	=	7.14	—
N	=	—	8.52

Per l'*acido piperidilossamico* $C^5H^{10}N.CO.COOH$ si calcola:

$$C = 53.50$$
$$H = 7.02$$
$$N = 8.90$$

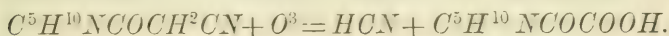
Ossidando invece la cianacetilpiperidina con un poco più di permanganato potassico (per 10 gr. di cianacetilpiperidina, 500 cm³ di soluzione satura di permanganato) e scaldando alquanto, il liquido filtrato è incoloro, alcalino. non deposita ossamide, manda odore ammoniacale ed estratto con etere, questo lascia un residuo quasi insignificante, mentre il liquido acidulato con acido solforico ed estratto di nuovo con etere fornisce l'acido piperidilossamico in cristalli bianchissimi.

Quest'acido cristallizza dall'etere in bei prismetti brillanti, anidri. solubilissimi nell'acqua e nell'alcool; la soluzione ha rea-

zione molto acida. Fonde a 130°-131° in liquido incoloro sviluppando bollicine e facendo schiuma, dando un liquido oleoso con reazione alcalina (*formilpiperidina*).

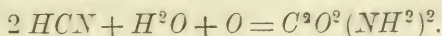
La composizione ed i caratteri di questo acido corrispondono perfettamente con quelli dell'*acido piperidilossamico* di Wallach e Lehmann (1): secondo questi autori il punto di fusione sarebbe 128-129°.

Quest'acido si è formato nel modo seguente:

$$C^5H^{10}NCOCH^2CN + O^3 = HCN + C^5H^{10}NCOCOOH.$$

Dunque, nelle indicate condizioni, ossidando la cianacetilpiperidina, si formano: anidride carbonica, acido ossalico (traccie), ossamide, acido cianidrico ed acido piperidilossamico.

L'acido piperidilossamico si forma nella proporzione di circa 70 % del peso della cianacetilpiperidina impiegata.

L'ossamide formatasi in questa ed in analoghe reazioni, proviene molto probabilmente dall'ossidazione dell'acido cianidrico col permanganato potassico. Si sa infatti che l'acido cianidrico (2) o il cianogeno (3) coll'acqua ossigenata, o il cianuro di potassio col biossido di manganese ed acido solforico (4), danno ossamide:

$$2\,HCN + H^2O + O = C^2O^2(NH^2)^2.$$

Però non ho trovato ossamide fra i prodotti di ossidazione di altre cianacetilamine.

Ossidazione dell'acido piperidilossamico e della cianacetilpiperidina con eccesso di permanganato.

6.3 gr. di acido piperidilossamico, in polvere e sospesi in poca acqua, furono scaldati a b. m. con 240 cm^3 di soluzione satura di permanganato potassico. Dopo poco tempo la decolorazione è completa; il liquido filtrato è incoloro, alcalino, non contiene acido cianidrico, e concentrato non sviluppa ammoniaca ,

---

(1) Wallach e Lehmann, *Annalen der Chem.*, t. 237, pag. 248.
(2) Attfield, *Ann. d. Chem.*, t. 128, p. 128.
(3) Radziszewsky, *Ber.*, XVIII, p. 385.
(4) Attfield.

non contiene acido ossalico, o solamente delle minime traccie, cogli acidi sviluppa anidride carbonica. Questo liquido fu concentrato, acidulato con acido acetico, di nuovo concentrato, poi trattato con nitrato d'argento, che dà precipitato abbondante.

Il sale d'argento ottenuto fu sospeso in acqua e decomposto con una corrente di gas acido solfidrico; il liquido incoloro filtrato fatto evaporare fornisce un acido ben cristallizzato che si purifica per cristallizzazione dall'acqua.

Lo stesso acido si ottiene ossidando con permanganato potassico in eccesso la cianacetilpiperidina. 20.7 gr. di cianacetilpiperidina furono trattati con circa 90 gr. di permanganato potassico in soluzione satura e scaldati a b. m. sino a scolorazione completa. Il filtrato, incoloro ed alcalino, concentrato a piccolo volume, ed acidulato con acido acetico, fu trattato con poco nitrato d'argento il quale fornisce un precipitato molto colorato; filtrato di nuovo, si tratta con eccesso di nitrato d'argento ed allora si ottiene un abbondante precipitato bianco che raccolto, lavato e sospeso in acqua fu decomposto con acido solfidrico. Concentrato il liquido acido incoloro, si ottiene una poltiglia cristallina bianca che ricristallizzata dall'acqua fornisce dei piccoli prismi duri, corti, brillanti, fusibili a 63°-64° nella loro acqua di cristallizzazione e che hanno tutti i caratteri dell'acido precedente. Il prodotto ottenuto pesa circa 5.5 gr.

L'acido disseccato a 100°, fu sottoposto all'analisi:

I. Gr. 0.2163 di acido anidro, fornirono 0.3506 di CO^2 e 0.1168 di H^2O.

II. Gr. 0.1531 di acido anidro, fornirono 9.9. cm^3 di N a 15° e 741.8 mm.

Da cui la composizione:

		I.	II.
C	=	44.20	—
H	=	5.9	—
N	=	—	7.38

che corrisponde alla formola $C^7H^{11}NO^5$ per la quale si calcola:

$$C = 44.34$$
$$H = 5.80$$
$$N = 7.40$$

Questo nuovo acido cristallizzato dall'acqua contiene dell'acqua di cristallizzazione; infatti:

I. Gr. 0.3621 di acido asciutto all'aria, fusibile a 64°, stando 72 ore sul cloruro di calcio perdettero 0.0583.

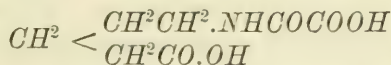
II. Gr. 1.5085 di acido, scaldati a 90°-94° perdettero 0.2412.

III. Gr. 0.4988 di acido, stando lungo tempo (96 ore) sul cloruro di calcio perdettero 0.0790.

Da cui:

	trovato			calcolato per $C^7H^{11}NO^5 + 2H^2O$
	I.	II.	III.	
H^2O %	16.1	15.92	15.84	16.0

Questo composto è senza dubbio l'acido *ossalil δ amidovalerianico:*

$$CH^2 < \begin{matrix} CH^2CH^2.NHCOCOOH \\ CH^2CO.OH \end{matrix}$$

come lo provano la composizione, il modo di formazione, le proprietà e la formazione di due sali di argento, l'uno acido e l'altro neutro.

L'*acido ossalil δ amidovalerianico* cristallizza dall'acqua in prismi brillanti incolori, duri, pesanti, contenenti 2 H^2O di cristallizzazione che perdono stando lungo tempo sul cloruro di calcio o per riscaldamento a 90°-95°. Fonde a 64° nell'acqua di cristallizzazione; anidro, fonde a 119°-120°. È solubile nell'alcool, pochissimo nell'etere. La soluzione acquosa è acidissima.

Il *sale acido d'argento* o *sale monoargentico* $C^7H^{10}AgNO^5$ si ottiene trattando una soluzione concentrata dell'acido con una soluzione concentrata di nitrato d'argento; a poco a poco si deposita l'*ossalil δ amidovalerianato monoargentico* in bei cristalli che si ottengono in forma di tavole rettangolari per ricristallizzazione dall'acqua.

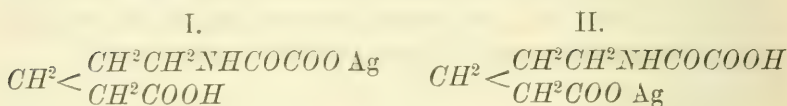
Gr. 0.4811 di sale d'argento seccato sul cloruro di calcio, diedero 0.1752 di Ag.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^7H^{10}AgNO^5$
Argento $^0/_0$	36.42	36.45

Dei due sali monoargentici possibili, cioè:

I. $CH^2 < {CH^2CH^2NHCOCOO\,Ag \atop CH^2COOH}$

II. $CH^2 < {CH^2CH^2NHCOCOOH \atop CH^2COO\,Ag}$

è più probabile che il mio sia quello colla formola I.

Il sale monoargentico è pochissimo solubile nell'acqua fredda, solubile a caldo; la sua soluzione ha reazione acida.

Anche il fatto che questo sale d'argento riscaldato sopra 160° non sviluppa gas, ma dà acqua, rende più probabile la formola I. Ho tentato, decomponendo questo sale d'argento, di avere l'*acido αpiperidonossamico* per eliminazione d'una molecola d'acqua, ma non sono riuscito nell'intento. Sopra 160° questo sale rigonfia, senza sviluppare dei gas, sviluppa acqua, ed il residuo bruno in gran parte si scioglie nell'acqua dando una soluzione acida che per evaporazione deposita argento ridotto.

Il *sale diargentico* $C^7H^9Ag^2NO^5$ fu ottenuto dalla soluzione del sale potassico, col nitrato d'argento, come pure neutralizzando con ammoniaca il liquido acido da cui si è precipitato il sale monoargentico.

I. Gr. 0.4676 di sale diedero 0.2488 di Ag.

II. Gr. 0.4679 di sostanza disseccata a 100° fornirono 0.2541 di Ag.

Da cui:

	trovato I.	trovato II.	calcolato per $C^7H^9Ag^2NO^5$
Ag $^0/_0$	53.21	54.28	53.60

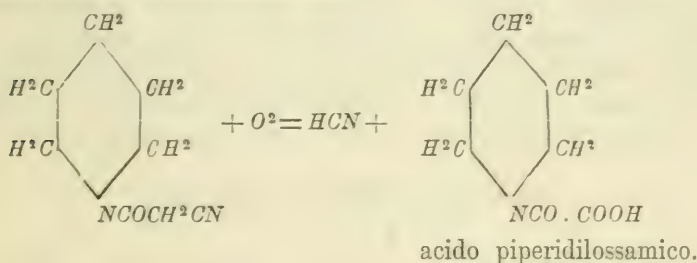
Questo sale d'argento è una polvere bianco-giallognola, pesante, cristallina, pochissimo solubile nell'acqua anche bollente, che a 100° non si altera, ma bensì alla luce.

La soluzione neutra del sale ammonico dà col *cloruro ferrico* precipitato rosso: coll'*acetato neutro di piombo* dà un precipitato bianco voluminoso che si rappiglia in minutissimi cristalli disposti a rosetta. Non precipita col *cloruro di bario* nè col *solfato di rame.*

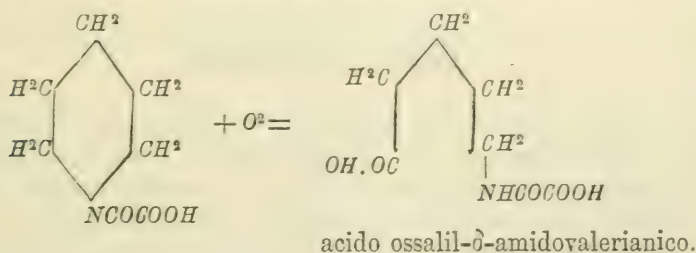
I *sali, acido e neutro, di potassio* sono solubilissimi.

Dunque riassumendo. l'ossidazione della cianacetilpiperidina avviene in due fasi; nella prima si elimina acido cianidrico e formasi l'*acido piperidilossamico :*

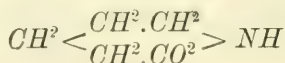
$$\begin{array}{c} CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ NCOCH^2CN \end{array} + O^2 = HCN + \begin{array}{c} CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ NCO\,.\,COOH \end{array}$$

acido piperidilossamico.

Nella seconda fase, si rompe la catena dell'acido piperidilossamico nel punto di collegamento tra il carbonio e l'azoto e formasi l'*acido ossalil δ amidovalerianico :*

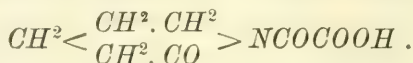
$$\begin{array}{c} CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ NCOCOOH \end{array} + O^2 = \begin{array}{c} CH^2 \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ \quad\quad\quad CH^2 \\ OH.OC \quad\quad | \quad\quad \\ \quad\quad NHCOCOOH \end{array}$$

acido ossalil-δ-amidovalerianico.

Azione del calore sull'acido ossalil δ amidovalerianico. L'acido ossalil δ amidovalerianico, secco, scaldato a 160°-170° sviluppa acqua ed un miscuglio di anidride carbonica e di ossido di carbonio; perde circa 36 % del proprio peso. Il prodotto ottenuto stando sul cloruro di calcio cristallizza e la sua soluzione acquosa precipita col ioduro di potassio iodurato, coll'acido fosfomolibdico e col ioduro bismutico potassico: si scioglie solo in parte nell'etere dall'evaporazione del quale si ha una sostanza che precipita coll'acido fosfomolibdico e che col ioduro bismutico potassico dà un abbondante precipitato cristallizzato in begli aghi.

Questi pochi caratteri non sono sufficienti per affermare con sicurezza che in questa reazione siasi prodotto l'*αpiperidone*

$$CH^2 < \frac{CH^2.CH^2}{CH^2.CO^2} > NH$$

Ma è molto probabile.

Trattando il prodotto ottenuto con poca acqua si ottiene una piccola quantità di sostanza azotata cristallina, bianca, fusibile a 202°-203° con sviluppo di gas, poco solubile nell'acqua fredda, solubile invece nell'acqua bollente dalla quale si deposita in aghetti sottilissimi; la sua soluzione ha reazione acidissima e col nitrato d'argento dà precipitato cristallino quasi insolubile anche all'ebollizione, diventando bruno. Probabilmente questa sostanza, che non ho analizzato, è l'*acido α piperidonossamico*

$$CH^2 < \frac{CH^2.CH^2}{CH^2.CO} > NCOCOOH .$$

Intorno la decomposizione pirogenica dell'*acido ossalil δamidovalerianico* tornerò forse ad occuparmi quando avrò preparato maggiore quantità di materiale; desiderando anche di studiare l'azione del calore su altri acidi ossamici.

Cianacetilmetilanilina.

Questo studio aveva per me lo scopo non tanto di preparare l'acido metilfenilossamico quanto di vedere come si comporta la metilanilina (e l'etilanilina) coll'etere cianacetico per farne poi il confronto colla tetraidro α chinolina le cui relazioni colle aniline alchiliche sono note in base alle ricerche di Eug. Bamberger.

L'etere cianacetico non agisce sulla metilanilina a temperatura ordinaria ma bensì verso 180°.

42 gr. di metilanilina, bollente a 192°, furono mescolati con 52 gr. di etere cianacetico e scaldati in pallone tubulato munito di refrigerante per raccogliere i prodotti della distillazione. A 180°-182° incomincia ben manifesto lo sviluppo dell' alcool, insieme a traccie di ammoniaca, metilanilina ed etere cianacetico. Si va mano a mano aumentando lentamente la temperatura sino a 190°, poi, quando è già distillato circa $^2/_3$ dell'alcool che deve prodursi, si porta la temperatura anche a 210°. Dopo circa

3-4 ore di riscaldamento si lascia raffreddare ed il liquido rosso-bruno si solidifica in massa cristallina bianca. Il prodotto, distillato in corrente di vapore, per togliere la piccola quantità di metilanilina e di etere cianacetico inalterati, si scioglie in acqua bollente, si scolora, si lascia cristallizzare, ed infine si ricristallizza dall'alcool il prodotto ottenuto.

Si può anche scaldare la miscela di etere cianacetico e metilanilina, a fuoco nudo, con piccola fiamma.

Il composto così ottenuto diede all'analisi i risultati seguenti:

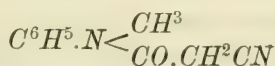
I. Gr. 0.1625 di sostanza essiccata sul cloruro di calcio diedero 0.4095 di CO^2 e 0.0895 di H^2O.

II. Gr. 0.1087 di sostanza fornirono 14.6 cm^3 di N a 15° e 747.5 mm.

Da cui la composizione seguente;

		I.	II.
C	=	68.74	—
H	=	6.10	—
N	=	—	15.4

Per la formola della cianacetilmetilanilina:

$$C^6H^5.N<\begin{matrix}CH^3\\CO.CH^2CN\end{matrix}$$

si calcola:

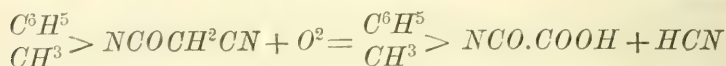
C	=	68.86
H	=	5.74
N	=	16.86

La quantità di prodotto che si ottiene è quasi teorica.

La cianacetilmetilanilina cristallizza dall'acqua bollente in grosse tavole ed ancora meglio cristallizza dall'alcool. È solubile nell'acqua calda, poco nella fredda. Solubile nell'etere. Fonde a 86°-87°5 in liquido incoloro.

Acido metilfenilossamico.

Anche la cianacetilmetilanilina già a temperatura ordinaria è ossidata dal permanganato potassico, secondo l'equazione seguente:

$$\frac{C^6H^5}{CH^3} > NCOCH^2CN + O^2 = \frac{C^6H^5}{CH^3} > NCO.COOH + HCN$$

4.6 gr. di cianacetilmetilanilina in polvere e sospesi in 50 cm^3 di acqua furono trattati con 175 cm^3 di soluzione satura di permanganato potassico, cioè un poco più del doppio del suo peso di permanganato, si sviluppa calore e molto acido cianidrico. Il liquido giallo ed alcalino, fu concentrato poi estratto con etere, acidulato con acido solforico ed esaurito con etere. Distillato l'etere rimane un residuo liquido che, agitato, dopo pochi momenti si rappiglia in massa cristallina bianca, la quale lavata alla pompa con poco etere e ricristallizzata dall'acqua calda fornisce dei bei prismi incolori. Quest'acido, cristallizzato dall'acqua, contiene H^2O di cristallizzazione.

I. Gr. 0.1500 di acido secco sul cloruro di calcio, fornirono 9,2 di N a 15° e 747 mm.

II. Gr. 1.5586 di acido secco all'aria, scaldati a 80°-90° perdettero 0.158 di H^2O.

III. Gr. 0.4489 di acido seccato all'aria e sul cloruro di calcio, scaldati a 70° fornirono 0.0414 di H^2O.

IV. Gr. 1.3342 di acido, scaldati a 75°-80° fornirono 0.1300 di H^2O.

Da cui:

	trovato			
	I.	II.	III.	IV.
N %	7.01	—	—	—
H^2O %	—	10.1	9.22	9.7

Numeri questi che corrispondono alla formola dell'*acido metilfenilossamico:*

$$C^6H^5N < \frac{CH^3}{CO.COOH} + H^2O$$

per il quale si calcola:

$$N = 7.10$$
$$H^2O = 9.13$$

L'acido anidro, cioè disseccato a 70°, diede i risultati seguenti:

Gr. 0.1593 di sostanza disseccata a 70°, fornirono 0.3523 di CO^2 e 0.0762 di H^2O.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^6H^5N < {CH^3 \atop CO.COOH}$
C =	60.32	60.33
H =	5.31	5.03

Di quest'acido si ottiene circa il 70 $^0/_0$ della cianacetilmetilanilina impiegata.

L'acido metilfenilossamico o metilossanilico è poco solubile nell'acqua fredda, si scioglie bene nell'acqua calda dalla quale cristallizza in bei prismi brillanti contenenti 1 H^2O di cristallizzazione che perdono già a 70°; solubile nell'alcool e nell'etere. Idrato fonde a 82°-83°,5; anidro, fonde a 120° decomponendosi con sviluppo di gas. La sua soluzione ha reazione acidissima.

Il *sale d'ammonio* è in bei cristalli incolori, aghiformi o riuniti a forma di ciuffi o di cavolfiore. Solubilissimo nell'acqua. Non precipita col cloruro di bario, col solfato di rame, col cloruro mercurico, nè coll'acetato di piombo.

Il *sale di bario* preparato dall'acido col carbonato di bario, è solubile nell'acqua e cristallizza in aghi setacei riuniti a rosetta.

L'acido metilfenilossamico da me ottenuto è isomero coll'acido benzilossamico che ho descritto più sopra e cogli *acidi: ortotolilossamico* $C^6H^4 < {CH^3 \atop NHCOCOOH} + H^2O$ fusibile 136°-137° ottenuto da Mauthner e Suida (1), e *paratolilossamico* fusibile a 168°-170° (2).

(1) *Monatsh. f. Chem.* IX, pag. 736.
(2) Klinger, *Annalen der Chem.* T. 184, pag. 285.

Cianacetiletilanilina.

L'etilanilina impiegata bolliva a 204°. Circa 24 gr. di etilanilina furono scaldati con 22 gr. di etere cianacetico. La reazione incomincia verso 170° con sviluppo di alcool. Si mantenne la temperaratura fra 170°-180° per circa 3 a 4 ore. Il liquido rosso, distillato col vapore d'aqua per togliere l'etilanilina e l'etere cianacetico inalterati, lasciò un residuo oleoso che fu fatto ripetutamente bollire con acqua, nella quale si sciolse quasi tutto. Dalla soluzione acquosa si deposita un prodotto cristallino pressochè incoloro e che cristallizzato dall'alcool o dall'etere si ha purissimo. Dall'etere si ha in grossi prismi.

Gr. 0.2142 di sostanza seccata sul cloruro di calcio diedero 27.6 cm³ di N a 17° e 748 mm.

Da cui:	trovato	calcolato per $C^6H^5N\begin{matrix}C^2H^5\\COCH^2CN\end{matrix}$
N %	14.65	14.33

La cianacetiletilanilina è solubile nell'etere freddo, ma molto più a caldo, dal quale cristallizza in bei prismi trasparenti, incolori brillanti, che dopo breve tempo all'aria diventano opachi, bianchi, e somigliano all'amido, duri. È poco solubile nell'acqua fredda, dall'acqua bollente cristallizza in piccoli prismi trasparenti e che tali si mantengono anche sul cloruro di calcio. Anche dall'alcool cristallizza in bei prismi. Fonde a 50-51° in liquido incoloro.

Acido etilfenilossamico.

8 gr. di cianacetiletilanilina sospesi in poca acqua furono agitati con 340 cm³ di soluzione satura di permanganato potassico; il lieve eccesso di permanganato fu tolto col gas solforoso. Il liquido filtrato, alcalino, fu esaurito con etere; poi acidulato con acido solforico e di nuovo esaurito con etere; distillato questo, si ottiene un residuo oleoso che dopo pochi momenti si rappi-

glia in massa cristallina, dura, che spremuta al torchio è bianchissima. Il prodotto ottenuto pesa circa 7.7 gr. Ricristallizzato dall'acqua il nuovo acido si ha in cristalli prismatici. Quest'acido asciutto all'aria contiene 1 H^2O di cristallizzazione, infatti:

Gr. 2.5812 di sostanza secca all'aria perdettero, stando sul cloruro di calcio circa 5 giorni, 0.2268.

Cioè:

	trovato	calcolato per $C^6H^5N\genfrac{}{}{0pt}{}{C^2H^5}{CO.COOH}+H^2O$
H^2O %	8.78	8.53

L'acido anidro diede all'analisi i risultati seguenti:

Gr. 0.1927 di acido anidro fornirono 12,2 cm³ di N a 18° e 747.5 mm.

Da cui:

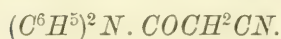
	trovato	calcolato per $C^6H^5N\genfrac{}{}{0pt}{}{C^2H^5}{CO.COOH}$
N %	7.12	7.25

L'acido etilfenilossamico cristallizza dall'acqua in bei prismi fusibili a 60°-60°.5 contenenti 1 H^2O di cristallizzazione che perdono già stando sul cloruro di calcio; anidro fonde a 94°-95°. È solubile nell'alcool e nell'etere.

Scaldato a 100-100° si decompone dando solamente molta anidride carbonica e dell'ossido di carbonio. Il residuo bolle da 204° a 255° ed è costituito molto probabilmente, da un miscuglio di etilanilina e di formiletilanilina $C^6H^5N\genfrac{}{}{0pt}{}{C^2H^5}{CHO}$.

Il *sale d'ammonio* non precipita col nitrato d'argento, nè col cloruro di calcio, nè col cloruro di bario.

Cianacetildifenilamina.

$(C^6H^5)^2N.COCH^2CN.$

La difenilamina e l'etere cianacetico, nel rapporto dei loro pesi molecolari, furono scaldati a bagno d'olio. Verso 200° la reazione è quasi nulla, ma a 220°-230° si fa viva, con sviluppo di alcool, poco etere cianacetico e pochissimo acido cianidrico. Dopo 3 a 4 ore di riscaldamento si lascia raffreddare; agitando il liquido, rosso bruno, con poco etere si rappiglia in massa cristallina quasi bianca, la quale lavata bene con etere, spremuta e ricristallizzata alcune volte dall'alcool si ha in begli aghi a punto di fusione costante. Il carbone decolora bene la soluzione alcolica. Non vi è gran vantaggio nel variare la quantità dell'uno o dell'altro dei due corpi reagenti. L'etere che ha servito a lavare il prodotto della reazione contiene della difenilamina e dell'etere cianacetico inalterati.

Gr. 0.1481 di sostanza disseccata sul cloruro di calcio, diedero 0.4158 di CO^2 e 0 0770 di H^2O.

Da cui:

		trovato	calcolato per $(C^6H^5)^2NCOCH^2CN$
C	=	76.57	76.28
H	=	5.58	5.10

La cianacetildifenilamina fonde a 153°-154° in liquido incoloro: è pochissimo solubile nell'acqua, solubile nell'alcool da cui cristallizza in prismi grossi se si deposita lentamente, o in aghi leggieri, se rapidamente Nell'etere è poco solubile. Sciolta in acido solforico concentrato ed agitata con un granello di bicromato potassico dà delle bellissime strie azzurro-violacee.

Acido difenilossamico.

Trattando 4 gr. di cianacetildifenilamina in polvere finissima con poca acqua e circa 120 cm³ di soluzione satura di permanganato potassico, l'ossidazione ha luogo anche a temperatura

ordinaria, ma molto lentamente in causa della pochissima solubilità della cianacetildifenilamina. Si scaldò a b. m. sino a decolorazione completa, o quasi, e si tolsero le ultime traccie di permanganato con alcune goccie di soluzione di acido solforoso. Il liquido alcalino, filtrato, giallo, lasciato a sè deposita una sostanza (A) cristallina giallastra che fonde a 168°-170°: separata questa sostanza, fu estratto due volte con etere che toglie un poco della sostanza (A) e poca difenilamina prodottasi nella reazione, poi fu acidulato con acido solforico e di nuovo estratto con etere. Questo lascia un residuo quasi bianco cristallino che fu lavato con poco etere. L'acido grezzo così ottenuto fonde a 138°-139° e per ricristallizzazione dall'etere acquoso si ha in begli aghi incolori brillanti.

All'analisi diede i risultati seguenti:

Gr. 0.9288 di acido seccato all'aria e sul cloruro di calcio, scaldati a 70°-75° perdettero 0.0652 di acqua.

Da cui:

	trovato	calcolato per $C^{14}H^{11}NO^3+H^2O$
H^2O %	7.02	6.97

Gr. 0.2908 di acido anidro fusibile a 141°.5, diedero 14.8 cm³ di N a 20° e 745.5 mm.

Da cui:

	trovato	calcolato per $(C^6H^5)^2NCOCOOH$
N %	5.65	5.81

L'acido difenilossamico è poco solubile nell'acqua fredda, si scioglie nell'acqua bollente dalla quale cristallizza bene, ma in parte si scompone dando difenilamina, ed invero, mentre l'acido puro è inodoro, quando è cristallizzato dall'acqua assume l'odore della difenilamina. È solubile nell'alcool, poco solubile nell'etere a freddo, di più a caldo; per evaporazione spontanea della soluzione nell'etere acquoso si ha in begli aghi disposti a rosetta contenenti 1 H^2O di cristallizzazione che perde a 70°-75°: anidro fonde a 141°.5 sviluppando del gas.

Non dà la reazione della difenilamina trattando la sua soluzione cloridrica con acido nitrico; mentre la dà se è stato cristallizzato dall'acqua.

Sciolto in acido solforico concentrato e trattato con un granello di bicromato potassico fornisce delle strie rosso-violacee; la reazione è meno bella che colla cianacetildifenilamina.

Il *sale d'argento* si ottiene in forma di precipitato bianco aggiungendo nitrato d'argento alla soluzione del sale ammonico; si scioglie nell'acqua bollente da cui cristallizza in aghetti riuniti in mammelloni.

I rapporti fra il punto di fusione dell'acido fenilossamico di Gerhardt ed i punti di fusione dei tre nuovi acidi fenilossamici sostituiti da me ottenuti, sono i seguenti:

		idrato	anidro
Acido fenilossamico	$C^6H^5N\begin{matrix}H\\CO.COOH\end{matrix}$	—	150°-151° (1)
» difenilossamico	$C^6H^5N\begin{matrix}C^6H^5\\CO.COOH\end{matrix}$	—	141°.5
» metilfenilossamico	$C^6H^5N\begin{matrix}CH^3\\COCOOH\end{matrix}$	82°.5-83°.5	120°
» etilfenilossamico	$C^6H^5N\begin{matrix}C^2H^5\\COCOOH\end{matrix}$	60-60°.5	92°

Difenilossamide asimmetrica.

La sostanza cristallina giallastra (A) ottenuta nell'ossidazione della cianacetildifenilamina col permanganato potassico e fusibile a 168°-170°, si ha, facendola ricristallizzare dall'acqua, in belle lamine rettangolari od in aghi, brillanti, leggieri. Fonde a 169°-170°. La sua soluzione è neutra. È solubile nell'alcool, pochissimo solubile nell'etere anche caldo. Trattata con acido cloridrico concentrato ed alcune goccie di acido nitrico non dà la reazione della difenilamina. Scaldata con soluzione di potassa si decompone in ammoniaca, difenilamina ed acido ossalico. Analizzata diede i risultati seguenti:

(1) Klinger, *Annalen der Chem.*, 184, pag. 261, 279.

I. Gr. 0.1214 di sostanza fornirono 13 cm^3 di N a 22° e 744 mm.

II. Gr. 0.1212 di sostanza fornirono 0.3170 di CO^2 e 0.0570 di H^2O.

III. Gr. 0.1562 di sostanza fornirono 0.4032 di CO^2 e 0.0748 di H^2O.

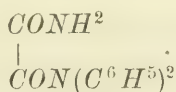
Da cui:

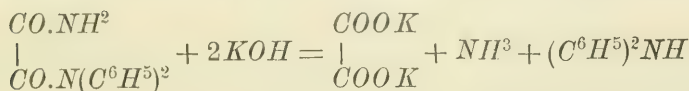
		trovato		
		I	II	III
C	=	—	71.15 (1)	70.35
H	=	—	5.20	5.30
N	=	11.66	—	—

Numeri che conducono alla formola $C^{14}H^{12}N^2O^2$, per la quale si calcola:

$$C = 70.00$$
$$H = 5.00$$
$$N = 11.69$$

L'analisi e la decomposizione cogli alcali in ammoniaca, difenilamina ed acido ossalico mi pare non possano lasciar dubbio che la sostanza ottenuta sia la difenilossamide asimmetrica:

$$\begin{array}{l} CONH^2 \\ | \\ CON(C^6H^5)^2 \end{array}$$

la quale colla potassa si decomporrebbe nel modo seguente:

$$\begin{array}{l} CO.NH^2 \\ | \\ CO.N(C^6H^5)^2 \end{array} + 2KOH = \begin{array}{l} COOK \\ | \\ COOK \end{array} + NH^3 + (C^6H^5)^2NH$$

La difenilossamide asimmetrica è un prodotto costante dell'ossidazione della cianacetildifenilamina; però sempre in piccola quantità.

(1) La quantità maggiore di carbonio trovata nell'analisi II è da attribuirsi alla formazione di un poco di composti nitrosi; l'acqua ottenuta era acidissima.

La difenilossamide asimmetrica è isomera colla difenilossamide simmetrica od ossanilide $\begin{array}{l} CONHC^6H^5 \\ | \\ CONHC^6H^5 \end{array}$ di Gerhardt. La mia difenilossamide asimmetrica fonde a temperatura più bassa (169°-170°) che non la difenilossamide simmetrica (245°), come la dietilossamide asimmetrica (125°-127°) rispetto alla dietilossamide simmetrica (179°); così pure è della difenilurea non simmetrica $CO < \begin{array}{l} NH^2 \\ N(C^6H^5)^2 \end{array}$ che fonde a 189° mentre la difenilurea simmetrica $CO < \begin{array}{l} NHC^6H^5 \\ NHC^6H^5 \end{array}$ è fusibile a 235°.

Cianacetiltetraidroγchinolina.

La tetraidroγchinolina $C^9H^{10}NH$ si comporta pressochè egualmente alla metilanilina ed alla etilanilina; fornisce il derivato cianacetilico $C^9H^{10}.NCOCH^2CN$ in bei cristalli fusibili a 65°-66°. Dovendo ancora studiare i prodotti di ossidazione di questa sostanza mi limito a questo breve cenno.

Azione dell'etere cianacetico sulla fenilidrazina.

I prodotti che si ottengono sono diversi secondo la temperatura cui ha luogo la reazione; questi prodotti saranno descritti in una terza Nota insieme a quelli che si ottengono da altre basi.

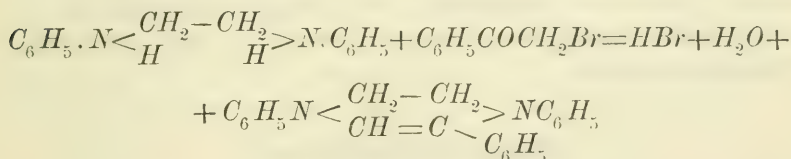
Torino. Laboratorio di Chimica farm. e tossicologica dell'Università, 17 giugno 1892.

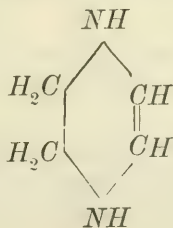
Sulla trifenilpiperazina;

Ricerche del Dott. LUIGI GARZINO

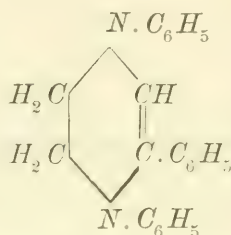
Dalle ricerche da me riferite in una precedente pubblicazione (1), risulta che per l'azione del bromuro di fenacile $C_6H_5CO.CH_2Br$, sull'etilendifenildiamina $C_2H_4(C_6H_5.NH)_2$, si forma il composto $C_{22}H_{20}N_2$; questo corpo, come ammisi allora, proviene dalla condensazione di una molecola di etilendifenildiamina con una di bromoacetofenone con simultanea eliminazione di acido bromidrico ed acqua. Reazione rappresentata dalla equazione seguente:

$$C_6H_5.N{<}{}^{CH_2-CH_2}_{H\qquad H}{>}N.C_6H_5+C_6H_5COCH_2Br=HBr+H_2O+$$

$$+C_6H_5N{<}{}^{CH_2-CH_2}_{CH=C\diagdown C_6H_5}{>}NC_6H_5$$

La sostanza così ottenuta, sarebbe un derivato della tetraidropirazina o tetraidropiazina (Widmann) che dir si voglia

$$\begin{array}{ccc} & NH & \\ H_2C & & CH \\ | & & \| \\ H_2C & & CH \\ & NH & \end{array}$$

(1) *Gazz. Chimica Ital.* XXI, 1891. Fasc. XI, vol. 2°. *Sulla Trifeniltetraidropirazina.* Nota I.

e propriamente la (1. 3. 4) *trifeniltetraidropirazina*

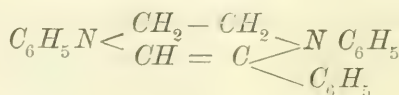
$$
\begin{array}{ccc}
 & N.C_6H_5 & \\
H_2C & & CH \\
 & & \| \\
H_2C & & C.C_6H_5 \\
 & N.C_6H_5 &
\end{array}
$$

Gli studii ulteriori su questo argomento, di cui si tratta appunto nella presente comunicazione, ebbero per iscopo:

1° La preparazione della trifeniltetraidropirazina con miglior rendimento di quanto ebbi in precedenza.

2° La preparazione della trifenilessaidropirazina (o trifenilpiperazina) per riduzione della trifeniltetraidropirazina.

In seguito, per estendere maggiormente queste ricerche, studierò altri composti simili. Così, oltre ai corrispondenti derivati della orto- e paraetilenditolildiamina, intorno a cui riferirò in una prossima nota, e dell'α — e β etilendinaftildiamina, preparerò i composti analoghi dall'etilendifenildiamina e dal cloroacetone: inoltre, avuta la etilendimetildiamina dall'azione del bromuro d'etilene sulla metilamina, col cloroacetone tenterò d'avere la trimetiltetraidropirazina, da cui forse potrò isolare la tetraidropirazina stessa.

Trifeniltetraidropirazina.

$$C_6H_5N < \begin{matrix} CH_2 - CH_2 \\ CH = C \end{matrix} > N\,C_6H_5 \quad (C \text{—} C_6H_5)$$

Questa base risulta, come è detto sopra, dalla condensazione di una molecola di bromuro di fenacile con una di etilendifenildiamina.

Riguardo all'etilendifenildiamina, noterò che, avendo impiegato i metodi di preparazione suggeriti da Gretillat (1) e Morley (2), non ebbi risultati del tutto soddisfacenti, poichè assieme all'eti-

(1) *Moniteur scientifique*, 1873, pag. 384.
(2) *Berichte*, XII, 1794.

lendifenildiamina cercata, ebbi sempre la formazione della sostanza a punto di fusione più elevato (presenza di difenilpiperazina, fondente a 165°), che rendeva malagevole ottenere la base secondaria allo stato di purezza.

Ebbi miglior rendimento, modificando un poco il metodo di Hofmann; modificazione che consiste nell'impiegare, assieme al bromuro d'etilene, un grande eccesso di anilina.

In un ampio pallone, si mescolano il bromuro d'etilene e l'anilina, nel rapporto di *una* molecola di quello per *otto* di base; si connette ad un refrigerante a ricadere, scaldando poi all'ebollizione del bagno-maria.

Dopo un quarto d'ora circa di tale riscaldamento, la formazione di una poltiglia cristallina di bromidrato d'anilina, indica il compiersi della reazione.

Protratta l'azione del calore ancora per qualche minuto, si lascia raffreddare: si tratta quindi con grande quantità d'acqua la sostanza, riscaldando a b. m., prima nel pallone stesso, poi versando in larga capsula. Col vapor d'acqua si elimina il bromuro d'etilene inalterato. Ripetei varie volte questo trattamento, lasciando raffreddare il liquido prima di separare l'acqua, fino a scomparsa del bromidrato d'anilina.

La sostanza grezza, che per raffreddamento si solidifica in massa cristallizzata, pressai accuratamente fra carta, per esportare la quantità d'anilina che la impregnava ancora. Questo prodotto, cristallizzato una volta da alcool a 80°, l'ebbi bianco e puro fondente a 64°-65° in goccia limpida. Così operando ottenni circa l'83 % del rendimento teorico, evitando completamente la formazione della dietilendifenildiamina (difenilpiperazina).

In ricerche anteriori (1) ho dimostrato che per azione del bromoacetofenone sull'etilendifenildiamina, si forma la trifeniltetraidropirazina $C_{22}H_{20}N_2$, assieme alla difenaciletilendifenildiamina, quando il bromuro di fenacile è impiegato in lieve eccesso, e che si ottiene solamente la trifeniltetraidropirazina, quando nell'operazione è presente una quantità maggiore di etilendifenildiamina. Preparai ora il composto di condensazione più abbondantemente e con più facilità operando nel modo seguente:

Gr. 35 di etilendifenildiamina si mescolarono intimamente

---

(1) *Gazzetta Chimica Italiana*, XXI, 1891, fasc. XI, vol. 2°.

con gr. 21 di bromuro di fenacile e con gr. 17 di acetato sodico anidro. — La quantità di diamina impiegata è notevolmente maggiore di quella occorrente per avere i reattivi in proporzioni equimolecolari. — La miscela, ben secca, introdotta in palloncino a largo collo. venne riscaldata all'ebollizione del bagno d'acqua.

Dopo pochi minuti di riscaldamento, la massa fuse in gran parte e si osservarono tosto grumetti bianchi di bromuro di sodio; passato un quarto d'ora circa, la sostanza si risolidificò quasi tutta e la reazione fu compiuta. — Si triturò con acqua in mortaio il prodotto grezzo, che non esalava più affatto odore di bromoacetofenone, finchè l'acqua di lavaggio non dava più reazione di bromuri. La sostanza paglierina, polverulenta si lavò ripetutamente con alcool concentrato. freddo, triturandola in mortaio, fino a che l'alcool restò incoloro. Il prodotto allora, pressochè bianco, secco pesava gr. 30 (mentre teoricamente si sarebbe dovuto averne gr. 32,7) ed era quasi puro. — Per purificarlo completamente, si sciolse in benzina, in cui è molto solubile. riscaldando leggermente, e la soluzione benzinica che era più o meno colorata in giallo, si versò poco a poco in 10-12 volumi di alcool concentrato freddo, agitando vivamente affinchè la pirazina non si separasse oleosa e poi a grumi. Dopo brevissimo tempo cominciarono a formarsi minuti cristalli e dopo qualche ora si ebbe depositata gran parte della sostanza. Dei 30 grammi sopradetti, ebbi depositati in un simile trattamento gr. 23 di pirazina fondente a 128°-129°. — Le acque madri benzino-alcooliche, colorate alquanto, fornirono per concentrazione altra pirazina più gialla e naturalmente meno pura.

Ripetendo due o tre volte questa operazione, si ha la trifeniltetraidropirazina bianca.

Così precipitata è in polvere cristallina, costituita da minute squamette incolore, che, vedute in massa, hanno leggiero color paglierino.

L'analisi di questo prodotto confermò la formola grezza già data precedentemente; difatti la sostanza seccata su acido solforico, fornì i seguenti risultati analitici:

Gr. 0,2030 di sostanza diedero 0,6297 di CO_2 e 0,1253 di H_2O.

Gr. 0,2609 di sostanza fornirono cc. 21,5 di azoto a 22° e 739,5 mm. di pressione atmosferica.

	Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{20}N_2$
C % =	84,59	84,61
H % =	6,85	6,41
N =	9,17	8,97.

La trifeniltetraidropirazina fonde a 130°-131°.

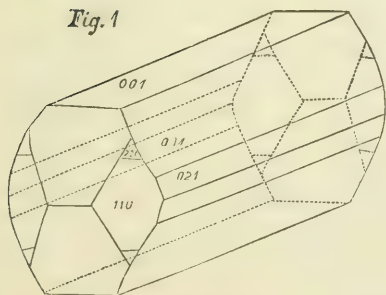
È poco solubile in alcool freddo, di più nel bollente, molto solubile in benzina, facilmente in etere, da cui specialmente si ottiene ben cristallizzata.

Le soluzioni benzinica ed eterea hanno intensa fluorescenza azzurra.

Il Dr. Artini Ettore, dell'Università di Pavia, determinò le costanti cristallografiche ed ottiche di questa sostanza cristallizzata dall'etere. Ebbe la gentilezza di comunicarmi i risultati ottenuti, che qui unisco.

Trifeniltetraidropirazina.

Sistema trimetrico: (Fig. 1)

$$a : b : c = 0,7657 : 1 : 1,8624$$

(001) : (011) = 61°,46

(001) : (101) = 67 ,39

Forme osservate:

{001}, {110}, {101}, {011}, {021}, {221}.

I cristalli sono sempre prismatici, allungati secondo [100].

Sfaldatura perfetta secondo {001}.

Piano degli assi ottici {100}. Bissetrice acuta, positiva, normale a {001}. Forte doppia rifrazione. Angolo vero degli assi ottici $2V_a = 66°, 4'$ per la luce del sodio. Indice di rifrazione medio $\beta = 1,7252$ (per la luce del sodio). Dispersione degli assi piuttosto energica: $\rho > v$.

La trifeniltetraidropirazina è una base assai debole, però stabilissima. Si scioglie negli acidi minerali concentrati da cui riprecipita per aggiunta di acqua. Si conserva molto tempo inalterata, sia esposta all'aria, sia in soluzione.

Ha proprietà riducenti; difatti la sua soluzione alcoolica riduce il cloruro d'oro, il cloruro mercurico; col cloruro ferrico dà una colorazione verde fugace, che passa al giallo e da cui non ottenni pel riposo sostanza cristallizzata, come avviene per contro nell'identico derivato toluilico. — Trattata con soluzione alcoolica di cloruro di platino, dapprima dà un intorbidamento verdognolo, dovuto a riduzione del sale, e poi la soluzione si fa limpida, gialla, da cui si deposita un cloroplatinato che però non ha la composizione corrispondente al sale platinico della trifeniltetraidropirazina.

Alla pressione ridotta a 240 mm. bolle sopra 360°, alterandosi parzialmente, ingiallendo e sviluppando odore eguale a quello di naftilamina; tanto la parte distillata, quanto il residuo più colorato, ricristallizzati, hanno il punto di fusione della base pura.

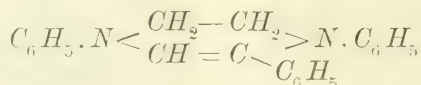
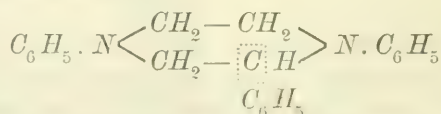
Riduzione della trifeniltetraidropirazina.

Fra i derivati della trifeniltetraidropirazina, presenta particolare interesse quello che si dovrebbe ottenere per sua idrogenazione, cioè la trifenilessaidropirazina o trifenilpiperazina.

Difatti la formazione di questo corpo, costituisce una prova dell'esservi un doppio legame nel nucleo caratteristico della tetraidropirazina; inoltre, ammessa per la trifeniltetraidropirazina la formola di costituzione:

$$C_6H_5 . N < \begin{matrix} CH_2 - CH_2 \\ CH = C \end{matrix} > N . C_6H_5 \quad (C \text{---} C_6H_5)$$

nel composto essaidrogenato:

$$C_6H_5 . N < \begin{matrix} CH_2 - CH_2 \\ CH_2 - \boxed{C}\,H \\ C_6H_5 \end{matrix} > N . C_6H_5$$

sarebbe presente un atomo di carbonio asimmetrico, che darebbe alla molecola la possibilità di essere sdoppiata nei due isomeri otticamente attivi.

Ricerche su quest'ultimo argomento formeranno appunto oggetto di un altro lavoro.

Il procedimento di riduzione, generalmente adottato, cioè l'impiego del sodio con alcool etilico assoluto, è quello da cui ottenni buon risultato, quantunque finora non abbia ancor potuto preparare quantità sufficiente di trifenilpiperazina per uno studio completo.

Dalla riduzione col sodio e coll'alcool amilico, ebbi risultato negativo. Similmente riottenni la base inalterata dall'impiego dell'amalgama di sodio, tanto in soluzione alcoolica quanto acetica.

Tentai pure la riduzione collo stagno ed acido cloridrico, nella speranza di aver maggior rendimento, ma invece ebbi un risultato diverso, ebbi cioè, non solo riduzione, ma contemporaneamente idratazione e perciò sdoppiamento della trifeniltetraidropirazina nell'originaria etilendifenildiamina ed in acetofenone.

I.

Riduzione della trifeniltetraidropirazina con stagno ed acido cloridrico.

In palloncino munito di refrigerante a ricadere, sciolsi gr. 6 di trifeniltetraidropirazina in cc. 80 di acido cloridrico ad 1,19; alla soluzione limpida leggermente verdognola, riscaldata blandamente a b. m., aggiunsi in una volta gr. 4 circa di stagno polverizzato.

Appena cominciato lo sviluppo di idrogeno, la colorazione verdognola della soluzione scomparve assumendo una tinta giallicccia.

Dopo un'ora di riscaldamento si separò una parte cristallizzata bianca che man mano aumentò, mescolandosi poco per volta con un'altra sostanza a grumetti, verdiccia e più pesante. Inoltre, all'estremità del tubetto, assieme ai fumi di acido cloridrico si notava distinto l'odore di acetofenone.

Come riconobbi in seguito, la sostanza bianca leggiera era cloridrato di etilendifenildiamina ed il prodotto verdiccio, trifeniltetraidropirazina inalterata che si depositava per il diluirsi dell'acido cloridrico.

Dopo tre ore di reazione a b. m. lo stagno era quasi completamente disciolto.

Diluii il contenuto acido del pallone con un poco più del suo volume di acqua, quindi lo distillai con corrente di vapore acquoso.

Le prime porzioni distillate, costituite da un liquido torbido contenente goccioline oleose alquanto più pesanti dell'acqua, esalavano nettamente l'odore di acetofenone. — Successivamente, assieme all'acqua non distillò altra sostanza. — Estratte con etere le prime frazioni ed eliminato il solvente ebbi un residuo liquido, oleoso, leggermente colorato, del peso di gr. 0,8 circa.

Questo liquido, per raffreddamento con miscela frigorifera, si solidificò in massa cristallina; trattato con fenildrazina vi si combinò già a freddo, meglio a b. m., per dare un composto, che nell'aspetto, nel punto di fusione (105°), nella poca stabilità, è identico a quello preparato da Reisenegger (*Berichte* XVI, 664) da fenilidrazina ed acetofenone. — In questo modo fu riconosciuta con certezza la presenza costante dell'acetofenone fra i prodotti della riduzione. — Si filtrò poi a caldo il liquido acido, da cui si era eliminato l'acetofenone, e che conteneva indisciolta una sostanza solida polverulenta, ed in soluzione un cloridrato. La parte rimasta sul filtro, lavata con acqua e seccata, pesava gr. 3 circa; cristallizzata da alcool-benzina fu riconosciuta per trifeniltetraidropirazina inalterata.

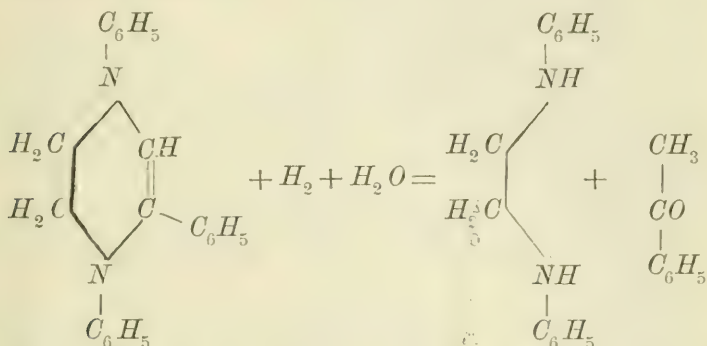
La parte solubile in acqua acida, parzialmente cristallizzatasi per raffreddamento della soluzione, si trattò con potassa in eccesso, per precipitare la base e ridisciogliere l'idrato stannoso dapprima separatosi. La base non completamente bianca, lavata e seccata, era circa in gr. 2,5; da alcool diluito si ebbe fondente a 65°.

Il punto di fusione, l'aspetto ed un dosaggio d'azoto, l'identificarono per etilendifenildiamina.

Gr. 0,1150 di sostanza fornirono cc. 14 di azoto a 18°,5 e mm. 731,5 di pressione atmosferica.

	Trovato	Calcolato per $C_{14}N_{16}H_2$
N %	13,51	13,20

Dunque l'azione dell'idrogeno nascente sviluppato dallo stagno ed acido cloridrico sulla trifeniltetraidropirazina si può spiegare colla seguente equazione:

$$\begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ N \\ H_2C \diagup \quad \diagdown CH \\ | \qquad\quad \| \\ H_2C \diagdown \quad \diagup C - C_6H_5 \\ N \\ | \\ C_6H_5 \end{array} + H_2 + H_2O = \begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ NH \\ H_2C \diagup \\ | \\ H_2C \diagdown \\ NH \\ | \\ C_6H_5 \end{array} + \begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{array}$$

cioè per addizione di una molecola d'idrogeno e d'una molecola di acqua, si ricostituiscono l'etilendifenildiamina e l'acetofenone.

È questo forse il primo caso in cui per riduzione e simultanea idratazione, si rompe un anello carboazotato, scindendosi nei due corpi che l'avevano costituito.

II.

Riduzione della trifeniltetraidropirazina con alcool assoluto e sodio.

Si sciolsero gr. 6.8 di trifeniltetraidropirazina in gr. 450 di *alcool assoluto*, contenuti in gran pallone connesso ad un refrigerante a ricadere. Nel liquido bollente si introdussero a brevi intervalli gr. 35 di sodio metallico, ben secco, tagliato a pezzetti operando rapidamente e procurando che lo sviluppo di idrogeno fosse sempre vivacissimo.

Quando il sodio fu tutto disciolto, si versò la soluzione giallognola, tiepida, in più di $^1/_2$ litro d'acqua, agitando il liquido torbido, si separò la sostanza pastosa rossiccia, che dopo 24 ore si fece in gran parte cristallina. — Raccoltala su filtro ed essiccata, venne trattata a caldo con acido cloridrico diluito (acido cloridrico ad 1,12 allungato con egual volume d'acqua). — Il prodotto grezzo vi si sciolse parzialmente con colorazione verde

intensa; la porzione maggiore restò indisciolta. — La soluzione in acido cloridrico diluito, filtrata, decolorata con carbone animale e neutralizzata con ammoniaca, lasciò depositare una *base* che, cristallizzata da alcool ordinario, è in minuti aghetti bianchi, riuniti a ciuffetto, fondenti a 101°-102°. — Altra piccola quantità di pirazina ridotta, ricavai dalla parte non scioltasi in acido cloridrico acquoso, trattandola con acido cloridrico alcoolico (acido cloridrico 1,12 p. 19, alcool concentrato p. 31). Anche la base avuta in questo modo fonde, dopo cristallizzazione da alcool, a 101°-102°.

Il residuo del trattamento con acido cloridrico alcoolico, circa gr. 3, è costituito, oltre a resina, da trifeniltetraidropirazina inalterata.

Il rendimento in base ridotta è circa il 30 %.

Questa sostanza, ben secca, diede all'analisi i seguenti risultati:

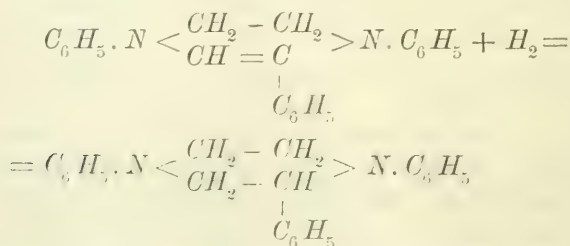
Gr. 0,1728 di sostanza diedero 0,5313 di CO_2 e 0,1095 di H_2O.

Gr. 0,1250 di sostanza, fornirono cc. 10,4 di azoto a 22°,5 ed alla press. atm. di mm. 739,8.

	Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{22}N_2$
C %	83,85	84,07
H %	7,04	7,00
N %	9,27	8,91

I dati analitici corrispondono quindi a quelli richiesti dalla trifenilessaidropirazina $C_{22}H_{22}N_2$. La sua formazione è rappresentata dall'equazione seguente:

$$C_6H_5 . N < \begin{matrix} CH_2 - CH_2 \\ CH = \underset{\substack{| \\ C_6H_5}}{C} \end{matrix} > N . C_6H_5 + H_2 =$$

$$= C_6H_5 . N < \begin{matrix} CH_2 - CH_2 \\ CH_2 - \underset{\substack{| \\ C_6H_5}}{CH} \end{matrix} > N . C_6H_5$$

si avrebbe cioè la difenilpiperazina in cui un atomo di idrogeno di un metilene è sostituito dal fenile.

La trifenilpiperazina cristallizza in piccoli aghetti riuniti a ciuffo dall'alcool concentrato in cui si scioglie abbastanza facilmente. È pure solubile nei solventi ordinari da cui si deposita cristallizzata. È insolubile in acqua. — La sua soluzione in benzina, etere, etere di petrolio offre ancora fluorescenza azzurra, ma meno intensa del composto tetraidrogenato.

Fonde costantemente alla temperatura di 101°-102°, in goccia limpida, fluorescente, che resta poi lungo tempo vischiosa.

Si scioglie negli acidi minerali, anche non molto concentrati, da cui per aggiunta d'acqua riprecipita bianca. Sciolta in acido cloridrico, precipita in giallo chiaro col cloruro di platino, in giallo ranciato col cloruro d'oro, in bianco col cloruro mercurico.

La sua soluzione alcoolica, trattata con soluzione alcoolica di acido picrico, lascia depositare col riposo un picrato, fondente verso 173°-175°, in cristalli gialli, minuti, duri.

La trifenilpiperazina ha molta analogia colla base tetraidrogenata da cui deriva. In essa però è molto più accentuato il carattere basico. Ha perduto la proprietà riducente sui sali dei metalli pesanti, anzi con questi dà dei sali doppi ben definiti.

Cloroplatinato di trifenilpiperazina. — Preparai questo sale, trattando una soluzione di trifenilpiperazina in acido cloridrico, con una soluzione alcoolica di cloruro di platino. Per concentrazione si ottiene il cloroplatinato cristallizzato, di color giallo scuro. Questo sale, lavato prima con un poco d'alcool e poi con alcool ed etere fu essiccato completamente nel vuoto e sulla potassa e quindi analizzato.

Riscaldato a 100°-120°, non diminuì di peso.

Gr. 0,5856 di cloroplatinato così seccato, diedero 0.1565 di platino metallico.

Trovato	Calcolato per $C_{22}H_{22}N_2 . H_2PtCl_6$
$Pt\,^0/_0 = 26,72$	27,13.

Il cloroplatinato di trifenilpiperazina $C_{22}H_{22}N_2 . H_2PtCl_6$, è una polvere giallo bruna, costituita da minutissimi aghi.

Si decompone verso 220°. È insolubile in acqua, facilmente solubile in alcool concentrato, da cui si può avere cristallizzato; è insolubile in etere.

Azione del bromo sulla trifenilpiperazina. — La trifenilpiperazina in soluzione eterea, trattata con bromo, sciolto pure in etere, dà immediatamente un precipitato bianco, costituito parte da un bromoderivato libero, e parte da un bromidrato formatosi coll'acido bromidrico messo in libertà nella reazione.

Avendo fatto un saggio quantitativo con soluzione titolata di bromo in etere, constatai: 1ª che in soluzione eterea a freddo, la trifenilpiperazina assorbe la quantità di bromo necessaria per dare un monobromoderivato; 2° che parte in soluzione, parte come bromidrato si trova una quantità di acido bromidrico, corrispondente alla metà del bromo impiegato, e che quindi per azione del bromo sulla trifenilpiperazina, non si forma un composto d'addizione, ma bensì di sostituzione.

Che nella riduzione con sodio ed alcool assoluto l'addizione di due atomi di idrogeno sia avvenuta nel nucleo pirazinico, sciogliendo il doppio legame esistente nella trifeniltetraidropirazina, e non in uno dei tre fenili, è resa probabilissima dalle seguenti considerazioni:

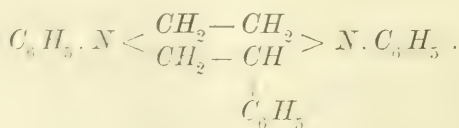
1° Somiglianza nell'aspetto fisico della trifenilpiperazina colla trifeniltetraidropirazina originaria.

2° Accrescimento della potenza basica nel composto ridotto.

3° Scomparsa della proprietà riduttrice, probabilmente dovuto nella tetraidropirazina alla presenza del doppio legame fra i due atomi di carbonio del nucleo pirazinico.

4° Non formazione di un derivato bibromurato d'addizione.

Da queste osservazioni e da quanto dissi innanzi si deduce che il prodotto di riduzione della trifeniltetraidropirazina, sia veramente la trifenilesaidropirazina o trifenilpiperazina, rappresentata dallo schema seguente:

$$C_6H_5 . N < \begin{array}{l} CH_2 - CH_2 \\ CH_2 - CH \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad C_6H_5 \end{array} > N . C_6H_5 .$$

Torino, R. Università. Laboratorio del Prof. Guareschi.
Giugno 1892.

Su una congruenza di rette di secondo ordine e di quarta classe;

Nota di DOMENICO MONTESANO

Due recenti Memorie, l'una di Sturm (1), l'altra di Schumacher (2), completando le classiche ricerche del Kummer su le congruenze di rette di 2° ordine, dànno la classificazione di quelle di tali congruenze che contengono ∞^1 coni o fasci di raggi, che ammettono cioè una linea *singolare:* quella costituita dai vertici o dai centri di tali coni o fasci.

E nella Memoria dello Sturm si fa cenno di tre congruenze della natura accennata, costituite da coni di 2° grado, le cui linee singolari sono rispettivamente una conica, una cubica gobba ed una cubica piana dotata di punto doppio (3).

Nella presente Nota studio la prima di queste tre congruenze, la quale con un'altra di egual tipo forma la congruenza delle generatrici dei coni non degeneri di una rete di quadriche la cui curva nodale si scinde in due coniche ed in due rette. Innanzi tutto dimostro che la congruenza appartiene a due complessi tetraedrali, quindi ne do la rappresentazione su di un piano e determino le trasformazioni involutorie dello spazio che la mutano in se stessa. Di più ottengo alcuni notevoli teoremi su le reti di quadriche la cui linea nodale si scinde in parti di cui due siano due coniche assegnate situate in piani distinti ed aventi in comune una coppia di punti.

(1) *Math. Annalen*, Bd. 36.

(2) *Math. Annalen*, Bd. 38.

(3) Lo STURM si limita ad indicarne la genesi più semplice e la natura delle superficie focali, rimandando ogni ulteriore esame ad un prossimo lavoro

1. Se una congruenza di rette di 2° ordine, non degenere, è costituita dalle generatrici di ∞^1 coni di 2° grado, questi formano un sistema irriduttibile ∞^1, di indice 2, e perciò appartengono ad una medesima rete di quadriche.

Ora, escluso il caso di una rete di quadriche composta tutta da coni aventi in comune il vertice (esclusione che deve intendersi fatta anche in seguito), si ha che le generatrici dei coni di una rete R di quadriche costituiscono una congruenza di 4° ordine (perchè è noto che quattro di tali coni si trovano in ogni fascio della rete) e di 12ª classe (perchè i vertici di tutti i coni del sistema costituiscono una curva K_6 di genere 3 che è la *curva nodale* della rete) (1).

Sicchè il problema di determinare le congruenze di 2° ordine costituite dalle generatrici di ∞^1 coni quadrici equivale all'altro di determinare quali sono gli spezzamenti della curva nodale K_6 di una rete R di quadriche da cui derivi lo spezzamento della congruenza delle generatrici dei coni della rete in due o più parti, di cui una sia di 2° ordine.

Conviene a ciò servirsi della considerazione di quella corrispondenza involutoria I che ogni rete R di quadriche determina nello spazio, corrispondenza in cui due punti coniugati sono reciproci rispetto a tutte le quadriche della R.

Nel caso generale questa involuzione I è di 3° grado ed ammette come linea fondamentale semplice la curva nodale K_6 della rete (2).

È noto che su tale curva si ha un'*involuzione fondamentale* di 4° ordine e di 2ª specie, di cui ogni gruppo è costituito dai vertici di un tetraedro autoreciproco rispetto alle quadriche di un fascio della R, tetraedro di cui ogni faccia contiene la trisecante della curva K_6 coniugata nell'involuzione I al vertice opposto (3).

---

(1) La superficie focale di questa congruenza $L_{4,12}$ è costituita dalle curve basi dei fasci, della rete dotate di punto doppio, punto che trovasi sulla K_6 nodale. Perciò essa è la superficie di 24° ordine e di 8ª classe studiata dallo Sturm nella sua Nota *Ueber Flächennetz zweiter Ordnung*. Giornale di Crelle, vol. 70.

(2) Vegg. REYE, *Geometria di posizione*, Vol. 2°, Lez. 27ª.

(3) Vegg. SCHUR., *Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen* — Math. Annalen., Bd. 17, § 10.

Sono del pari coniugati nella I due spigoli opposti del tetraedro, cioè a due a due nella I sono coniugate le corde della curva K_6, e due corde coniugate si appoggiano alla curva in punti costituenti un gruppo dell'involuzione fondamentale.

Nella I sono uniti i punti base $U_1, \ldots U_8$ della rete R e le rette che uniscono a due a due tali punti, le quali sono corde della K_6.

Ora, escludendo il caso che le quadriche della rete R abbiano in comune una linea e che le polarità dovute ad esse abbiano una coppia di elementi corrispondenti in comune, ogni spezzamento della K_6 compatibile con le esclusioni ora fatte, sarà tale çhe le due linee λ, λ', che prese assieme formano in esso la curva nodale K_6 della rete R, risultano la base di un sistema omaloidico di superficie di 3° ordine, che ammette per sistema connesso un sistema omaloidico della stessa natura, nè sarà possibile che una delle linee λ, λ' sia una cubica piana o che una di esse sia una curva di 5° ordine di genere O e l'altra sia una retta quatrisecante della precedente, e ciò perchè per le esclusioni fatte, nell'involuzione I che la rete R determina e che ammette per linee fondamentali le λ, λ', non vi è alcun punto che abbia per coniugato un piano, non vi è alcuna retta che sia coniugata ad ogni suo punto, nè vi sono due rette di cui una sia coniugata per intero ai punti dell'altra.

Perciò nelle ipotesi fatte la K_6 può spezzarsi semplicemente (1) o in una K_5 gobba di genere 2 ed in una sua corda, o in una K_4 gobba di 2^a specie ed in una conica K_2 appoggiata alla precedente in quattro punti, o in due cubiche gobbe aventi in comune quattro punti.

Non è possibile il secondo spezzamento perchè ove mai avesse luogo, la Iacobiana delle superficie Φ_3 coniugate nell'involuzione I ai piani dello spazio, risulterebbe costituita dalle superficie $I_2 \equiv K_4$, $I_6 \equiv K_4^2 K_2^3$ che nella I corrisponderebbero rispettivamente alle K_2, K_4, sicchè a due a due risulterebbero coniugate nella I le corde della K_2, il che è assurdo, non potendovi essere alcun fascio della rete R costituito da quadriche aventi per tetraedro autoreciproco comune un tetraedro i cui vertici siano tutti sulla K_2.

---

(1) Vegg. Nöther, *Eindeutige Raumtransformationen*, Math. Annalen, Bd. 3.

È possibile invece che la K_6 si spezzi in una K_5 di genere 1 ed in una sua corda k, ma ciò succede semplicemente quando della rete R fa parte una quadrica degenerata in due piani. Infatti nel caso indicato la Iacobiana delle superficie Φ_3 coniugate nella I ai piani dello spazio, risulterebbe costituita dalle $I_2 \equiv K_5$, $I_6 \equiv K_5^2 k^3$, che nella I corrisponderebbero rispettivamente alle k, K_5, ed ai punti A, B, C... della k risulterebbero coniugate nella I le trisecanti a, b, c ... della K_5, sicchè il fascio di piani $k'(a, b, c...)$ avente per asse una qualunque generatrice k' della $I_2 \equiv K_5$ corda di tale linea, risulterebbe il fascio dei piani polari della $(k) \equiv ABC...$ rispetto ad un fascio di quadriche della R, e quindi in tale fascio, e perciò nella R, vi sarebbe una quadrica spezzata in due piani passanti per k.

Viceversa se tale fatto si verifica, la curva nodale della rete contiene certamente la retta k, e l'ulteriore linea nodale della rete è una K_5 (appoggiata in due punti alla k) (1) la quale risulta il luogo dei vertici dei coni non degeneri della R; e perciò la congruenza $L_{4 \cdot 12}$ costituita dalle generatrici dei coni della rete si spezza in questo caso in una $L_{4 \cdot 10}$ e nei due sistemi piani rigati che hanno per sostegni i piani δ, δ' formanti la quadrica degenere della R: nè si presenta alcuna congruenza di rette di 2° ordine.

Un caso particolare del precedente si ottiene quando la rete R di quadriche contiene due superficie degeneri $(\delta \delta')$, $(\varepsilon \varepsilon')$, nel quale caso tanto la retta $k \equiv \delta \delta'$ come la retta $k' \equiv \varepsilon \varepsilon'$ fanno parte della curva nodale della rete, e l'ulteriore parte di questa curva è una K_4 di genere 1, avente per corda le k, k', luogo dei vertici dei coni non degeneri della R, sicchè anche in tale caso la congruenza costituita dalle generatrici dei coni della rete si spezza in parti di cui nessuna è di 2° ordine, si scinde cioè in una $L_{4 \cdot 8}$ e nei quattro sistemi piani rigati (δ), (δ'), (ε), (ε').

I punti base della rete si distribuiscono in tale caso in quattro coppie $S S_1$, $T T_1$, $S' S_1'$, $T' T_1'$ situate rispettivamente su le rette $s \equiv \delta \varepsilon$, $t \equiv \varepsilon \delta'$, $s' \equiv \delta' \varepsilon'$ $t' \equiv \varepsilon' \delta$.

Uno qualunque dei quattro piani δ, ε, δ', ε' corrisponde a

---

(1) Per l'involuzione I che si presenta in tale caso, vegg. la mia Nota *Su alcuni gruppi chiusi di trasformazioni involutorie nel piano e nello spazio* Atti del R. Istituto Veneto; Tomo 6°, Serie 6ª, § 4; 2°.

se stesso nell'involuzione I con corrispondenza involutoria e quadratica di 1ª classe, che ha per elementi uniti i quattro punti base della R situati nel piano che si considera; e dei tre punti fondamentali della corrispondenza due sono su la K_4 ed il terzo è sulla k o sulla k', cioè la K_4 contiene i punti ST-S_1T_1, ST_1-S_1T, $S'T$-$S_1'T_1$, $S'T_1$-$S_1'T$, $S'T'$-$S_1'T_1'$, $S'T_1'$-$S_1'T'$, ST'-S_1T_1', ST_1'-S_1T'. Di più la K_4 ha per corde i lati dei due quadrangoli $SS'S_1S_1'$, $TT'T_1T_1'$, mentre non incontra le s, s'.

Ora se il punto T_1 coincide col punto T sulla t ed il punto T_1' col punto T' sulla t' (coincidenze evidentemente possibili), le due coppie di punti ST-S_1T_1, ST_1-S_1T; $S'T$-$S_1'T_1$, $S'T_1$-$S_1'T$ della K_4 coincidono in T rispettivamente su le rette coniugate armoniche della t rispetto alle due coppie di rette TS, TS_1; TS', TS_1'; come coincidono in T' le due coppie di punti ST'-S_1T_1', ST_1'-S_1T'; $S'T'$-$S_1'T_1'$, $S'T_1'$-$S_1'T'$ rispettivamente sulle rette coniugate armoniche di t' rispetto alle due coppie di rette $T'S$, $T'S_1$; $T'S'$, $T'S_1'$, sicchè i punti T, T' risultano doppii per la curva K_4, e perciò questa si spezza in due coniche γ, γ' aventi entrambe in comune i punti T, T' ed appoggiate entrambe alle rette k, k' ed ai lati del quadrangolo gobbo $SS'S_1S_1'$.

E siccome ogni tetraedro autoreciproco rispetto alle quadriche di un fascio della R, ha due vertici su ciascuna delle due coniche (e ciò perchè nell'involuzione I alle γ, γ' vengono a corrispondere rispettivamente le quadriche $kk'\gamma'$, $kk'\gamma$, sicchè ad ogni corda dell'una linea è coniugata una corda dell'altra), perciò la congruenza $L_{4,8}$ costituita dalle generatrici dei coni non degeneri della rete si spezza in due congruenze $L_{2,4}$ $L'_{2,4}$, entrambe di 2° ordine e di 4ª classe, il cui tipo è quello che ci siamo proposto studiare.

2. Oltre la linea singolare (γ o γ') ciascuna delle congruenze $L_{2,4}$ $L'_{2,4}$ ha i quattro punti singolari isolati S, S_1, S', S_1', da ognuno dei quali la predetta linea viene proiettata secondo un cono della congruenza. Si ha di più che da ciascuno dei punti T, T' oltre i raggi del cono di 2° grado che contiene la retta TT' e passa per i punti S, S_1, S', S_1', escono altri ∞^1 raggi della congruenza situati nel piano (ω o ω') della linea singolare.

La congruenza ammette ulteriormente i piani singolari σ, σ',

ε, ε' sostegni di fasci di raggi aventi per centri i primi due il punto di sezione della linea singolare con la $k \equiv \delta\delta'$ e gli ultimi due il punto d'incontro della stessa linea con la $k' \equiv \varepsilon\varepsilon'$.

Tali centri sono coniugati nell'involuzione j (o j') determinata su la γ (o su la γ') dalle due coppie di punti di appoggio con i lati opposti del quadrilatero $S\,S'\,S_1\,S_1'$, involuzione che contiene del pari la coppia $T\,T'$, e ciò perchè i due quadrangoli completi costituiti l'uno dai punti di appoggio della γ (o della γ') con i lati del quadrilatero indicato e l'altro dai punti di appoggio con i lati del quadrilatero $k\,t\,k'\,t'$, hanno due punti diagonali in comune situati su le s, s', sicchè hanno anche in comune il terzo punto diagonale O od (O') centro dell'involuzione indicata.

Il quadrilatero gobbo $S\,S'\,S_1\,S_1'$ e le coniche γ, γ' appartengono ad una medesima quadrica F_2 rispetto alla quale le rette s, s' sono polari l'una dell'altra, sicchè la polare a' rispetto alla F_2 della retta a che congiunge le traccie A. A' delle s, s' sul piano ω della γ, si appoggia anche essa alle s, s' e passa pel centro O dell'involuzione j della γ, già indicata, di cui è asse la retta a; e nell'omografia assiale armonica H che ha per assi le a, a', risultano coniugati i punti T e T', S ed S_1, S' ed S_1' e le rette s ed s', e perciò risultano anche coniugate le rette t, t' che si appoggiano alle precedenti, sicchè è coniugata a se stessa nella H la rete R ed, al pari della γ, corrisponde a se stessa nella H la conica γ', cioè la a' è la congiungente le traccie A_1, A_1' delle s, s' sul piano ω' della γ' ed è l'asse dell'involuzione j' della γ', già indicata, il cui centro O' trovasi sulla retta a. E può affermarsi che:

Le due congruenze $L_{2,4}$, $L'_{2,4}$ sono coniugate ciascuna a se stessa in una omografia assiale armonica che ha gli assi nei piani delle coniche singolari delle due congruenze. Questi piani sono reciproci fra loro rispetto alla quadrica che contiene le coniche singolari ed i punti singolari isolati delle due congruenze.

Di più, dall'essere le t, t' coniugate nell'omografia assiale adesso accennata, si deduce che i due piani che esse determinano con la retta $T\,T'$, sono separati armonicamente dai piani ω, ω'.

Del pari sono coniugate nella H le rette k, k', sicchè le due quadriche $S_2 \equiv k\gamma\gamma'$ $S'_2 \equiv k'\gamma\gamma'$ sono separate armonicamente dalla superficie F_2 già indicata e dalla quadrica degenere $(\omega\omega')$ nel

fascio che ha per base le γ, γ', ciò che può dedursi anche dal fatto che a due a due le quadriche del fascio indicato sono coniugate nell'involuzione I determinata dalla rete R, e mentre le S_2, S_2' sono coniugate fra loro perchè nella I corrispondono alle rette fondamentali k' e k rispettivamente, invece la F_2 e la $(\omega\omega')$ sono coniugate ciascuna a se stessa.

3. *Ciascuna delle due congruenze $L_{2,4}$, $L'_{2,4}$ appartiene a due complessi tetraedrali aventi in comune le stelle (T), (T').*

Si consideri infatti il complesso tetraedrale Γ che ha per punti singolari i punti S, S_1, T, T' e che contiene il cono di raggi che proietta la γ da S'. Un qualunque cono della congruenza $L_{2,4}$ che ha per linea singolare la γ, appartiene per intero a tale complesso avendo in comune con esso i cinque raggi che passano per i punti S, S_1, S', T, T', sicchè la $L_{2,4}$ appartiene al complesso e questo contiene del pari il cono che da S_1' proietta la γ.

Analogamente la $L_{2,4}$ trovasi in un secondo complesso tetraedrale Γ' (coniugato al precedente nell'omografia assiale armonica H già ottenuta), i cui punti singolari sono S', S_1', T, T', e che contiene i due coni che da S, S_1 proiettano la γ.

Lo stesso dicasi per la $L'_{2,4}$.

Uno qualunque dei quattro complessi tetraedrali che con ciò si hanno, ha in comune, con il complesso di 3° grado costituito dalle generatrici delle quadriche della R, le quattro stelle di rette che esso contiene, i due sistemi piani rigati che hanno per sostegno i suoi piani singolari opposti a T ed a T' e la congruenza $L_{2,4}$ o la $L'_{2,4}$.

Ora, inversamente si ha che: *La congruenza costituita dalle generatrici dei coni di un complesso tetraedrale Γ aventi i vertici su di una conica γ che passi per due punti singolari T, T' del complesso, è del tipo ottenuto.*

Si noti infatti che se S, S_1 sono gli altri due punti singolari del complesso ed a, b sono le due rette secondo cui i piani singolari $\delta \equiv S S_1 T'$, $\varepsilon \equiv S S_1 T$ sono segati dal piano ω della γ e t, t' sono le due rette dei fasci $(T-\varepsilon)$, $(T'-\delta)$ seconde direttrici delle congruenze lineari del complesso Γ che hanno per prime direttrici le rette a, b dei fasci $(T'-\delta)$, $(T-\varepsilon)$, tutti i coni del complesso Γ che hanno i vertici nel piano ω sono tangenti alle rette t, t' nei punti T, T' rispettivamente. Perchè

essendo V un punto arbitrario di ω, nel piano tV i raggi del complesso Γ costituiscono due fasci di raggi aventi i centri l'uno in T l'altro sulla retta a, sicchè i due raggi di Γ situati nel piano tV ed uscenti da V coincidono nell'unico raggio VT comune ai precedenti due fasci, cioè il cono di Γ di vertice V tocca il piano Vt lungo la VT e perciò anche la t in T. Analogamente esso è tangente alla t' in T'.

Ne segue che presi ad arbitrio tre punti V_1, V_2, V_3 sulla conica γ, i coni del complesso aventi per vertici questi punti si segano, oltre che nei punti singolari S, S_1, T, T' dei quali i due ultimi contano ciascuno per due, in altri due punti S, S_1' sì fatti che i coni del complesso che li hanno per vertici, passano entrambi per i cinque punti V_1, V_2, V_3, T, T' della γ e quindi la contengono per intero, in modo che il cono del complesso che ha per vertice un qualunque altro punto della γ passa anche esso per S', S_1', cioè i coni le cui generatrici formano la congruenza $L_{2,4}$ che si considera, appartengono ad una medesima rete R. E siccome fra i coni in quistione quelli che hanno per vertici i punti di sezione K, K' della γ con la a, b (diversi da T' e T), si spezzano nelle due coppie di piani δ, $\delta' \equiv Kt$; ε, $\varepsilon' \equiv K't'$ in modo che ciascuna di queste coppie fa parte della rete R, perciò la congruenza che si esamina, è del tipo ottenuto.

4. Assegnata una conica γ ed un quadrilatero gobbo $SS'S_1S_1'$ i cui lati incontrino la precedente linea, ogni coppia di punti TT' della γ che appartenga all'involuzione di tale linea che contiene le due coppie dei punti di appoggio con i lati opposti del quadrilatero dato, vien proiettata da ogni punto V della γ secondo due rette che risultano coniugate nell'involuzione di raggi che contiene le tre coppie di rette di sezione del piano ω della γ con le tre coppie di faccie opposte dell'angolo quadrispigolo completo V (S, S', S_1, S_1'), sicchè le rette VT, VT' trovansi su di un cono di 2° ordine H_2 che passa per i punti S, S', S_1, S_1'.

Tenendo fissa la coppia TT' e facendo variare il punto V sulla γ, le generatrici del cono H_2 ora indicato descrivono una congruenza L, che fa parte evidentemente di due complessi tetraedrali (l'uno contenente le stelle (T), (T'), (S), (S_1) ed i coni che da S', S'_1 proiettano la γ, l'altro le stelle (T), (T'),

(S'), (S'_1) ed i coni che da S, S_1 proiettano la γ) e che perciò risulta del tipo che studiasi, cioè i coni H_2 che la formano toccano nei punti T, T' le rette che passano per questi punti e si appoggiano alle diagonali s, s' del quadrilatero dato.

E così, data una conica γ, una coppia di punti T, T' su tale linea e tre punti S, S_1, S' al di fuori del suo piano, di cui due S, S_1 siano proiettati dal terzo secondo rette appoggiate alla γ, le generatrici dei coni di 2° grado che hanno i vertici sulla γ e passano per i cinque punti dati, appartenendo ad un complesso tetraedrale (quello che contiene le stelle (T), (T'), (S), (S_1) ed il cono che da S' proietta la γ), formano una congruenza $L_{2,4}$ del tipo che si studia, essi cioè hanno in comune un altro punto e toccano in T e T' le stesse due rette; ecc., ecc. Di più si ha il teorema che:

Due coniche situate in piani distinti ed aventi in comune una coppia di punti fanno parte della curva nodale di ∞^3 *reti di quadriche i cui punti base diversi da quelli comuni alle coniche date, appartengono ad una quadrica passante per tali linee e si distribuiscono in coppie situate sui raggi di un complesso tetraedrale.*

Sia infatti F_2 la quadrica che contiene le coniche date γ, γ', e rispetto a cui i piani ω, ω' di tali linee sono fra loro reciproci. Pei due punti P, P' poli della retta $p \equiv \omega\,\omega'$ rispetto alle γ', γ (i quali punti risultano anche i poli dei piani ω, ω' rispetto alla F_2) si conducano due rette $a \equiv P'\,O$, $a' \equiv P\,O'$ che vadano a due punti O, O' della p separati armonicamente dai punti T, T' comuni alle γ, γ', e che perciò risultano fra di loro polari rispetto alla F_2: e di due rette s, s' polari fra loro rispetto alla F_2 ed appoggiate alle a, a' si considerino i punti di sezione S, S_1; S', S'_1 con la F_2.

Siccome nell'involuzione determinata su la γ dalle coppie di sezione con le due coppie di lati opposti del quadrilatero gobbo $S S' S_1 S_1'$ della F_2, l'asse è la retta a e perciò il centro è il punto O, ne segue che vi è una congruenza $L_{2,4}$ del tipo studiato che ha per linea singolare la γ e per punti singolari i punti S, S_1, S', S_1', T, T'. E la conica singolare dell'altra congruenza $L_{2,4}$ i cui coni appartengono alla stessa rete che contiene i coni della $L_{2,4}$, dovendo trovarsi sulla quadrica $F_2 \equiv \gamma\, S S_1\, S' S_1'$ e sul piano del fascio $(T T')$ reciproco al piano ω della γ rispetto alla F_2, coincide con la γ'.

D'altra parte col variare della coppia OO' armonica alla TT', la coppia di rette ss' descrive un complesso tetraedrale θ_2 (da ogni raggio del quale le coppie di punti singolari TT', PP' vengono proiettate secondo coppie di piani fra loro armoniche), perciò ne segue il teorema enunciato.

Assunta ad arbitrio una retta t della stella (T) le coppie di raggi ss' del complesso θ_2 composte ciascuna da rette polari rispetto alla F_2 appoggiate alla t, costituiscono (non tenendo conto del piano TPP') una S_3 gobba che ha per direttrici la t e la sua polare t_1 rispetto alla F_2 e che passa per T', sicchè le rette t' uscenti da questo punto ed appoggiate alle coppie ss' anzidette costituiscono un fascio di raggi $(T'\text{-}\pi')$. Se t' è un elemento arbitrario di tale fascio appoggiato alla coppia ss', quella rete di quadriche la cui curva nodale contiene le γ e γ' e che ha i suoi punti base (diversi da T, T') su le s, s', è costituita da superficie che nei punti T, T' toccano le rette t, t', sicchè queste (§ 2) sono separate armonicamente dai piani ω, ω', e quindi il piano π' del fascio anzidetto è il coniugato armonico rispetto ad ω, ω' del piano $\pi \equiv t\,T\,T'$, nè varia col variare della t in tale piano. E può affermarsi che:

Una qualunque delle ∞^3 reti di quadriche indicate nel teorema precedente, è completamente determinata quando si diano le tangenti alle sue superficie nei punti comuni alle coniche nodali, che siano due rette separate armonicamente dai piani di tali coniche.

Si noti ancora che assegnata ad arbitrio una retta k appoggiata a queste coniche nei punti K, K_1, essendo OO' una coppia di punti armonica alla TT' ed essendo K' e K_1' i secondi punti di sezione delle OK, $O'K_1$ con le γ, γ' rispettivamente, la retta $k' \equiv K'K_1'$ forma con queste coniche e con la k la linea nodale di una rete di quadriche i cui punti base (diversi da T, T') si trovano o sulle rette $s \equiv AA_1$, $s' \equiv A'A'_1$, o sulle rette $s_0 \equiv AA'$, $s_0' \equiv A'A_1$, avendo indicato con A, A', A_1, A_1' i punti diagonali dei quadrangoli completi $TT'KK'$, $TT'K_1K_1'$ diversi da O e da O' rispettivamente.

Ne segue che tenendo fissa la retta k e facendo variare la coppia OO', la retta k' descrive una schiera rigata ρ', e da una proprietà già dimostrata nel § 2 si deduce che la quadrica S_2' sostegno della schiera ρ' è coniugata armonica alla quadrica $S_2 \equiv \gamma\gamma' k$, rispetto alla superficie F_2 già indicata ed alla qua-

drica degenere $(\omega\omega')$, sicchè un qualunque raggio della schiera φ' forma linea nodale di una rete di quadriche con le γ, γ' e con un qualunque raggio della schiera rigata ρ della S_2 che contiene la k, come due raggi appartenenti alle schiere ρ_1, ρ_1' opposte alle ρ, ρ', formano analogamente con le γ, γ' la linea nodale di una rete di superficie di 2° ordine.

Può affermarsi perciò che:

Fra le schiere rigate che hanno per sostegno le quadriche di un fascio φ la cui linea base si scinda in due coniche γ, γ', viene ad aversi una corrispondenza involutoria tale che due raggi appartenenti a due schiere coniugate formano con le coniche γ, γ' la linea nodale di una rete R di quadriche. Nella corrispondenza a due schiere incidenti sono coniugate due schiere del pari incidenti.

E due quadriche S, S' del fascio φ che siano sostegno di schiere coniugate si corrispondono fra loro in ogni involuzione I dello spazio costituita da coppie di punti reciproci rispetto alle quadriche di una qualunque delle ∞^3 reti R del teorema precedente, sicchè due punti arbitrarii di tali quadriche sono reciproci fra loro rispetto alle quadriche di ∞^1 reti R del sistema.

5. In uno qualunque dei complessi tetraedrali Γ, Γ' che contengono la congruenza $L_{2,4}$, ogni congruenza lineare le cui direttrici passino rispettivamente per i punti singolari T, T', ha in comune con la $L_{2,4}$ una schiera rigata situata su una quadrica, la quale passa per la conica γ e contiene o i punti singolari S', S_1' del complesso Γ', o i punti singolari S, S_1 del complesso Γ secondo che la congruenza a cui la schiera è dovuta, appartiene a Γ o a Γ'. Ne segue che la congruenza $L_{2,4}$ ammette due sistemi ∞^1 Ξ e Ξ' di schiere rigate; del primo sistema fanno parte i coni che proiettano la γ dai punti S, S_1, dell'altro i coni che proiettano la stessa linea dai punti S', S_1'.

Le schiere rigate del sistema Ξ contengono ciascuna un raggio del fascio $(K-\delta)$ e un raggio del fascio $(K'-\varepsilon)$, mentre le schiere del sistema Ξ' contengono ognuna un raggio del fascio $(K-\delta')$ ed uno del fascio $(K'-\varepsilon')$, continuando a designare con K e K' i punti di appoggio delle $k\equiv\delta\delta'$, $k'\equiv\varepsilon\varepsilon'$ alla γ.

Due schiere del medesimo sistema non hanno alcun raggio in comune, perchè le due congruenze lineari di Γ (o di Γ') a cui sono dovute, non hanno oltre la retta TT' e la s (o la s')

alcun' altra retta in comune; invece due schiere di sistemi diversi hanno in comune un raggio: quello comune ai due piani π, π' contenenti rispettivamente l'uno le direttrici d, d_1 uscenti da T, l'altro le direttrici d', d_1', uscenti da T' delle congruenze lineari di Γ e di Γ' a cui le due schiere sono dovute, e ciò perchè questo raggio r essendo comune ai complessi Γ, Γ' senza appartenere alle stelle (T), (T') si trova nella congruenza $L_{2,4}$ e perciò nelle due schiere considerate in questa.

E notando che tale raggio r è l'unico raggio giacente in π (o in π') e non uscente da T (o da T') e che la corrispondenza che intercede fra le rette d, d' dei fasci $(T-\varepsilon)$, $(T'-\delta)$ [o fra le rette d_1, d_1' dei fasci $(T-\delta')$, $(T'-\varepsilon')$] direttrici di congruenze lineari del complesso Γ (o del complesso Γ') è proiettiva, ed in essa alle t, t' corrispondono rispettivamente le $T'K$, TK' (o le $T'K'$, TK) si deduce che:

Proiettando i singoli raggi della congruenza $L_{2,4}$ *dai suoi punti singolari* T, T', *la corrispondenza che viene ad aversi fra le stelle* (T), (T'), *riguardando come corrispondenti due piani delle due stelle che proiettino un medesimo raggio della congruenza, è birazionale e quadratica.*

Il piano $\omega \equiv TT'KK'$ della γ è fondamentale per tale corrispondenza in entrambe le stelle ed è coordinato a sè stesso, mentre le altre due coppie di piani fondamentali coordinati sono le $\varepsilon\,\delta$, $\delta'\,\varepsilon'$.

Viceversa: *data una corrispondenza birazionale quadratica fra due stelle di piani non sovrapposte* (T), (T'), *nella quale due piani fondamentali coordinati fra loro, coincidano in un unico* ω, *le rette di sezione dei piani corrispondenti delle due stelle costituiscono una congruenza del tipo che studiasi.*

Infatti la proiettività che la corrispondenza data χ determina fra i fasci $(T\text{-}\omega)$, $(T'\text{-}\omega)$, genera una conica γ, di cui ogni punto è vertice di un cono di 2° ordine le cui generatrici appartengono alla congruenza L in questione. E tale cono passa, oltre che per i punti T, T', per le due coppie di punti uniti delle due proiettività che sulle rette comuni alle altre due coppie di piani fondamentali coordinati della χ vengono ad ottenersi come sezioni delle coppie dei fasci di raggi corrispondenti nella χ situati in tali piani, sicchè la L è del tipo ottenuto.

6. La congruenza $L_{2,4}$ può essere facilmente rappresentata su di un piano σ. Basta riferire con una correlazione X tale

piano σ ad una delle stelle (T), (T'), per es. alla (T), e riguardare come corrispondente ad un punto arbitrario P di σ quell'unico raggio r della congruenza non uscente da T che trovasi nel piano π della stella (T) corrispondente di P nella X.

Sono eccezionali per la corrispondenza i punti D, E, O del piano σ che nella X corrispondono ai piani singolari δ', ε, ω della $L_{2,4}$, risultando essi rispettivamente l'immagine dei tre fasci di raggi $(K\text{-}\delta')$, $(K'\text{-}\varepsilon)$, $(T'\text{-}\omega)$ della $L_{2,4}$.

I coni della congruenza aventi i vertici sulla γ sono rappresentati dalle rette del fascio (O); le schiere rigate del sistema Ξ dai raggi del fascio (E), e quelle del sistema Ξ' dai raggi del fascio (D).

Di più, siccome in ogni piano passante per la t due raggi della $L_{2,4}$ coincidono in un raggio del fascio $(T\text{-}\omega)$, perciò questo ha per immagine su σ la retta DE che nella X corrisponde alla t.

È egualmente agevole riconoscere che i due fasci $(K\text{-}\delta)$, $(K'\text{-}\varepsilon')$ sono rappresentati dalle rette $D\,O$, $E\,O$.

Ogni retta del piano σ è la immagine di una superficie gobba di 3° grado avente per direttrice doppia una retta della stella (T), sicchè una qualunque superficie $S_6 \equiv (\gamma\, S\, S_1\, S'S_1')^2\, (T\, T')^3$ costituita dai raggi che la congruenza ha in comune con un complesso lineare, ha per immagine sul piano di rappresentazione σ una $C_3 \equiv D\,E\,O$.

Ne segue che il rango della $L_{2,4}$ (numero delle coppie di raggi della congruenza appartenenti ad un medesimo fascio con una retta arbitraria) è 2.

7. Una qualunque trasformazione quadratica Θ dello spazio che abbia per elementi fondamentali nell'un sistema la conica γ ed un punto arbitrario O, e nell'altro sistema una conica γ^* ed un punto O^*, facendo corrispondere ad ogni retta del primo sistema appoggiata alla γ, una retta del secondo sistema appoggiata alla γ^*, muta la congruenza $L_{2,4}$ in una congruenza $L^*_{2,4}$ di egual tipo, la quale ammette come elementi singolari la γ^* ed i sei punti che corrispondono nella Θ ai quattro punti singolari isolati della $L_{2,4}$ ed ai due raggi di questa congruenza che escono dal punto fondamentale O della Θ.

Ma se questo punto O coincide con uno dei quattro punti S, S_1, S', S_1' per es. con S, alle schiere rigate della $L_{2,4}$ le cui quadriche sostegno passano per i punti S, S_1, vengono a corri-

spondere nella Θ fasci di raggi aventi per centri i singoli punti della conica fondamentale γ^* e situati nei piani di un cono inviluppo di 2ª classe I_2, di cui è vertice il punto S_1^* che nella Θ corrisponde ad S_1, sicchè la congruenza L^* che nella Θ corrisponde alla L essendo costituita dai fasci anzidetti, risulta di 2° ordine e di 2ª classe, e la sua superficie focale riguardata come superficie di punti è il cono di raggi Φ_2 aderente ad I, superficie che ha due contatti con la γ dovuti ai due piani che nella Θ corrispondono ai coni della $L_{2,4}$ che da S', S_1' proiettano la γ.

Corrispondentemente la superficie focale della congruenza $L_{2,4}$ che corrisponde nella Θ al cono Φ_2, è una $\Phi_4 \equiv (\gamma\, S S_1\, S' S_1')^2$ che contiene i lati del quadrilatero $S S' S_1 S_1'$ ed ammette per piani tangenti doppii i piani $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ (1).

Questa superficie Φ_4 è superficie focale, oltre che della congruenza $L_{2,4}$, di una seconda congruenza di egual tipo $M_{2,4}$, che corrisponde nella Θ alla congruenza $M_{2,2}^*$ che con la $L_{2,2}^*$ forma il completo sistema delle tangenti al cono Φ_2 appoggiate alla γ^*. I coni della $M_{2,4}$, che hanno i vertici sulla γ, passano per i punti K, K', S, S_1, S', S_1' e nei primi due toccano le rette $k \equiv \delta\delta'$ $k' \equiv \varepsilon\varepsilon'$, e fra di essi quelli che hanno i vertici in T e T', si spezzano nelle coppie di piani $\delta\varepsilon$, $\delta'\varepsilon'$.

E notando che i due piani sostegni dei fasci di raggi delle congruenze L^*, M^* che hanno per centro un punto arbitrario A della γ^*, segano, oltre che in A, questa linea in due punti che corrispondono ad A in due proiettività Π, Π^{-1} della γ^* inverse l'una dell'altra, sicchè ogni omologia armonica che abbia il centro su la corda di contatto del cono Φ_2 con la γ^* e per piano assiale il piano polare del precedente punto rispetto a Φ_2, fa corrispondere l'una all'altra le congruenze L^*, M^*, perciò prendendo egualmente in considerazione invece della Θ una trasformazione quadratica Θ' dello spazio che ammetta nell'un sistema per elementi fondamentali la conica γ ed uno dei punti S', S'_1, può affermarsi che:

I due sistemi ∞^1 Σ e Σ' di trasformazioni quadratiche invo-

---

(1) È la ben nota superficie di 4° ordine e di 4ª classe, che se la conica γ *è l'assoluto* risulta la *ciclide di Dupin*. Vegg. per essa i recenti lavori sulle superficie di 4° ordine a conica doppia del LORIA (*Memorie della R. Accademia di Torino*, Serie 2ª, Tomo 36, § 71 e 72) e del SEGRE (*Math. Annalen*. Bd. 24, n° 116).

lutorie di 1ª specie (1) aventi in comune la conica fondamentale γ, che mutano la superficie Φ_4 in se stessa (2), costituito il primo da involuzioni in cui si corrispondono i punti S ed S_1, l'altro da involuzioni in cui sono coniugati i punti S' ed S_1', fanno corrispondere l'una all'altra le due congruenze $L_{2,4}$, $M_{2,4}$.

Invece l'altra trasformazione quadratica, involutoria e di 1ª specie che muta la Φ_4 in se stessa, la quale trasformazione I ammette per linea fondamentale la γ, per superficie punteggiata unita la $F_2 \equiv \gamma S S' S_1 S_1'$ dei paragrafi precedenti e per punto fondamentale il vertice del cono di Kummer della Φ_4 che è il punto P del § 4, muta ciascuna delle congruenze $L_{2,4}$, $M_{2,4}$ in se stessa, corrispondendo nella Θ all'omologia armonica che ammette per piano assiale il piano che passa pel vertice del cono Φ_2 e per la corda di contatto di questo cono con la γ^*, e per centro il polo di tale corda rispetto alla γ^*.

Le quadriche punteggiate unite delle trasformazioni del sistema Σ (o di quelle del sistema Σ') costituiscono il fascio φ (o φ') determinato dai coni che proiettano la γ da S, S_1 (o da S', S_1').

Continuando a designare con A ed A' le traccie delle rette $s \equiv S S_1$, $s' \equiv S' S_1'$ sul piano ω della γ (punti che trovansi sull'asse a della omografia H del § 2) e con A_1, A_1' i coniugati armonici dei precedenti punti rispetto alle coppie $S S_1$, $S' S_1'$ rispettivamente (punti che trovansi sull'altro asse a' della H, asse che contiene anche (§ 4) il vertice P del cono di Kummer della Φ_4) si ha che i piani α, α' delle coniche $\delta \equiv S' S_1'$, $\delta' \equiv S S_1$ che con la γ formano la base dei fasci φ, φ' ora indicati, passano rispettivamente il primo per A_1 ed il secondo per A_1', sicchè si segnano secondo la retta $a' \equiv A_1 A_1' P$.

---

(1) Le trasformazioni quadratiche involutorie dello spazio saranno dette di 1ª o di 2ª specie a seconda che le rette che escono dal punto fondamentale della trasformazione, corrispondono ciascuna a sè stessa, o sono a due a due fra loro coniugate.

(2) Per tali sistemi veggasi Segre, Memoria e § citato. Si noti anche che lo studio delle due congruenze $L_{2,4}$, $M_{2,4}$ potrebbe assai agevolmente essere dedotto dalle note proprietà della varietà cubica Γ dello spazio a quattro dimensioni, dotata di conica doppia k_2 e di due punti doppi (varietà studiata dal Segre nel § 39 della sua Nota: *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni ecc.* Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, Serie II, tom. 39º), potendo le $L_{2,4}$, $M_{2,4}$ essere riguardate come le proiezioni dei due sistemi di rette (1, 4) della Γ che si appoggiano alla k_2.

Di più del fatto che nella involuzione I sono uniti i punti S, S_1, S', S_1' e quindi anche i coni che da essi proiettano la conica γ, si deduce che le due coniche δ, δ' sono unite nella I, e che perciò rispetto ad esse il punto P ha per polari le s', s.

Analogamente essendo unite nelle singole trasformazioni del sistema Σ (o di Σ') i punti S', S_1' (o S, S_1) ne segue che sono anche uniti in esse i coni che da tali punti proiettano la γ e quindi risulta anche unita la δ' (o la δ).

Nella I sono anche unite le singole quadriche dei fasci φ, φ', sicchè la I è commutabile con le singole trasformazioni dei sistemi Σ, Σ'. Combinate con esse dà per prodotto due sistemi $I\Sigma$, $I\Sigma'$ ∞^1 di trasformazioni quadratiche involutorie di 2^a specie (tutte aventi per conica fondamentale la γ) le quali mutano l'una nell'altra le $L_{2,4}$ $M_{2,4}$.

In una qualunque corrispondenza del sistema $I\Sigma$ (o del sistema $I\Sigma'$) la conica punteggiata unita trovasi sulla quadrica F_2 e contiene i punti uniti S', S_1' (o i punti S, S_1). Invece nella corrispondenza risultano coniugati i punti S, S_1 (o S', S_1') ed è unita la conica δ' (o la δ), sicchè i due suoi punti uniti isolati trovansi su la δ' (o su la δ) e sono allineati col punto P, ed il suo punto fondamentale trovasi su la s' (o su la s).

Si noti ancora che a due a due le trasformazioni del sistema Σ (o del sistema Σ') sono fra loro commutabili e due di siffatte trasformazioni danno costantemente per prodotto la corrispondenza quadratica involutoria di 2^a specie X (o X') che ammette per conica fondamentale la γ, per punti uniti isolati i punti S, S_1 (o i punti S', S_1') e per conica punteggiata unita la δ (o la δ'). Tanto la X come la X' mutano ciascuna delle $L_{2,4}$, $M_{2,4}$ in se stessa.

Del pari sono fra loro commutabili una qualunque trasformazione T del sistema Σ ed una trasformazione arbitraria T' del sistema Σ'. Il loro prodotto è una involuzione quadratica di 2^a specie (avente per conica fondamentale la γ) che fa corrispondere ciascuna delle $L_{2,4}$, $M_{2,4}$ a se stessa, essendo coniugati in essa i punti S ed S_1, S' ed S_1'.

La sua conica punteggiata unita u_2 forma con la γ la sezione delle superficie punteggiate unite U_2, U'_2 delle T, T', e perciò si appoggia alle γ, δ, δ' a ciascuna in due punti.

Ed essendo le U_2, U_2' entrambe unite nell'involuzione I, è del pari unita nella I la conica u_2, sicchè tale linea trovasi in un piano passante pel punto P.

Di più essendo unita nelle T, T' la quadrica F_2, risultano punti uniti isolati del prodotto TT' i due punti L, L' di sezione della F_2 con la congiungente i due punti fondamentali delle T, T', dei quali punti fondamentali il primo trovasi sulla s, l'altro sulla s' (1), sicchè il punto fondamentale della TT' che è il coniugato armonico della traccia della retta LL' sul piano ω della γ, rispetto ad L, L', trovasi sulla superficie $\Omega_3 \equiv (SS_1S'S_1')^2 \alpha\gamma$ che è coniugata al piano ω nella trasformazione involutoria di 3° grado dello spazio avente per superficie punteggiata unita la quadrica F_2 e per elementi fondamentali le rette s, s' di cui ciascuna è coniugata ad ogni punto dell'altra, i lati del quadrangolo $SS'S_1S_1'$ coniugati ciascuno a se stesso, ed i punti S, S', S_1, S_1' ognuno dei quali ha per corrispondente il piano dei due lati del quadrangolo anzidetto che concorrono in esso.

Col variare della T in Σ e della T' in Σ' si ha un sistema ∞^2 Ψ di trasformazioni quadratiche involutorie di 2ª specie che mutano ciascuna delle congruenze $L_{2,4}$, $M_{2,4}$ in se stessa.

E siccome quella corrispondenza di Σ (o di Σ') che ha il punto fondamentale in ω riducesi all'omologia armonica (A-α) (o (A'-α')), perciò fra le corrispondenze del sistema Ψ vi è l'omografia assiale armonica H che è il prodotto delle due omologie accennate.

Si noti ancora che a due a due le trasformazioni del sistema Ψ sono fra loro commutabili, e due trasformazioni sì fatte danno per prodotto la I, sicchè oltre le corrispondenze ottenute non vi sono altre trasformazioni involutorie quadratiche che mutano in se stesso il sistema delle due congruenze $L_{2,4}$, $M_{2,4}$.

Perciò riassumendo può affermarsi che:

Ogni congruenza del tipo studiato in questa Nota corrisponde a se stessa in un'omografia assiale armonica, in una trasformazione quadratica ed involutoria di 1ª specie, in due trasformazioni quadratiche ed involutorie di 2ª specie che ammettono ciascuna per punti uniti isolati una coppia di punti singolari isolati della congruenza, ed in ∞^2 trasformazioni quadratiche ed involutorie di 2ª specie rispetto alle quali entrambe le coppie di punti singolari isolati della congruenza sono costituite da punti coniugati.

---

(1) Su le due coniche di sezione della quadrica F_2 con i piani sLL', $s'LL'$ i due gruppi SS_1LL', $S'S_1'LL'$ sono armonici, e quindi i punti L, L' sono coniugati fra loro tanto nella involuzione X, come nella X'.

RELAZIONE intorno alla Memoria del Dott. E. GIGLIO-TOS intitolata: *Ditteri del Messico - Stratiomyidae, Syrphidae* (Parte I).

Il compianto Prof. Luigi BELLARDI lasciava morendo al Museo Zoologico di Torino una ricchissima collezione di Ditteri Europei ed esotici. Fra questi ultimi sono particolarmente importanti i Ditteri del Messico intorno ai quali il BELLARDI stesso pubblicò nel 1859, nel 1861 e nel 1862 tre Memorie che vennero stampate nei volumi della nostra Accademia. Il BELLARDI lasciò come è noto ben presto lo studio dei Ditteri per quello dei Molluschi terziarii. Ma egli tuttavia non trascurò mai le occasioni di arricchire la propria raccolta di Ditteri, di guisa che il materiale che essa oggi contiene è molto notevole.

Il Dottore E. GIGLIO-TOS intraprese lo studio ed il riordinamento della collezione dei Ditteri del BELLARDI e nella Memoria affidata al nostro esame espone il risultato dei suoi studi sulle famiglie *Stratiomyidae* e *Syrphidae* del Messico. Numerose sono le specie nuove descritte, numerosissime le identificazioni sinonimiche fra specie descritte da altri Autori. Le descrizioni sono fatte con diligenza e sopratutto sono simmetriche e facilmente comparabili fra loro, pregi che non di rado mancano disgraziatamente in molti lavori faunistici di simile natura.

I vostri commissari credono che la Memoria del Dottor GIGLIO-TOS sia un buon contributo alla conoscenza dei Ditteri in generale e in particolar modo della interessantissima fauna Messicana e perciò ne propongono la lettura alla Classe, e qualora questa la approvi, la stampa nei volumi Accademici.

Tommaso SALVADORI.
L. CAMERANO, *Relatore*.

RELAZIONE intorno alla Memoria del Prof. Angelo BATTELLI *Sulle proprietà termiche del vapor d'acqua.*

Nei volumi XL, XLI, XLII di quest'Accademia vennero inserite le prime tre parti dello studio del Prof. BATTELLI sulle proprietà termiche dei vapori. La Memoria affidata al nostro esame forma la quarta parte di quello studio. L'Autore seguì lo stesso metodo usato per l'etere e per il solfuro di carbonio e si servì anche degli stessi apparecchi. Egli discusse l'esperienze come fece per gli altri due liquidi e stabilì entro limiti molto estesi come si comporti il vapor d'acqua rispetto alle leggi del BOYLE e del GAY-LUSSAC.

Vista l'importanza del lavoro, che nel caso del vapor d'acqua s'estende anche alla pratica, visto che in questa Memoria sono continuati gli studi dello stesso Autore già accolti nei volumi dell'Accademia, noi proponiamo la lettura della Memoria alla Classe.

G. FERRARIS.

A. NACCARI, *Relatore.*

RELAZIONE sulla Memoria del Dott. G. B. RIZZO intitolata: *Il Clima di Torino.*

La serie delle osservazioni meteorologiche fatte in Torino comincia nel 1753. Fu il conte Ignazio SOMIS, Professore di Medicina all'Università e Membro di questa Accademia, che le iniziò e le proseguì regolarmente per molti anni.

Nell'anno 1787 l'Accademia stessa assunse la direzione delle osservazioni meteorologiche ed è da quell'anno che cominciano le osservazioni, sulle quali si può fare qualche assegnamento per un confronto con le osservazioni recenti.

Gli strumenti stavano dapprima in una finestra della Biblioteca, poi furono collocati sulla specola. Era direttore di questa il VASSALLI-EANDI, che in alcuni suoi scritti riassunse una parte di quelle osservazioni. Dopo la morte di lui le osservazioni furono regolarmente continuate nell' Accademia fino al 1865, in cui l'Osservatorio meteorologico fu unito all'astronomico nel Palazzo Madama.

Il RIZZO si propose di utilizzare questa numerosa serie di dati : 1° per studiare il medio andamento giornaliero della temperatura, della pressione, della tensione del vapore e dell'umidità relativa in ciascun mese dell'anno; 2° per fare lo stesso studio per l'andamento annuale; 3° per esaminare se dalla intera serie delle osservazioni risulti l'indizio di qualche mutamento nelle condizioni meteorologiche di Torino. Per le variazioni diurne il Dottore RIZZO si valse soltanto delle indicazioni date dagli strumenti registratori nel periodo 1871-1890. Egli calcolò la media dei valori termometrici e barometrici spettanti ad una delle 24 ore del giorno in un dato mese. Così fece per tutto il ventennio, poi dei venti valori trovati prese la media. Ripetè il calcolo per gli altri mesi: poi fece lo stesso per le altre ore del giorno. Con le 24 medie così ottenute per un dato mese applicando il metodo dei minimi quadrati egli dedusse le costanti di una formola di BESSEL, atta a rappresentare con sufficiente

approssimazione l'andamento della temperatura o della pressione in un giorno. Fu confermato da questo studio il fatto, cui il Wild non aveva voluto prestar fede e che egli aveva attribuito ad errore, che cioè la massima temperatura del giorno si ha a Torino più tardi di quello che avvenga in generale altrove, vale a dire fra le tre e le quattro e più tardi in estate che in inverno. Per l'umidità atmosferica furono utilizzate le osservazioni fatte dal 1866 fino ad oggi.

Per lo studio dell'andamento annuale il Dottore Rizzo si valse delle osservazioni fatte dal 1866 al 1890. Per ogni giorno calcolò la media degli elementi meteorici e ne cercò il valor medio per ciascuna delle 73 pentadi di un anno. Prendendo per ogni pentade la media dei valori trovati in tutto il periodo, egli ottenne i valori che gli servirono al calcolo delle costanti delle formule periodiche. Fra i risultati notevoli ricordiamo i seguenti: la temperatura media annuale è 11°,73, la pressione barometrica media annuale è 737,09, la media umidità relativa è 71,35, i giorni piovosi dell'anno sono in media 106, la media annuale dell'altezza della pioggia è mill. 835.5. La massima temperatura secondo l'andamento medio cade nella quarta pentade di Luglio, la minima nella quarta pentade di Gennaio. La pressione ha due massimi, l'uno in Febbraio, l'altro in Settembre, e due minimi l'uno in Marzo, l'altro in Dicembre. L'umidità relativa ha un minimo in Luglio, un massimo in Dicembre. La pioggia ha un andamento molto complesso, che è rappresentato graficamente e nelle tabelle, ma non algebricamente: v'è un massimo molto elevato in Aprile.

Prendendo tutta la serie delle osservazioni dal 1787 al 1890 il Rizzo indagò quali variazioni avvengano d'anno in anno. Su una tavola stanno i valori medi ed estremi della pressione e della temperatura per ogni anno e le indicazioni relative alla pioggia ed all'aspetto del cielo.

Da questo prospetto appare come la pressione e la temperatura variino entro limiti molto discosti. La media escursione annua della pressione è di 36 mill. e nel periodo intero 1787-1890 i valori estremi furono 757,8 nel Gennaio 1884 e 709,8 nel Febbraio 1879. Più notevole ancora è la variazione della temperatura. L'escursione media annuale è di 43°, ma nel 1864 s'ebbe la minima di 17°.6 sotto zero e nel 1861 la massima di 37,4.

L'esame di tutte queste osservazioni dimostra che le condizioni meteorologiche di Torino non sono mutate in modo sensibile da quelle che erano un secolo fa. Dal 1830 al 1860 appare un aumento nella temperatura, nella pressione e nella quantità di pioggia, ma poi si manifesta una diminuzione d'eguale grandezza.

La Memoria del Rizzo, che richiese un lungo lavoro per le riduzioni e le correzioni delle osservazioni antiche fatte con istrumenti graduati diversamente da quelli che si usano oggidì e per le interpolazioni richieste dai confronti, è condotta con grande accuratezza. Essa ci pare un lodevole esempio di quegli studi meteorologici, che, utilizzando un gran numero di osservazioni potrebbero quando fossero più frequenti, guidare ad importanti conclusioni climatologiche. La Memoria ha poi speciale importanza per la nostra Accademia perchè vi si discutono le osservazioni eseguite per lunga serie d'anni per cura della Accademia medesima. Per tali ragioni noi vi proponiamo la lettura di questa Memoria

G. Ferraris.

A. Naccari, *Relatore.*

L'Accademico Segretario
Giuseppe Basso.

ADUNANZE DELLE CLASSI UNITE

Nell'anno accademico 1891-92 l'Accademia tenne parecchie adunanze a Classi Unite. In quella del 20 dicembre 1891 fu letta la relazione della seconda Giunta per il conferimento del settimo premio Bressa (vedi *Atti*, pag. 231-235). Nell'adunanza del 27 dicembre successivo, l'Accademia conferì questo premio al professore Enrico Hertz dell'Università di Bonn, ed in quella del 3 aprile 1892 riconfermò nell'ufficio triennale di tesoriere, il socio Giuseppe Bruno. Tale elezione fu approvata da Regio decreto del 10 aprile.

Il 26 giugno 1892, l'Accademia chiuse i proprii lavori inaugurando un busto al compianto suo Presidente, Senatore professore Angelo Genocchi.

Il busto, opera lodata dello scultore cav. Giacomo Ginotti, fu collocato nell'atrio del palazzo dell'Accademia. Vi è apposta la seguente iscrizione dettata dal Socio Francesco Siacci:

ANGELO GENOCCHI

PRESIDENTE DELLA R. ACCADEMIA
DAL MDCCCLXXXV AL MDCCCLXXXIX

NELLA NATIA PIACENZA
INSEGNÒ DIRITTO ROMANO
POI IN QUESTA UNIVERSITÀ
ANALISI INFINITESIMALE
LÀ PRECLARO GIURISTA
QUI MATEMATICO SOMMO

QUI TRASSE IN TEMPI DIFFICILI
CERCANDO LIBERTÀ
QUI VISSE
VIVRÀ QUANTO LA SCIENZA IL SUO NOME
MDCCCXVII-MDCCCLXXXIX

Erano presenti alla cerimonia inaugurale parecchi Senatori e Deputati al Parlamento Nazionale, il Prefetto della provincia di Torino, i Presidenti dei Consigli Provinciali di Torino e di Piacenza, i Sindaci di queste due città, il Procuratore Generale presso la Corte di Cassazione, il Rettore e i Presidi delle Facoltà della R. Università, professori della Università, direttori e professori di altri istituti d'istruzione superiore, quasi tutti gli Accademici ed un eletto stuolo di Signore. S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione aveva delegato il Presidente dell'Accademia a rappresentarlo.

Si associarono inoltre alle onoranze i Presidenti del Senato del Regno e della Camera dei Deputati, il R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, la Società Italiana delle Scienze detta dei XL, i quali due istituti erano rappresentati dal socio prof. Enrico D'Ovidio, la R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, la R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti del Belgio, le RR. Università di Roma e Bologna, Autorità civili e militari e Soci non residenti, stranieri e corrispondenti dell'Accademia.

Il Presidente dell'Accademia, prof. Michele Lessona, aprì la funzione pronunciando le seguenti parole:

« Compio un dovere graditissimo assegnatomi dai miei colleghi, ringraziando gli illustri personaggi e tutte quelle cortesi persone che vollero accogliere il nostro invito. Ringrazio in particolar modo della loro venuta il Sindaco e il Presidente del Consiglio provinciale della città di Piacenza, città che ha tanta parte in questa funzione. Ringrazio i lontani che vollero esprimere il loro rincrescimento del non aver potuto venire, il Ministro della Pubblica Istruzione che mi onora dello incarico di rappresentarlo, il Presidente del Senato, il Presidente della Camera dei Deputati, i rettori di parecchie Università, molti colleghi insigni d'Italia e di fuori, i quali tutti vogliono col pensiero essere oggi in questa sala.

« In questa sala da oltre a cento anni si radunano assiduamente uomini differenti fra loro per varî rispetti, differenti per indole, differenti per studî, differenti per idee politiche e sociali, differenti per nascita, figli alcuni di famiglie patrizie eminenti, altri di poveri popolani. Questi uomini per tanti rispetti divergenti qui sono tutti concordi in un solo intento, tutti pari nello adoperarsi per la conoscenza del vero.

« Molte ore furono passate qui in questo nobile intento, mentre fuori imperversava scatenata la furia delle passioni umane.

« L'uomo arrivato alla vecchiaia, chiusogli l'avvenire, volge lo sguardo al passato, irresistibilmente, concitatamente, affannosamente.

« Soltanto il vecchio può comprendere in tutta la sua terribile verità il lamento di Francesco Petrarca:

Io vo piangendo i miei passati tempi...

« Il vecchio ripensa alle ore che ha speso senza fare tante cose che avrebbe potuto fare e alle ore che ha speso nel fare tante cose che avrebbe potuto non fare.

« Le ore passate qui sono oasi piacevolissime nel deserto turbinoso della rimembranza.

« Tutti qui si adoperarono con pari buon volere, ognuno secondo le sue forze.

« Le forze di taluni furono così poderose che l'opera loro rimane indelebile nella storia intellettuale dell'umanità.

« Uno di questi valorosi è scomparso. Qual uomo egli sia stato vi dirà il mio collega D'Ovidio che io prego di prendere la parola. »

Indi il socio Enrico D'Ovidio lesse il seguente discorso:

Signore e Signori,

Il poeta prediletto dall'uomo insigne, in onore del quale siamo oggi qui adunati, scrisse:

Virtù viva spregiam, lodiamo estinta.

Ma questa sentenza non trova applicazione nel caso di Angelo Genocchi; poichè le sue virtù furon sempre dall'universale riconosciute. Tanto meglio per lui, tanto meglio per noi; chè egli non ebbe l'animo contristato da gravi ingiustizie patite, nè noi abbiam rimorsi da placare. Tanto meglio, se le lodi, che a me tocca oggi dire di lui, non saranno se non l'eco di quelle che a lui vivente furono tributate. Tanto meglio, se l'inaugurazione, che oggi celebriamo, di un ricordo marmoreo del rimpianto Presidente di quest'Accademia, segna l'adempimento di un voto fatto all'indomani della sua morte; voto, che nessun ostacolo ebbe a vincere, anzi fu favorito in ogni guisa dai dotti d'Italia

e fuori. Lo stesso indugio, che da circostanze esteriori venne a questa cerimonia, vale a dimostrare almeno che non vi era pericolo nell'attendere, che il nome del GENOCCHI non aveva a temer l'oblio per molti anni.

E basterebbe scoprire il busto del già nostro Presidente, per dir compiuta la solennità; tanto son noti l'eminente valore scientifico, l'integerrimo carattere e le civili virtù di lui. Ma volle l'Accademia che una voce sorgesse in quest'aula a commemorare l'uomo e lo scienziato; ed io, cui venne affidato sì onorevole còmpito, lo farò di gran cuore, se non degnamente.

I.

ANGELO GENOCCHI nacque in Piacenza il 5 Marzo 1817. Ivi percorse tutti gli ordini di studî, e fu veramente *puer aureus*, facendosi sempre notare per vigore d'ingegno e per amore di apprendere; ivi si laureò in leggi l'anno 1838 presso la Facoltà giuridica, la sola colà esistente e che da Parma eravi stata trasferita in seguito dei moti politici del 1831; ivi esercitò l'avvocatura; ed ivi ebbe la cattedra di Diritto romano, nel 1845 come sostituito, nel 1846 come titolare.

Come avvocato, non potè aver parte in dibattimenti importanti; poichè agli esordienti non era concesso se non il patrocinio gratuito in qualche causa penale, ovvero in qualche causa civile innanzi ai Pretori. Pure assisteva con diligenza alle pubbliche udienze, e molto studiava la Giurisprudenza; ed insieme a due suoi amici e colleghi (1) soleva adunarsi a discuter quistioni giuridiche proposte or dall'uno or dall'altro. E fu appunto in virtù della grande stima che si era acquistata appo la Magistratura ed il Foro, che, non richiedente, anzi repugnante, venne nominato professore di Diritto. Non va taciuto che non piacque immediatamente agli studenti, per la severità del suo contegno e la freddezza della parola.

Ma eccoci a un momento decisivo nella vita e nella carriera del GENOCCHI. Fu la politica che lo determinò.

Nato io quando spuntavano appena i primi albori del risorgimento nazionale, avendo passato la fanciullezza sotto l'assolu-

(1) Carlo GIARELLI e Pietro AGNELLI.

tismo borbonico, ancora in tempo per comprendere quanto miserabile fosse l'Italia serva e divisa in piccoli stati, ma troppo tardi per poter prender parte coll'azione ai memorabili fatti che la condussero alla sospirata indipendenza, io ho sempre invidiato gli uomini della generazione precedente la mia, poichè la loro gioventù fu nobilitata dalle grandi emozioni delle cospirazioni per abbattere la tirannide, dei combattimenti per l'indipendenza della patria, del solenne trionfo dell'unità nazionale. Come è monotona, grigia, la vita dei giovani di oggi a petto di quella! Forse è perchè non splende innanzi ad essi un grande ideale, che i nostri giovani si perdono talora dietro a picciole cose e vane parvenze.

Uno di quegli uomini fortunati fu il GENOCCHI. Egli non era ancora trentenne, quando tutta Italia fu scossa ed esaltata dalla fatidica invocazione: « Benedite, gran Dio, l'Italia ». Mente eletta, nudrita di forti studi classici, indole insofferente di giogo, cuore sensibile, il GENOCCHI non poteva rimanere estraneo ai moti patriottici, anzi vi si mischiò con ardore.

« Prima del 1848 (1) e sin da quando Maria Luigia d'Austria
« chiamò i Gesuiti a Piacenza, si formò ivi e si accentuò un
« partito per combattere i clericali austriacanti, stati sempre
« potenti ed allora resi più audaci e persecutori. Il partito ri-
« conosceva per capo l'avvocato Pietro GIOIA (che fu poi Senatore
« e Ministro della pubblica istruzione); vi cooperarono non pochi
« del Foro; vi si unì qualche nobile; nè vi mancò qualche
« prete. La lotta fu viva e costante, e si fece più gagliarda
« quando dal vicino Piemonte vennero speranze di prossima ri-
« scossa; il perchè la maggioranza del partito era di monarchici
« costituzionali. Però non vi mancavano uomini di idee repubbli-
« cane, e principale fra essi era il professore di matematica Fran-
« cesco BUCCELLA, e molto caldo il nostro GENOCCHI. Scoppiata nel
« marzo dell'anno 1848 la rivoluzione dei Lombardi, e sgombrata
« Piacenza dagli Austriaci, gli uomini di parte moderata (che rap-
« presentavano l'opinione della grande maggioranza dei cittadini,
« ed eran molto intransigenti) ne assunsero il governo provvisorio,
« e principal loro pensiero ed opera fu la immediata annessione
« della città e provincia al Piemonte. Ma ogni cosa allora finì

(1) Così scrive l'egregio Magistrato Comm. Pietro AGNELLI, amico e compagno di studi del GENOCCHI.

« presto. Gli Austriaci, vincitori a Custoza, rientrarono nell'Ago-
« sto a Piacenza. »

Quale schianto non dovett'essere quella catastrofe pel nostro patriota! Egli pianse di rabbia e di dolore all'annunzio della ritirata del prode Alessandro LAMARMORA, e pria che gli Austriaci rientrassero vincitori in Piacenza, egli, insieme a taluni altri liberali, emigrò. Andò prima a Stradella, patria di sua madre; e quindi sen venne a Torino, la grande ospite degli infelici emigrati da ogni parte d'Italia per isfuggire alle persecuzioni, per cercar libertà, ch'è si cara.

Non mancarono officî presso il GENOCCHI, perchè ritornasse a Piacenza: ma egli con una fiera lettera rifiutò, dichiarando che non vi avrebbe messo più piede finchè vi rimanesse lo straniero. Son giunto in tempo a procurarmi copia dell'abbozzo di quella lettera, abbozzo che io ebbi la fortuna di trovare fra i moltissimi manoscritti lasciati dal GENOCCHI (1). La lettera è affatto inedita, ed io son certo di far cosa grata all'uditorio dandone lettura. Così la figura di Angelo GENOCCHI si drizzerà al vostro cospetto, come Farinata innanzi a Dante, in tutta la sua naturale nobiltà.

La lettera è indirizzata al Prof. Carlo FIORUZZI di Piacenza, già maestro del GENOCCHI, insegnante di Diritto penale nella Facoltà legale e Cancelliere del Magistrato degli Studi.

Eccola:

CARISSIMO PROFESSORE,

La sua lettera mi è giunta mentre stava cercandomi una nuova abitazione, poichè ho dovuto lasciare quella che aveva prima; e per questo e poi per gl'imbarazzi che accompagnarono e seguirono il mio traslocamento, non ho potuto risponderle insino ad ora.

Queste disposizioni da me prese Le dicono abbastanza ch'io non intendo di muovermi al presente da Torino, ove se mi trasferii e trattenni sin qui, non fu certo per qualche mia utilità e nemmanco per vaghezza di novità o per diporto, ma unicamente pel ribrezzo a me insuperabile di veder un'altra volta nella mia patria gli Austriaci, che vi rientrarono dopo aver sparso sangue italiano e inorgogliti della vittoria.

---

(1) Esso è scritto su un mezzo foglio, contenente la soprascritta di una lettera con l'indirizzo: All'Ill^{mo} sig. Avvocato Angelo GENOCCHI Membro del Comitato dei Ducati, Torino, fermo in posta. Vi è un bollo P. D.; un altro 25 nov, un altro circolare ove si distingue 24 nov., e un pezzo d'ostia rosso.

Un tal motivo pur troppo non è cessato, e finchè non sia tolto, finchè Piacenza dovrà soffrire il sozzo aspetto de' Croati, io non vi tornerò.

Quanto sia prudente il raccoglier costà molta gioventù in questi tempi, e in presenza dell'abborrito nemico; quanto profitto possa sperarsi da un'istruzione in siffatte circostanze a lei impartita, non so. Ben meraviglio di coloro che saranno abbastanza imperturbabili o abbastanza padroni della propria volontà, per esercitare con tutto il dovuto raccoglimento e zelo l'ufficio di maestri; ma non potrei imitarli; perderei il tempo io stesso e lo farei perdere ai giovani.

Vedemmo in maggio e giugno come si studiasse e come si rendesse conto degli studi fatti; nè biasimo però la gioventù, di cui anzi farei meno stima quando avesse potuto allora attendere alle scuole come vi attendeva ne' tempi ordinari. Ma se allora mi parve poco ragionevole la determinazione di riaprire le scuole e anzi di prolungarne il corso oltre il termine consueto, determinazione dalla quale si dovette poscia recedere, molto meno trovo ragionevole la presente. Siamo dunque animali d'abitudine, sospinti prepotentemente da una cieca natura ad eseguire il nostro compito, che temeremmo di morire non adempiendolo, e che non facciam ragione di nuovi eventi e di tempi mutati?

Per me credo che il solo effetto buono d'una tale determinazione sarà che tutti gli studenti del territorio ricusino di recarsi costà, e rendano così pubblico un'altra volta l' abborrimento del paese contro l'Austria.

Mi sembra poi strano che mentre tutti gli impiegati del Governo Sardo trasferirono fuori della giurisdizione austriaca la loro sede, e di questo contegno ebbero lodi universali, i soli professori e maestri restino a Piacenza, quasichè o meno odiino il tedesco o meno abbisognino di libertà. Mi sembra una povera illusione l'immaginarsi che sia un bel fatto il conservare la scuola come mancipia dell'autorità di Carlo Alberto; in Piacenza sappiam tutti che comanda solo il tedesco, e nessuno vorrà credere che, se vi si tengano scuole, questo avvenga senza la tolleranza o meglio l'espressa licenza del tedesco, qualunque sia la data e la soprascritta della lettera del Magistrato.

Si stampava a Piacenza un giornale: l'austriaco tacque per qualche giorno, poi chiamò a sè ed ammonì il direttore, poi aggiunse provocazioni gravi, finchè in breve quel direttore dovette cessare. La medesima sorte toccherà ai professori: eglino si espongono a dovere ad ogni tratto comparire dinanzi all' austriaco a render conto della loro condotta e riceverne i superbi comandi, e quando gliene venga il capriccio, l'austriaco finirà per chiudere al tutto le scuole. Io non approvo che a queste condizioni i professori si sottomettano: io non lodo neppure che profittino d'una permissione o espressa o tacita de' tedeschi; non lodo che possano essere creduti indifferenti, se non propensi alla dominazione austriaca: non lodo che possano mettersi a mazzo con coloro i quali sono amici a tutti i governi, sono amici all'Italia e all'Austria, a Cristo e al Diavolo.

Se le scuole, come fu fatto di tutti gli altri ufficì, con pieno assenso del Governo Sardo, si trasferiranno in luogo non dominato dagli Austriaci,

verrò anch' io a pagare l'obbligo mio; non penso di avere obbligo alcuno di recarmi a Piacenza. Gli stessi argomenti alquanto sottili ch'Ella, carissimo sig. Professore, trae dalla data e dalla soprascritta delle lettere spedite o ricevute dal Magistrato, provano che non v'ha un argomento più forte e più evidente, qual sarebbe un'approvazione espressa del Ministero Piemontese. Nel che la riserva di esso Ministero è senza dubbio lodevole, e non diversa dal contegno che adopra rispetto alla Lombardia e al Veneto, donde una immensa emigrazione, indotta ad abbandonare le proprie case e quanto ha di caro la terra nativa, non dal timore, perchè era più coraggioso il partire che il rimanere, ma dall'abbominio della dominazione straniera, venne come una viva e una perpetua e grandiosa protesta in faccia all'Italia, in faccia all'Europa contro l'Austria.

Sarebbe cosa indegna che quei profughi fossero ricacciati in mezzo agli Austriaci e così, tornati i popoli tranquillamente alle proprie sedi, potesse l'Austria vantarli contenti o almeno indifferenti. E il Governo Sardo non ha comandato e certo non comanderà ai professori dell'antico Regno Lombardo Veneto, che si partano di qui e vadano ad occupare le loro cattedre. Ciò che il Governo non fa pel Lombardo Veneto, non farà, spero, per la città di Piacenza, le cui condizioni sono eguali a quelle e forse peggiori; e se lo facesse, non obbedirei *a nessun costo* a' suoi comandi.

Ma esso non vorrà neanche contraddire a se medesimo trattando con diversa misura i professori e gli altri impiegati.

La prego, carissimo sig. Professore, a volere, nella sua qualità di Cancelliere, comunicare al Magistrato le ragioni che Le ho esposte e che mi tolgono di venire a Piacenza. Ove sia d'uopo, le ripeterò direttamente al sig. Preside di esso Magistrato.

Io Le ho spiegato apertamente e schiettamente l'animo mio; non mi resta che ringraziarla della premura da Lei avuta, e dichiararmi, siccome fo,

Suo dev.° GENOCCHI.

Con la venuta a Torino si chiude la pagina politica della vita del GENOCCHI; nobile pagina, non guasta da gonfiezze rettoriche nè da incostanze. Si può dire che non egli cercò la politica, ma questa lui. Delle sue patriottiche benemerenze, nonchè industriarsi di trar vantaggio, egli non usava nemmanco parlare. Quanto alle sue idee politiche, esse furon quelle di tanti altri onesti e fervidi patriotti in quegli anni; ma, costituito il regno italico sotto lo scettro sabaudo, il GENOCCHI si acquietò. Del resto egli era uomo d'ordine ed alieno dalle intemperanze; e il suo desiderio costante fu un governo forte e saggio, anche se incarnato in un Nerone; talora anzi, allo spettacolo di incon-

sulte dimostrazioni io lo udii ripetere, tra indignato e scherzoso, quei due versi:

> L'assoluto, dispotico governo,
> Sta bene per l'estate e per l'inverno;

tuttavia non lo prendevo certo in parola.

II.

Ma con la venuta a Torino si apre una nuova pagina della vita di Angelo Genocchi, la più importante e gloriosa, voglio dire della sua vita di matematico.

Benchè nelle scuole di Piacenza egli avesse atteso con successo a tutte le varie discipline, benchè fosse poscia divenuto avvocato e chiaro professore di Diritto romano, pure la sua predilezione era stata sempre la Matematica. In essa aveva avuto un valente maestro nel Buccella, poi suo maestro anche in politica; in essa aveva fatto le letture più gradite e meditate, presso la ben provvista biblioteca civica piacentina. Ora qui a Torino egli trovava ricche biblioteche, una cospicua Università, una illustre Accademia, molti dotti; quindi il suo amore per la Matematica qui ebbe incentivo a vieppiù accendersi e divampare. D'altra parte qui egli non aveva più insegnamento di Diritto, nè affari d'avvocato; senza contare che la sua indole, pur essendo fornita di certe doti proprie del valente avvocato, come un acuto spirito critico, un'implacabile dialettica, una frase concettosa e scolpita, mancava tuttavia di quell'esteriore brillante, di quel sapersi intromettere, di quelle maniere officiose, che sogliono così bene aiutare a procacciarsi cause e clienti. Avrò segnato un carattere della sua fisonomia non meno morale che fisica, quando avrò detto ch'egli era un'indole anti-parlamentare.

L'uomo del tipo, per così dire, parlamentare, discute volentieri e con forme cavalleresche; il Genocchi facilmente perdeva la pazienza, agitandosi e tremando, ed allora diventava acre, pungentissimo; ma presto ritornava alla calma. Quegli ha costume di far buon viso al parere della maggioranza e cerca di farne suo pro'; pel Genocchi non vi era maggioranza che tenesse. Quegli infinite lettere riceve, e moltissime ne scrive in fretta e

piene di belle frasi; lo scrittoio del Genocchi era quasi deserto, le lettere ricevute, le buste, financo gl'inviti ad adunanze conservava; sovente sul loro rovescio scriveva de' tentativi di calcoli o l'abbozzo delle risposte, e lo stile era come l'uomo, sincero, sobrio, diritto. Quegli molto si muove, molto si mescola colla gente; il nostro viveva ritirato e schivava la folla. Quegli ambisce le cariche pubbliche, gli onori, e sovente si piace di vivere largamente; il Genocchi visse sempre nel modo più semplice, quasi dimesso, e schivò anche l'ufficio di Preside di Facoltà. Il solo ufficio che accolse di buon grado fu quello di Presidente della nostra Accademia, e nell'esercitarlo non ci oppresse certamente sotto il peso della sua autorità.

La sua vocazione era la Matematica; e doveva esser ben gagliarda vocazione quella che lo persuase ad acconciarsi a vivere con le ottanta lire mensuali che gli venivano di casa, in una cameretta a un ultimo piano di via Alfieri, tutto assorto nella scienza; che di lui, sprovvisto di regolari studî universitarî, fece uno dei più dotti e più fecondi collaboratori dei volumi accademici, e ciò in tempi in cui i matematici in Italia erano pochi e separati fra loro e dagli esteri, in tempi ai quali ancora ben si attagliavano le parole del Paoli: « Fra tutti quelli che in Italia « si dànno allo studio delle Matematiche, se qualche genio su- « blime si eccettua, il quale colla forza del suo spirito abbia « trionfato di tutti gli ostacoli e siasi posto a livello dei geometri « oltramontani, pochi altri si contano che giungano alla medio- « crità. Nè ciò si deve ripetere dalla mancanza degl' ingegni, « che abbondano in Italia come per tutto altrove, ma dal male « inteso metodo d'insegnar le Matematiche; poichè quivi non si « pongono nelle mani dei giovani che elementi molto leggieri, « i quali compariscono facili perchè sono inesatti, e non trattano, « in ciascun ramo della scienza, che di qualche caso particolare ».

Ma una scuola, anche se insufficiente e tapina, è pursempre un aiuto, una guida, uno sprone; aiuto, guida, sprone il Genocchi non trovò che in sè stesso, e salì « a livello de' geometri « oltramontani ».

Le condizioni in cui il nostro scienziato versava non eran certo tali da dargli quella tranquillità che deriva dal vedersi innanzi un sicuro avvenire. Eppure egli lavorava con stoica costanza, quasi avesse potuto dir di sè, come Lagrange: « le mie « occupazioni si riducono a coltivar la geometria, tranquillamente

« e nel silenzio. Siccome non ho fretta e lavoro piuttosto per mio
« piacere che per dovere, così io somiglio ai gran signori, quando
« edificano; io fo, disfò e rifò, finchè non sono passabilmente
« contento; il che tuttavia mi avviene raramente ».

Così durò più anni, frequentando le biblioteche, assistendo alle lezioni del PLANA e principalmente del CHIÒ, e pubblicando dal 1851 in poi numerosi lavori.

Entrò nell'insegnamento della Matematica non prima del 1857, spintovi dall'egregio CHIÒ, che gli aveva messo molto amore, e che, per tagliar corto alle ritrosie del GENOCCHI, scrisse e firmò col costui nome la domanda di ammissione al concorso per la cattedra di Algebra e Geometria complementare presso la nostra Università. Ottenuta la cattedra come reggente e divenutone titolare nel 1859, passò nel 1860 da quella, che fu abolita, all'Analisi superiore; nel 1862 all'Introduzione al Calcolo, ov'era sicuro d'aver buon numero di scolari; e nel 1863 al Calcolo infinitesimale, ove rimase finchè visse, facendosi supplire negli ultimi anni dall'egregio Prof. PEANO, ora suo successore.

Come insegnante, le doti che maggiormente spiccavano in lui, erano dottrina e precisione. Benchè tutto dedito alle ricerche scientifiche, non neglesse mai, per correr dietro a quelle, i suoi doveri scolastici. Scrupolosamente puntuale, era giustamente esigente con gli scolari; i quali sel sapevano e lo temevano, ma gli erano affezionati e non gli serbavan rancore neanche di qualche rabbuffo durante gli esami. Spiegava con calma, senza mai ripetersi, badando a porre rigorosamente i concetti fondamentali e studiandosi ad un tempo di conseguire semplicità di procedimento e chiarezza di esposizione. E vi riusciva pienamente, e fu infatti uno dei primi a informare l'insegnamento del Calcolo infinitesimale a quello spirito di esattezza che oggidì pervade tutta la scienza matematica, senza rinunziare, il che non è agevole impresa, alla chiarezza. Con questo non intendo affermare che fosse un maestro perfetto, se pur ve n' ha; l'indole austera, la voce fioca e monotona, non erano adatte ad elevare la temperatura dell'ambiente della scuola, a render gli scolari familiari col maestro.

III.

Dove veramente egli profuse tutto sè stesso e palesò tutte le straordinarie sue doti d'ingegno, di dottrina e d'operosità, si fu nelle pubblicazioni. Le quali abbracciano uno stadio di 35 anni, dal 1851 al 1886, e sommano al cospicuo numero di 176, disseminate nei giornali scientifici, italiani, francesi e tedeschi, nei volumi delle Accademie delle Scienze di Bruxelles, Parigi e Torino, dell'Istituto Lombardo, della Società Italiana delle Scienze detta dei XL. Sarebbe imprudenza e presunzione soverchia ingolfarmi nell'esaminar partitamente tante elaborate scritture; nè l'occasione il consente. E però mi contenterò di raggrupparle a seconda dell'affinità degli argomenti, e di segnalare le più importanti in ciascun gruppo. Se non vi ha autore di vaglia, del quale non sia utile aver raccolti in volume i varî lavori, per meglio iscorgerne i mutui nessi e seguir passo passo lo svolgersi del suo pensiero, ciò sarebbe, più che utile, necessario rispetto al nostro, il quale soleva ritornar sovente sopra un medesimo soggetto; tanto più che molti de'suoi lavori, abbondando di commenti agli altrui e di svariate osservazioni, mal si prestano ad esser riassunti senza che perdano troppo della propria fisonomia.

Il Genocchi era un gagliardo analista, e specialmente un aritmologo. Egli rientra nel ciclo che prende nome e carattere dai sommi Eulero, Lagrange, Gauss, Cauchy; e i suoi lavori più notevoli si riferiscono alla teoria dei numeri, alle serie, al calcolo integrale. I metodi, di cui Riemann e Weierstrass hanno arricchita la immensa Analisi, non isfuggirono ai suoi studi, ed anzi egli se ne dichiarava ammirato, sebbene non li adoprasse a strumento di ricerca e preferisse attenersi a quelli nei quali la poderosa sua mente, soltanto per proprio impulso e senza la scorta di alcun maestro, era venuta educandosi e svolgendosi. Accade pur troppo sovente che le vedute e i metodi, che sorgono quando la nostra via nella scienza è già scelta, ci trovino esitanti ad addentrarci in essi e ci paiano più ardui che realmente non sono, sol per manco di fiducia nelle nostre forze; ond'è che fanno un bene inestimabile quegl' insegnanti che fra i giovani che intendono dedicarsi alla scienza arditamente divulgano le nuove dottrine, anche quando non siano peranco giunte a maturità. E ciò è

tanto più vero oggidì, che l'incalzarsi delle cose nuove è divenuto così rapido, da giustificare quel che un altro illustre scriveva al nostro in un istante di stanchezza: « Je donnerais toutes « les Mathématiques du monde, tous les royaumes de la terre « avec leur gloire, pour vivre au bord de la mer, de l'existence « d'un zoophyte ou d'une anellide arènicole. Les questions sont « maintenant si difficiles à traiter et demandent tant d'efforts, « que c'est à être absolument découragé ! »

Tuttavia nemmeno quest'altro io prenderei in parola.

Alla sottilissima ed astrusa teoria dei numeri, della quale era il più strenuo cultore in Italia, si riferiscono i principali lavori del GENOCCHI; cioè ai numeri complessi, alla legge di reciprocità de' residui quadratici, alla risoluzione in numeri interi dell'equazioni indeterminate. Capitale fra essi è la « Note sur la théorie des résidus quadratiques » del 1852, che fu accolta dall'Accademia del Belgio, ed è anche oggi citata con molto onore, segnatamente per una bellissima dimostrazione che contiene dell'accennata legge di reciprocità. In quella nota il GENOCCHI ritrovò alcuni risultati del DIRICHLET e le formole di EISENSTEIN, che egl'ignorava; « ma (scriveva il KRONECKER, testè « rapito anch'esso alla scienza) questa coincidenza accresce la no- « stra stima pel suo talento matematico; poichè è per lui un « titolo di gloria, che, senza conoscere certe pubblicazioni del « DIRICHLET e dell'EISENSTEIN, egli fosse spontaneamente venuto « nello stesso ordine d'idee di quei due grandi ».

Della teoria delle serie egli dava nel suo corso una esposizione elementare mirabile per semplicità e rigore. E le serie furono argomento di pregiati suoi studî; come quelli sui numeri Bernoülliani, sugli sviluppi in serie di STIRLING, BINET, PRYM e sulla loro convergenza, sul resto della serie di EULERO sotto forma d'integrale definito, sulla serie di LAGRANGE, ecc.

Fra gli scritti concernenti il calcolo integrale, citerò quelli sulla rettificazione delle ovali di CARTESIO mediante tre archi di ellisse, sugl'integrali ellittici e sugli abeliani, sull'integrale completo (non trovato da JACOBI) dell'equazioni differenziali del 3° ordine cui soddisfanno il numeratore e il denominatore della formola di trasformazione delle funzioni ellittiche, sull'equazioni lineari del 2° ordine, sui casi d'integrazione in forma finita, sugl'integrali Euleriani. Questo degl'integrali Euleriani è un soggetto sul quale il GENOCCHI ritornò più volte, ciò che rivela in lui (come notò il BELTRAMI)

un seriissimo istinto di maestro associato a quello di ricercatore, se si tien conto che allo studio di esso son dovuti forse i primi avviamenti alla odierna teoria delle funzioni.

Merita altresì una particolare menzione, qualunque sia il giudizio che voglia portarsi su alcune delle critiche che vi si contengono, il lavoro « Sur un Mémoire de DAVIET DE FONCENEX », ov'è fatta un'accurata disamina dei principî delle Geometrie non euclidee, sussidiata da interessanti ricerche storiche.

E notevole per giuste osservazioni sull'abuso delle serie divergenti e per le critiche a varî scrittori (EULERO, D'ALEMBERT, LAGRANGE, POINSOT, ...) è la Memoria « Sopra una formola di LAGRANGE spettante al moto dei liquidi nei vasi ».

Nè deve passar sotto silenzio la nota « Del calore solare nelle regioni circumpolari della terra », nella quale, rifacendo con gran semplicità un calcolo che il PLANA aveva sbagliato, mostrò insussistente l'asserzione, che il calore ricevuto dal sole in un anno fosse minimo in un punto della terra diverso dal polo.

Non vi è forse scrittura del GENOCCHI, nella quale non sia corretto qualche errore, chiarito qualche punto di storia della scienza, giudicata qualche questione di priorità. Non poche sono interamente dedicate ad argomenti di critica, e sono modelli di acuto ragionare, di coscienziosa ricerca storica, di vasta e sicura erudizione. E doveva esser veramente straordinaria l'erudizione del nostro Autore, se egli, così abborrente da ogni vanteria, non potè non confessare di essere un erudito, sebbene il facesse per modestia. « Moi, scriveva al KRONECKER, je suis un pauvre érudit:
« ma seule ambition est de savoir apprécier le mérite des grands
« géomètres, comme autrefois j'appréciais celui des grands juris-
« consultes..... Sed longe sequor et vestigia semper adoro. »
Questo scriveva a 66 anni un uomo che i matematici d'ogni paese tenevano in così alta stima!

Oltre alla erudizione, nelle sue scritture si ammira uno stile chiaro, ben nudrito, elegante, pari a quello dei grandi geometri e giureconsulti che l'Autore aveva scelti a modello. Di qualunque argomento tratti, egli lo padroneggia ed illustra da ogni lato in modo davvero magistrale; ond'è che leggendo GENOCCHI non accadrà mai che ci paia di aver in mano una lampada da minatore, la quale rischiara solo quella poca parte di suolo che le è sottoposta, giusta l'arguta espressione del DARBOUX.

Ad acquistar pieno possesso dei singoli argomenti gli riescirono senza dubbio di valido sussidio i moltissimi quaderni, nei quali soleva scrivere il riassunto o la traduzione di quanto andava leggendo di più interessante per le sue ricerche: essi, nonchè buon numero di lezioni di Calcolo infinitesimale manoscritte, sono al presente proprietà della Biblioteca civica di Piacenza.

IV.

Il Genocchi manteneva inoltre frequente corrispondenza epistolare con molti matematici nostrani e stranieri (1). Ho avuto la sorte di leggere le costoro lettere, e posso dire che ognuna di esse è un documento della profonda stima che del suo sapere e del suo carattere facevan tutti, anche quando discordavano dalle sue opinioni. La corrispondenza più fitta è quella col Bellavitis, la più istruttiva e geniale quella coll' Hermite: « M. Genocchi, questi scrive, m' avait attaché à lui sans « que nous nous fussion vus, par le charme de son esprit, « par une bonté et une simplicité qui montraient une nature « exquise, autant que par son rare mérite d'homme de science. « La science qui nous avait rapprochés n'était pas le seule « objet de notre correspondance: quelque chose de plus intime « venait de la confiance à laquelle je me livrais pleinement en « reconnaissant la droiture et l'élévation de son caractère. Et « tout cela n'est plus; il ne reste que des regrets et un inou- « bliable souvenir! »

Grazie a te, gentile e forte campione della classica Analisi, per l'amicizia onde allietasti il nostro Collega, per la simpatia verso l'Italia che emana dalle tue lettere. Il nostro saluto cordiale sorvoli ai ghiacci delle Alpi, e venga a cercarti nella tua casa ospitale, là presso la Sorbona, recando l'augurio che la tua vita sia ancora per lunghi anni conservata all'incremento della scienza, alla gloria del tuo paese!

---

(1) Eccone i nomi: Battaglini, Bellavitis, Beltrami, Bertrand, Betti, Boncompagni, Bourget, Brioschi, Brocard, Casorati, Chasles, Cremona, Darboux, de Tilly, Gerono, Gherardi, Gilbert, Gunther, Hermite, Hoüel, Hoppe, Kronecker, Lebesgue, Mansion, Marre, Quetelet, Riccardi, Schwarz, Schering, P. Serret, Tardy, Terquem, Tortolini, Weierstrass, Winckler.

Siccome apparisce dalla sua estesa corrispondenza epistolare, il GENOCCHI aveva molti amici in Italia e fuori. E quantunque vivesse a sè, nè facilmente si concedesse, pure contava non pochi amici anche qui in Torino. Con essi si ritrovava volentieri insieme; ed anzi le loro desiderate visite divennero l'unico suo sollievo negli ultimi anni, quando la vista gli si era affievolita sì da vietargli di leggere o scrivere altro che brevemente, e una certa rigidità, lasciatagli in un ginocchio da una malaugurata frattura della rotula riportata nel 1883, gli aveva tolto quasi ogni voglia di escir di casa.

Fu fido amico, e non tiepido. È risaputo con qual calore prese le parti del CHIÒ, cui lo legava gratitudine antica, in una notissima controversia accademica, la quale nondimeno credo non avesse lasciato nel suo animo nessun rancore. E l'ultima sua pubblicazione fu in memoria di un amico, l'ingegnere Savino REALIS, non meno abile che modesto cultore della teoria dei numeri e del calcolo integrale.

Non è la men bella pagina della vita del GENOCCHI quella che s'intitola dall'amicizia, da questa perla del cuore umano, che non a torto fu detta « Seule mouvement de l'âme où l'excès soit permis ». Il qual verso giova tener presente nel caso attuale.

Ma quella, che nè da me nè forse da altri potrebb'essere scritta, si è una pagina che i moderni biografi ricercano con gran cura e curiosità; quella dell'amore. Con una mente aperta a tutte le bellezze, non solo della scienza ma anche dell'arte; amante della musica, della pittura, dei romanzi, del teatro; con una passione così gagliarda per la poesia, da sopravvivere a quella istessa della scienza; con un cuore pieno di sentimenti patriottici, con un aspetto simpatico (somigliava a Giuseppe MAZZINI), si direbbe che egli abbia dovuto pagare il suo tributo all'eterno feminino. Ed io confesso che, ove potessi ciò affermare, proverei la stessa soddisfazione di ARAGO, quando seppe che esistevano lettere di amore firmate da NEWTON. Ma il nostro matematico era della stoffa di cui si fanno i santi, e convinzione mia e dei suoi intimi è che egli non sia vissuto veramente che per la scienza, suo amore supremo; sebbene non giungesse ad asserire col POISSON: « La vita non è buona se non a due cose: a far della Matematica e a professarla. » Il fatto è che egli, così coraggioso nel manifestare le proprie opinioni nella scienza e nella politica, era poi timido e contenuto nell'espressione dei

sentimenti e degli affetti. Anche da giovane, a Piacenza, stava lontano dalle donne; appena s'intratteneva con la madre e la sorella, e sembrava che ne avesse soggezione.

Ma quel che è certo, e che mi preme rilevare, si è che egli aveva della donna e della famiglia un altissimo concetto. Mortogli il fratello rimasto a Piacenza, chiamò presso sè a Torino la sua vecchia madre, e la circondò di tenere cure finchè morte non gliel'ebbe rapita. Un consiglio, che soleva dare ai giovani scienziati, era di farsi una famiglia. Ad un amico, che, per far diversione ai lamenti di lui circa la vita inoperosa cui era da ultimo ridotto, parlava de' propri crucci e dei fastidî che gli procurava un certo ufficio pubblico, rispondeva: « Ma lei ha la consolazione della famiglia! »

V.

« Ruit hora ». Ho dianzi accennato al declinar della salute del Genocchi. Pure verso il 1885 egli parve riaversi, riprese le lezioni interrotte, ed accettò la carica di Presidente, alla quale i soci dell'Accademia vollero innalzarlo, come dovuto omaggio all'illustre e venerato collega, che apparteneva al sodalizio fino pal 1862. Ma quel confortante stato non durò guari. Certi disordini cardiaci cominciarono a ricorrere a più brevi intervalli; tutto il suo essere intorpidiva. Non fece più scuola. Nè la dignità di Senatore conferitagli, non dirò « in articulo mortis », ma certo troppo tardi, valse a rialzare il suo animo. Tornò vana ogni esortazione di amici, perchè non si lasciasse vincere dalla ipocondria e si recasse al Senato. Anche la Matematica gli divenne indifferente; non scriveva più lettere, non sempre leggeva le altrui. Sopraffatto dalla inazione, il povero vecchio aspettava la morte; e sovente l'ho udito esclamare: « Che cosa ci sto più a fare qui, è meglio ch'io muoia! » Quante volte, poichè la memoria dei versi fu l'ultima a tramontare in quel nobile intelletto, egli avrà ripetuto col poeta del dolore universale:

> ......: O natura cortese,
> Son questi i doni tuoi,
> Questi i diletti sono,
> Che tu porgi ai mortali. Uscir di pena
> È diletto fra noi.

Pene tu spargi a larga mano; il duolo
Spontaneo sorge; e di piacer quel tanto,
Che per mostro e miracolo talvolta
Nasce d'affanno, è gran guadagno. Umana
Prole, cara agli eterni!; assai felice,
Se respirar ti lice
D'alcun dolor; beata,
Se te d'ogni dolor morte risana!

Così languì, così si spense il 7 marzo del 1889 a settantadue anni.

La morte del Genocchi fu appresa con dolore dai matematici d'ogni paese. Hermite l'annunziò all'Istituto di Francia con parole commosse: le principali Accademie d'Italia e quelle di Bruxelles e di Liège, le quali tutte lo avevano voluto socio, registrarono dolenti la infausta data. I membri dell'Accademia di Torino, più direttamente e duramente colpita, cercarono un conforto nel dar opera all'adempimento del sacro dovere che loro incombeva di onorare la venerata memoria del loro capo. Una bella e affettuosa commemorazione fu letta dal nostro Siacci nel dì trigesimo dalla morte, insieme a importanti lettere di Hermite, Catalan, de Tilly, Kronecker, Brioschi, Tardy, Betti, Beltrami, illustranti l'opera scientifica del compianto Professore. E interessanti notizie circa la sua scuola diede più tardi il Peano nell'*Annuario* della nostra Università.

Una pubblica sottoscrizione fu aperta, alla quale concorsero dotti d'ogni parte, nonchè il Comune di Piacenza. Ed oggi abbiamo la mesta gioia d'inaugurare un busto, lavoro di valoroso scalpello, nell'atrio del palazzo dell'Accademia; e fra breve una lapide sarà posta nell'Università a chi per un trentennio educò migliaia di giovani ai severi studi dell'Analisi.

Dopo Lagrange, accanto a Plana, la nostra Accademia scrive il nome di Genocchi: essi formano la triade matematica nelle gloriose memorie del primo secolo di sua esistenza.

Ed è bello e degno che alla odierna solennità assistano i rappresentanti del Governo e della Magistratura, della città natale del Genocchi e di questa che gli fu seconda patria, di molte Accademie, dell'Ateneo Subalpino; onorare un tal uomo è un dovere civile.

Si abbiano tutti una parola di ringraziamento.

Ed ora, o Signori, scendiamo a rimuovere il velo che ancor

ne cela le sembianze di Angelo GENOCCHI, e il Nume di questa Italia, che egli tanto amò e cui accrebbe onore con le opere sue, protegga il modesto monumento. Il quale starà perenne a ricordare agli studiosi lo scienziato dottissimo e infaticabile: ai torinesi colui che nella loro città cercò asilo e trovò pace ed affettuosa riverenza; agl'Italiani tutti il patriota fervente e intemerato, che sdegnò di restare nella sua città nativa, perchè lo straniero la contaminava col suo innaturale dominio.

Ma a noi, colleghi ed amici suoi per tanti anni, una folla di care memorie affluirà alla mente, un palpito più rapido avrà il nostro cuore, quantunque volte, attraversando l'atrio di questo palazzo, ci soffermeremo pensosi e commossi a contemplare

La cara e buona imagine paterna.

L'on. avv. ERNESTO PASQUALI, Deputato al Parlamento Nazionale e Presidente del Consiglio provinciale di Piacenza, a nome di questa città ringraziò l'Accademia e l'oratore, e manifestò il vivo compiacimento della città nativa del Genocchi di custodirne la lettera, di cui diede lettura il prof. D'Ovidio, nella quale si palesa l'animo nobile e caldo di amor patrio dell'insigne matematico.

Gli Accademici Segretari

GIUSEPPE BASSO

ERMANNO FERRERO.

ERRATA-CORRIGE.

A pag. XXXI, 13 Dicembre 1891, leggasi:

STAS (Giovanni Servasio), Socio Straniero della Classe di Scienze fisiche, ecc.

INDICE

DEI LAVORI PUBBLICATI

dalla Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

CONTENUTI NEL VOL. XXVII DEGLI *ATTI*

Torino, Stamperia Reale G. B. Paravia e C.

R. Accademia delle Scienze
di Torino

ARTICOLI DI REGOLAMENTO

approvato dalle Classi unite nella seduta del 3 Aprile 1892

1° Nessuna memoria, da inserirsi nei Volumi in-4°, potrà occupare più di 80 pagine di stampa, nè potrà aver unite più di due tavole. Le dette tavole dovranno essere di formato uguale ad una facciata, e la riproduzione di ciascuna di esse, compresa la tiratura nel solito numero di copie, non dovrà costare più di L. 100. Qualora vi siano incisioni o disegni inserti nel testo della memoria, la spesa intera relativa a queste incisioni o disegni dovrà venir computata nel massimo di spesa sovra stabilito per le tavole.

Quando una memoria non adempia a tutte le suaccennate condizioni, essa sarà stampata solo nel caso che l'autore della medesima assuma a proprio carico la spesa eccedente.

2° Qualunque lavoro da inserirsi negli Atti non potrà occupare più di 24 pagine di stampa in-8°. Se un tal lavoro conterrà incisioni o disegni inserti nel testo, od in tavola a parte, la stampa di esso, non dovrà occupare più di 16 pagine. A ciascun lavoro stampato negli Atti non potrà essere annessa più di una tavola di disegni, e questa non potrà avere formato maggiore di una doppia facciata Il costo della riproduzione di tutti i disegni inserti nel testo o nella tavola a parte, compresa la tiratura di questa nel solito numero di copie, non potrà eccedere, in complesso, la somma di L. 70.

Un lavoro, che non adempia a tutte le ora dette condizioni, sarà stampato solo nel caso che l'autore assuma a suo carico la spesa eccedente.

Tip. Paravia 487 (C4) 19-IV-92.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Torino — Tip. Reale Paravia.